

ASTRONOMIE

PAR

JÉRÔME LE FRANÇAIS (LA LANDE).

ASTRONOMIE

PAR

JÉRÔME LE FRANÇAIS (LA LANDE),

De l'Académie des sciences de Paris ; de celles de Londres, de Pétersbourg, de Berlin, de Stockholm, de Bologne, etc.; Inspecteur du College royal, et Directeur de l'Observatoire de l'École royale militaire.

TROISIEME ÉDITION, REVUE ET AUGMENTÉE.

TOME TROISIEME.

3



A PARIS,

Chez la Veuve DESAINT, rue du Foin Saint-Jacques.

DE L'IMPRIMERIE DE P. DIDOT L'AINÉ.

M. DCC. XCII.

ASTRONOMIE.

LIVRE QUINZIEME.

De la Grandeur et de la Figure de la Terre.

2630. La Terre que nous habitons est, de toutes les planetes, celle qu'il nous importe le plus de connoître ; car sa grandeur absolue doit servir d'échelle et de terme de comparaison pour toutes les autres grandeurs que nous avons à mesurer, comme on l'a vu dans le traité des parallaxes (1728).

Nous avons déja indiqué la maniere dont on s'y est pris autrefois pour connoître la grandeur de la Terre (38), ou celle d'un de ses degrés ; il suffit de savoir combien il y a de lieues, ou de toises entre le lieu B (FIG. 216), où l'on voit une étoile E au zénit, et le lieu A où la même étoile paroît éloignée du zénit d'un degré, en même temps que le Soleil à midi y paroît plus ou moins élevé d'un degré que dans le lieu B ; c'est ce qu'entreprirent autrefois Eratosthene et Hipparque (40, 320, 327) ; quand on a ainsi la valeur d'un degré, on la multiplie par 360, et l'on a la circonférence entiere de la Terre.

2631. On trouve dans les anciens auteurs cinq évaluations différentes de la circonférence de la Terre.

Aristote *de Cœlo*, L. 2, c. 14.	400 000 stades (a)
Cléomede, L. 1, c. 11.	300 000
Eratosthene, ib. c. 10.	250 000
Posidonius, ib. L. 1, c. 10.	240 000
Ptolémée, Géogr., L. 1, et L. 7.	180 000

Sur ces différentes opinions, on peut voir Riccioli, *Geogr. reformata*, p. 132. M. Freret, *Mém. de l'acad. des inscr.*, t. 8, p. 97, t. 25. M. d'Anville, t. 26, et M. Bailly, *Histoire de l'Astr. mod.* t. 1, p. 145.

(a) Cette mesure, qu'on croit d'Anaximandre, se représente par un stade de 51 toises dont Freret et d'Anville ont rapporté des preuves, *Tom.* 24, *pag.* 239, et 26, *pag.* 87.

2632. La mesure la plus célebre de toutes est celle d'Eratosthene, qui trouva, suivant Cléomede (*Cyclicae Theoriae*, c. 10), la grandeur de la Terre de 250 mille stades, par la distance d'Alexandrie à Syene, qui étoit de 15000 stades, et par leur différence en latitude, qu'il trouva égale à un cinquantieme de la circonférence entiere de la Terre. Pline dit 252 milles, L. II, c. 108 ; mais c'est parcequ'il faisoit le degré de 700 stades en nombres ronds. Strabon, Vitruve, Geminus, Pline, Macrobe, Censorinus, emploient cette mesure. Pline, qui la rapporte, dit ailleurs que le stade étoit de 625 pieds (L. II, c. 23). Or le pied romain antique étoit de 10 pouces 10 lignes $\frac{3}{4}$, suivant Freret, ou 10 lignes $\frac{2}{10}$, suivant la Condamine, (*Mém. acad.* 1757, *pag.* 363, 410); donc le stade de Pline étoit de 94 $\frac{3}{4}$ toises. Ainsi le degré de la Terre ayant 700 stades, suivant Pline, revient à 66 mille toises, au lieu de 57 mille que nous trouvons aujourd'hui (2661) ; en sorte que cette mesure faisoit le diametre de la Terre trop grand d'un septieme.

Freret croit qu'Eratosthene se servit de stades olympiques ; dans ce cas, sa mesure se trouveroit d'accord avec les nôtres. D'Anville trouve aussi une mesure de stade qui donne le même accord, ainsi que M. Bailly.

2633. Pour accorder aussi la mesure de 180 mille stades ou le degré de 500 stades, adopté par Marin de Tyr et Ptolémée (Géogr. VII, 5), il faut choisir les stades égyptiens. Le nilometre du Caire ou le devakh qui sert à mesurer la crue des eaux du Nil est marqué sur une ancienne colonne de marbre, placée dans une isle entre deux bras du Nil, vis-à-vis du Caire ; ce devakh est la mesure la plus authentique et la mieux conservée qui nous reste de l'antiquité (Freret, p. 465) : c'étoit la coudée des Egyptiens et des Hébreux. Suivant Greaves, ce nilometre a 1 pied $\frac{824}{1000}$, mesure d'Angleterre ; suivant M. le Roy, de l'académie des inscriptions, 20 p. 544 mesure de Paris ; d'où il suit que le stade de 600 pieds égyptiens devoit avoir 114 toises, si on l'applique à la mesure d'Eratosthene ; il s'en suivroit que le degré, suivant les anciens, étoit de 79891 toises, au lieu de 56820 que nous trouvons actuellement pour la latitude d'Alexandrie ; il eût été trop grand de $\frac{3}{7}$ de sa véritable valeur.

M. le Roy, dans un mémoire intitulé : *Recherches sur les mesures grecques*, p. 41 [(a)], emploie ce stade pour l'ancienne mesure de la Terre, qui donnoit 500 stades au degré. Freret l'avoit rejetée

(a) Voyez aussi *les Ruines des plus beaux monumens de la Grece*, par M. le Roy, 1770, 2 vol. *in-folio*.

(t. 24, p. 517); M. le Roy croit qu'elle étoit en stades égyptiens ou alexandrins, qu'il évalue à 684 $\frac{4}{5}$ pieds; Freret dit 683 $\frac{1}{3}$, page 518. Suivant M. le Roy, les 500 stades feroient 57067 toises, et cette mesure du degré seroit d'une exactitude bien singuliere.

2634. On choisit ainsi les stades pour accorder les mesures des anciens avec les nôtres. « Supposer (dit M. le Roy) qu'Eratosthene « se servit du stade grec, qui étoit de 569 pieds, ce seroit sup« poser qu'il se trompa grossièrement dans sa mesure ». Examinons si cette derniere supposition n'est pas un peu vraisemblable. Riccioli (*Geogr. reform. pag.* 144) estime que cette opinion de 500 stades pour le degré venoit de Posidonius [a]; il avoit trouvé par la hauteur de l'étoile *Canopus*, que l'arc compris entre Rhodes et Alexandrie étoit la quarante-huitieme partie du cercle (40); il croyoit, sur le rapport d'Eratosthene, que la distance de ces deux villes étoit de 469 milles ou 3752 stades (Pline, V, 31); il en conclut le degré de 500 stades. Mais pour faire voir combien il y avoit peu d'exactitude dans les données, et peu de certitude dans le résultat, il n'y a qu'à considérer trois choses: la premiere, c'est qu'il négligeoit la réfraction, qui étoit d'un demi-degré à l'horizon de Rhodes; la seconde, c'est que la distance de Rhodes à Alexandrie, qu'Eratosthene trouva de 3752 stades, avoit été jugée de 4 mille stades ou de 5000, par les navigateurs de ce temps-là, et que cependant Eratosthene n'avoit pu la mesurer lui-même au travers de la mer; Cléomede et Pline, en rapportant cette opinion d'Eratosthene, ne disent pas qu'il l'eût mesurée; ce qui en effet, étoit impossible de son temps. Strabon (L. II, *pag.* 225), dit bien qu'il l'avoit mesurée par le moyen du gnomon; mais on voit assez que Strabon confond la mesure de l'arc céleste avec celle de la longueur itinéraire; la premiere pouvoit bien se faire avec le gnomon; mais l'autre n'y avoit aucun rapport.

2635. La troisieme considération qui prouve que cette mesure n'avoit aucune précision ni aucune certitude, c'est que la distance de Rhodes à Alexandrie, que Posidonius supposoit $\frac{1}{48}$ de la Terre en nombres ronds, ou de $7^\circ \frac{1}{2}$, n'est tout au plus que de $5^\circ \frac{1}{4}$, suivant les observations de Chazelles; puisque la latitude de Rhodes est de $36^\circ 28' 30''$, et celle d'Alexandrie $31^\circ 11' 28''$ (*Mém. acad.* 1761); ainsi il y avoit près d'un tiers d'erreur dans

(a) Freret croit que Posidonius avoit donné deux évaluations du degré, l'une en stades olympiques, l'autre en stades égyptiens; car Strabon dit tantôt 500, tantôt 700, suivant qu'il copie des auteurs qui avoient employé l'une ou l'autre (*Tom.* 24, *pag.* 519).

cette partie de la mesure. C'est donc marquer, ce me semble, trop de confiance dans les anciennes opérations, que de chercher à déterminer la valeur des anciennes mesures par les opinions des anciens sur la grandeur du degré.

2636. Eratosthene, en faisant le degré de 700 stades, supposoit 5000 stades d'Alexandrie à Syene (320) : or, l'on étoit fort peu sûr de cette distance itinéraire, jusqu'au temps où Néron la fit mesurer par des arpenteurs (Pline VI, 29) ; à l'égard de l'arc céleste compris entre ces deux villes, Eratosthene le supposoit de 7° 12'; et il y a certainement près d'un demi-degré de plus. Ainsi les anciens se trompoient beaucoup ; et si la mesure adoptée par Ptolémée (2633) se trouve cadrer avec nos mesures, en admettant le stade de 684 pieds, c'est peut-être par la compensation de deux erreurs considérables, dans les anciens ; ou bien par la compensation que nous faisons de ces erreurs et de celle que nous pouvons commettre dans la réduction de leurs stades. M. Bailly évalue le degré d'Eratosthene à 59442 toises, parcequ'il emploie le stade de 85 toises (p. 458).

Picard observe que la grandeur du degré estimée par les anciens, a toujours été en diminuant; au temps d'Aristote, c'étoit 1111 stades ; elle fut réduite à 700 par Eratosthene ; à 666 par la premiere mesure de Posidonius, et à 500 par ceux qui suivirent; mais on a vu que c'étoit peut-être l'effet des différentes valeurs de stades employées en différens siecles : aussi M. Bailly, dans son *Histoire de l'Astronomie mod. Tom. I, pag.* 149 *et* 505, concilie toutes les mesures des anciens pour la grandeur de la Terre, et les regarde toutes comme les expressions d'une même mesure, dont l'ancienne se perd dans la nuit des temps.

2637. Suivant Abulfeda, dans ses *Prolégomenes*, la mesure qui fut faite par ordre d'Almamon dans les plaines de Sinjar (352), donna le degré de 56 milles $\frac{2}{3}$, que Picard évalue à 47188 toises. Ce seroit 61883 suivant Riccioli (Géogr. 43), et 54563 suivant M. Bailly (T. 2, p. 582), parcequ'il admet des milles d'environ 963 toises.

2638. Fernel, au commencement de sa Cosmothéorie, rapporte la mesure qu'il dit avoir faite lui-même vers 1528 (419), en allant à un degré au nord de Paris, et comptant en revenant les tours-de-roue, il trouva 68096 pas géométriques, qui font 57070 toises de 6 pieds. Suivant l'évaluation de Riccioli ce seroit 62706 toises; mais il y a lieu de croire que Fernel s'est servi du pied de Paris, en comptant des pas géométriques de 5 pieds; et ce qu'il dit des

milles d'Italie ne peut entrer en comparaison, comme je l'ai fait voir (*Mém.* 1787).

2639. La mesure de Snellius (445), publiée en 1617, *Eratosthenes Batavus*, donne 28500 perches du Rhin, que Picard évalue à 55021 toises. Mais il faut voir à ce sujet les Mémoires de 1702, p. 82 ; la figure de la Terre de Cassini, 1718, p. 294 ; Musschenbroek, *Dissertatio de magnitudine Terrae*, 1729, et les Mémoires de 1748, p. 130. Cette évaluation fut long-temps admise comme la meilleure, et cependant elle étoit beaucoup trop petite.

2640. Norwood, en 1635, mesura le degré entre Londres et Yorck, et sa mesure, de 367200 pieds anglois, donne 57424 toises (*The seaman's practice*) : cette mesure étoit trop forte ; au reste point connue : car Riccioli, Picard, Newton n'en ont pas fait mention.

2641. La méthode de Riccioli, déja proposée par Képler et Maurolycus ; consistoit à mesurer l'angle APC sur la montagne de Paterno près Bologne, par l'abaissement de la tour de Modene ; cet angle étoit 89° 26′ 13″ $\frac{1}{2}$, et l'angle CAP sur la tour de Modene 90° 15′ 7″ $\frac{1}{2}$, ce qui donne 18′ 39″ $\frac{1}{2}$ pour l'angle C égal à la distance AB, qu'il avoit trouvée de 20016 pas de Bologne ; mais la réfraction terrestre affecte beaucoup ces mesures (2252). Riccioli employa beaucoup d'autres observations à cette recherche ; il s'en occupa beaucoup dans le cours de 13 années ; il trouva enfin le degré de 64363 pas de Bologne, que Picard évalue à 62900 toises ; Cassini à 6265 (*Geogr. ref.* 1672, *pag.* 169 *et* 172). Voyez aussi son *Almagestum* (*L.* 58, *II*, 585), où il rapporte les différens résultats et les anciennes opinions sur la grandeur de la Terre.

2642. La mesure de Riccioli étoit trop grande de plus d'un dixieme ; et telle étoit l'incertitude qu'on avoit sur la grandeur de la Terre lors de l'établissement de l'académie des sciences. Toutes les parties de l'astronomie commencerent alors à se perfectionner ; Picard fut chargé de la mesure de la Terre, en 1669 ; il l'exécuta avec une précision inconnue jusques-là, et il trouva le degré de 57060 toises ; nous le supposons aujourd'hui de 57069 toises vers 49° $\frac{1}{3}$ de latitude (2661), et l'incertitude ne va pas à plus de 10 toises, ou à la six millieme partie du total.

2643. Avant que d'expliquer la méthode exacte dont on se sert pour mesurer la longueur d'un degré, il faut dire un mot de la mesure dont nous nous servirons, puisque c'est une chose de pure convention. Il seroit assurément fort utile aux nations de convenir d'une mesure universelle, et les savans devroient en donner

l'exemple [a] : la longueur du pendule simple, qui a lieu sous l'équateur, ou celle qui convient à une autre latitude commune, comme 45°, quantité invariable et facile à retrouver dans tous les temps semblables, donnée par la nature pour servir de mesure dans tous les pays. Mouton, astronome de Lyon (885), proposoit pour mesure universelle un pied géométrique, *Virgula geometrica,* dont un degré de la Terre contenoit 600000, et pour en conserver la longueur à perpétuité, il remarquoit qu'un pendule de cette longueur faisoit 3959 $\frac{1}{5}$ vibrations en demi-heure. (*Observat. diametrorum*, 1670). Picard, en 1671, proposa une idée semblable. Huygens, qui avoit imaginé, en 1656, l'application ou pendule aux horloges, parla de même de l'usage qu'on en pouvoit faire pour les mesures (*Horol. oscil.* 1673*, part. I*, *pag.* 7*, part. IV, pag.* 151), et la société royale de Londres se proposoit de l'adopter. Amontons (*Mém. acad.* 1703, *pag.* 51), Bouguer, *pag.* 300, la Condamine (*Mém.* 1747), insisterent là-dessus. Du Fay avoit fait agréer au ministere un projet de réglement pour une mesure universelle; mais la mort du contrôleur-général Orri, et celle de du Fay, rendirent le projet inutile. La Condamine fait voir que le pendule équinoxial ou équatorial, qui est de 36 p. 7 l. $\frac{21}{100}$, mesure de Paris, en employant la toise qui a servi au Pérou (2649), devroit être adopté par préférence, comme étant une mesure plus naturelle et plus indépendante des prétentions diverses de chaque pays; par ce moyen notre toise deviendroit plus longue de 14 lig. $\frac{42}{100}$; le degré de la Terre, sous la latitude de Paris, contiendroit 56132 toises astronomiques, au lieu de 57069 toises de Paris.

2644. En attendant la convention d'une mesure universelle, je m'en tiendrai à la toise de l'académie des sciences, qui est celle du grand Châtelet de Paris; cette toise est, de toutes les mesures que l'on connoît, celle qui a été la mieux conservée, la plus examinée, la plus employée dans de grandes et importantes opérations; et j'y rapporterai toutes les autres : c'est ce qu'ont fait déja M. Cristiani (*Delle misure d'ogni genere*, *in Brescia*, 1760), et M. Paucton (*Métrologie,* Paris, 1780).

Malgré les soins qu'on a pris pour conserver exactement la longueur de notre toise, il s'y est glissé de petites variations qui étoient presque inévitables, mais que je vais expliquer avec assez de soin

(a) J'ai fait, en 1789, un Mémoire pour demander que les états-généraux établissent au moins dans le royaume une mesure uniforme; car on y trouve des variétés telles qu'on ne peut s'y reconnoître, et qu'il en résulte des infidélités continuelles dans le commerce.

pour qu'il n'en puisse résulter aucune incertitude. En 1668, l'ancienne toise des maçons fut réformée et accourcie de cinq lignes (*Mém. de l'acad.* depuis 1666, *Tom. VI*, *pag.* 536; Auzout, *Divers ouvrages*, *etc.*, *pag.* 368; Picard, *ibid.*; La Hire, *Mém.* 1714); c'étoit la toise de Charlemagne ou d'un empereur Charles, à en juger par celle du cabinet de l'électeur palatin (Freret, *Tom.* 24, *pag.* 491). L'on eut soin pour lors de placer au pied de l'escalier du grand Châtelet de Paris, un *étalon*, ou espece de compas d'épaisseur, c'est-à-dire une barre de fer terminée par deux éminences, deux redents ou talons, qui sont perpendiculaires à la barre, et entre lesquels une toise devoit entrer exactement : on avoit déja compris que c'étoit la meilleure maniere d'avoir une égalité parfaite entre les différentes toises qu'on présenteroit à cet étalon; et c'est encore ainsi que l'on s'y prend pour rendre égales toutes les toises.

Auzout se servit de cette toise pour y comparer les mesures étrangeres qu'il avoit prises sur les originaux dans ses différens voyages (*ibid.* tom. VI, *pag.* 537). Picard, dans sa mesure de la Terre, publiée en 1671, nous avertit que la toise dont il s'est servi dans ses opérations, et qu'il a choisie comme la mesure la plus certaine et la plus usitée en France, est celle du grand Châtelet de Paris, suivant l'original qui en a été nouvellement rétabli; mais, ajoute-t-il, de peur qu'il n'arrive à notre toise comme à toutes les mesures anciennes, dont il ne reste plus que le nom, nous l'attacherons à un original tiré de la nature; et il parle à ce sujet de la longueur du pendule qu'il avoit trouvée de 36 pouces 8 lig. $\frac{1}{2}$; en y employant la même toise : enfin il termine cet article en disant : « La longueur de la toise de Paris et celle du pendule à secondes, « telles que nous les avons établies, seront soigneusement con« servées dans le magnifique Observatoire que sa majesté fait « bâtir pour l'avancement de l'astronomie ». Cependant cette toise se perdit; l'étalon du grand Châtelet, abandonné, pour ainsi dire, au public, a été usé et même faussé de maniere que dès l'année 1735, il ne pouvoit plus désigner une mesure fixe et exacte (*Mém.* 1757, *pag.* 354, *Mém.* 1772, *partie* 2, *pag.* 482).

2645. La toise de Picard auroit pu se reconnoître au moyen de la base qu'il avoit mesurée entre Villejuif et Juvisy (2655); mais cette base n'étoit plus reconnoissable, parceque l'une de ses extrémités étoit douteuse (*Méridienne de Paris*, 1744, *pag.* 37). Il est vrai que la longueur du pendule à secondes devoit suffire : Picard l'avoit trouvée de 36 pouces 8 lig. $\frac{1}{2}$; mais il avoit pu se glisser dans cette mesure une erreur d'une millieme partie : on n'avoit pas

pour lors en vue cette extrême précision ; et il paroît aujourd'hui que la toise dont se servit Picard étoit plus petite que la nôtre d'environ un millieme, puisque celle-ci a fait trouver la distance qu'il y a de Brie-Comte-Robert à Montlhéry, plus petite de 13 ½ toises sur 13000, que suivant Picard (2659). M. le Gentil me dit, en 1756, qu'il avoit vu une toise de Cassini, qui étoit un peu plus longue que l'étalon du Châtelet. Celui de Canivet, qui lui venoit de Langlois son oncle, ingénieur pour les instrumens de l'académie, étoit aussi un peu plus grand que la toise du Pérou, d'environ $\frac{1}{15}$ ou $\frac{1}{20}$ de ligne ; peut-être qu'il avoit été usé par le frottement qu'exigeoit entre les mains de l'artiste l'usage continuel d'un pareil instrument. La Caille avoit une toise de Langlois, dont il s'étoit servi au Cap (*Mém.* 1751, *pag.* 433) : elle s'étoit perdue en 1756, lorsqu'il l'apporta dans les salles de l'académie pour la comparer avec les autres toises ; mais elle est parvenue entre les mains de M. le Gentil. (*Voyages aux Indes* I, 448, II, 332).

2646. Lorsqu'il fut question d'un voyage en Amérique pour la mesure du degré au Pérou (2678), la Condamine fit faire avec grand soin deux toises de fer par Langlois (*Mém. acad.* 1747, *pag.* 499, 1772, *pag.* 487 ; Godin alla en vérifier une sur l'étalon du Châtelet de Paris (*Mesure des* 3 *degrés*, *pag.* 75 *et* 76), du moins autant qu'on le pouvoit faire sur un modele défiguré par une usure de 65 ans : la Condamine vit ces deux toises chez Langlois, présentées au même étalon ; elles furent comparées aussi dans l'académie ; on y appliqua, à l'aide d'une loupe, un compas à verge, garni de deux pointes ; méthode à la vérité où il pourroit bien se glisser $\frac{1}{25}$ de ligne d'erreur : elles furent aussi ajustées l'une contre l'autre sur une table, et les deux faces de chaque extrémité, soit au tact, soit à la loupe, parurent d'une exacte continuité.

Mairan avoit fait faire quelques mois auparavant, par Langlois, une toise pour servir à ses expériences du pendule simple : C'est une regle, dit-il, *toute pareille à celle qui a été emportée au Pérou*, (*Mém. acad.* 1735, *pag.* 157). Camus et Bouguer assurerent, le 23 juin 175, à l'académie, le premier comme l'ayant vu, et le second comme l'ayant oui dire cent fois par Godin, que la toise portée au Pérou, et celle qui servit sous le cercle polaire, avoient été exactement comparées à celle de Mairan, après avoir été faites toutes ensemble par Langlois, de même qu'une autre qui fut envoyée à Londres. Cependant la Condamine ne s'est point rappellé d'avoir vu comparer la toise de Mairan avec celle du Pérou dans l'académie en 1735, ni même d'avoir oui dire à Godin qu'il les eût confrontées ;

confrontées ; mais il se rappelloit très bien que celle du Pérou avoit été comparée à celle qui devoit rester à Paris, et qui fut portée dans le nord.

En effet, Maupertuis ayant eu besoin de celle-ci quelque temps après pour le voyage au cercle polaire, s'en servit, quoiqu'elle eût été destinée à servir de dépôt. Il ne restoit à Paris que celle de Mairan, que l'on supposoit exactement conforme aux deux autres, comme ayant été faite par le même artiste, avec le même soin.

2648. Cependant quand au bout de 20 ans l'on a réuni et comparé ces trois toises en 1756, il s'est trouvé que la toise de l'équateur ou du Pérou étoit de $\frac{1}{20}$ ou $\frac{1}{30}$ de ligne plus longue que celle du nord, et celle de Mairan plus courte de $\frac{1}{15}$ de ligne que celle du Pérou, en sorte qu'il y a environ $\frac{8}{75}$, ou plus d'un dixieme de ligne de différence sur 864 lignes, entre la toise de Mairan et celle du Pérou. Par d'autres expériences, j'ai trouvé $\frac{1}{[illegible]}$ de ligne, pour la différence entre les deux dernieres toises ; ce qui ne feroit, après tout, que cinq toises de différence sur la longueur du degré ; et nous ne pouvons guere espérer une plus grande précision.

La méthode dont je me suis servi, pour trouver cette différence, consiste tout simplement à placer la plus petite toise dans l'étalon de la plus grande, et cela de travers, pour quelle y entre juste. Elle y entre de deux lignes plus d'un côté que de l'autre, ce qui fait un angle de 43′ 46″, dont le sinus verse est $\frac{1}{14}$ de ligne. Une ligne de différence dans la mesure de cet enfoncement ne fait guere plus d'un centieme de ligne sur la longueur.

Pour expliquer cette différence des toises, on observe que le vaisseau sur lequel étoit la toise du cercle polaire, ou du nord, fit naufrage dans le golfe de Bothnie au retour du voyage ; la toise dut être rouillée, et l'on a lieu de croire qu'en la nettoyant on a pu la diminuer de quelque chose : cependant Camus soutint dans l'académie, le 3 juillet 1756, que cette toise n'avoit souffert aucune altération ; mais il convint que l'étalon avoit été mis au feu, que la toise n'y entroit plus, et qu'on avoit limé l'étalon, le 28 juin 1756, pour y faire entrer la toise avant de s'en servir pour la mesure du 1 juillet 1756 ; il y a donc toujours quelque lieu de croire que cette toise du nord a pu être égale dans le principe à celle du Pérou ; mais la toise de Mairan, que je possede actuellement, a été conservée avec tout le soin imaginable ; elle n'a certainement pas été diminuée : il faut donc que, dans le principe, elle n'ait pas été rigoureusement égale aux autres. Il n'y a pas apparence que la cha-

leur de la zone torride, ni les secousses des voyages, aient rendu la toise du Pérou plus longue qu'elle n'étoit dans le principe; elle a toujours été dans un étui très solide, et les chaleurs à Quito ne sont point excessives. La Condamine ayant su à son retour d'Amérique, en 1745, que la toise qu'il avoit laissée en dépôt à Paris avoit été portée au cercle polaire, et qu'elle avoit pu être altérée dans le voyage, engagea le comte de Maurepas à faire demander celle du Pérou à Godin; Joseph de Jussieu la renvoya sur le vaisseau le Condé, en 1748, dans son étui de bois, doublé de serge; elle a resté plusieurs années en dépôt au jardin du Roi; la Condamine l'a retirée ensuite, et elle a été déposée à l'académie le 8 août 1770; elle paroît dans toute son intégrité, et les vives arêtes n'en sont point altérées.

La coupe des entailles qui déterminent la longueur de la toise de l'équateur, n'est pas exactement perpendiculaire à la longueur de la regle; ces entailles rentrent un peu dans le fond où elles formeroient une toise plus courte : mais c'est leur partie extérieure qu'on a choisie pour la véritable longueur de la toise; on a fait tous les étalons de maniere que le commencement de ces arêtes y entre à frottement, mais sans aucune violence. Il y a sur l'excédent de cette toise deux points dont on s'est toujours servi pour les opérations de l'équateur; mais ils sont exactement à la même distance. On peut voir l'histoire de cette toise faite par la Condamine, dans les *Mém. de l'acad.* pour 1772, *Part. II, pag.* 482.

2649. En vertu d'une déclaration du roi, du 16 mai 1766, rendue par les soins de M. Trudaine, M. Tillet, de l'académie des sciences, fit construire environ 80 toises semblables à celle de l'équateur; elles ont été envoyées, de même que l'aune de Paris et le poids de marc ou la livre de Paris, aux procureurs-généraux des parlemens, en sorte que, dans les principales villes du royaume, cette mesure existe dans toute son exactitude; on l'a déposée au greffe du Châtelet; on l'a envoyée également en Guiane, en Corse, à Vienne, où le P. Liesganig l'a employée à ses mesures du degré dans la Hongrie et l'Autriche; le P. Beccaria s'en est servi pour son degré du Piémont. M. Maskelyne y a rapporté la mesure faite dans l'Amérique angloise, d'après des modeles que je lui avois envoyés.

Cette toise de l'équateur est sur-tout consacrée par la mesure des trois premiers degrés du méridien (2683) et de la longueur du pendule en divers pays (2712) : l'original a été déposé à l'académie,

et copié plus de cent fois; ainsi c'est celle qui doit servir de regle, et j'y rapporterai toutes les autres mesures. Pour cela, il faut ôter 5 toises du degré d'Italie, qui fut réglé sur la toise de Mairan; il faudroit ôter 3 toises de celui du cercle polaire, si l'on supposoit que la toise qu'on y porta, ait différé de $\frac{1}{25}$ de ligne de celle de l'équateur, dans le temps de la mesure faite au nord, ce qui est douteux; mais il faut ôter 0 li,05 de la mesure du pendule faite par Mairan, qui se réduit à 440 lig. 52 (2712), et 3 toises du degré conclu, en 1756, de la mesure de la base de Villejuive (2660): la toise de la Caille s'est trouvée trop longue de $\frac{1}{20}$ de ligne (2645); ainsi il faut ajouter 3 toises à son degré.

La Condamine, dans son voyage d'Italie, déposa des modeles de notre toise à Rome et à Florence (*Mém. acad.* 1757, *pag.* 352), mais ils sont aussi conformes à la toise de Mairan, de même qu'une autre toise envoyée en Espagne; ainsi ils sont trop courts de $\frac{1}{11}$ de ligne.

Cette diversité et cette incertitude dans nos mesures ne paroîtra pas surprenante à ceux qui connoîtront la difficulté de s'assurer de si petites quantités; on a éprouvé les mêmes incertitudes en Angleterre, où les différens modeles de mesures qui sont à l'Échiquier, à Guild-Hall, à Founders-Hall et à la Tour, ne sont pas d'accord, comme le remarque Graham (*Philos. trans.* 1743, n°. 470; *Abr. IX*, 492).

La regle déposée à la société royale differe un peu de celle dont Bird se servoit, et plus encore de celle qui est à la Tour, et que Graham avoit comparée avec notre toise (*Mém. de l'acad.* 1738, *pag.* 135; *Philos. trans.* 1742, 1768). M. Roy s'est servi, pour ses grands triangles, d'une regle de 42 pouces que Bird avoit faite pour Sisson, et qui fut achetée par Short: M. Roy l'a acquise à l'inventaire de celui-ci; elle est conforme à celle de la société royale, comme M. Ramsden s'en est assuré avec un compas qui donne la précision d'un dix-millieme de pouce (*Philos. trans.* 1785). A l'égard des autres pays, je n'en ai trouvé aucun où l'on ait pris, pour constater les mesures nationales, des précautions même approchantes des nôtres.

2650. Quoique la toise de Paris, dont nous venons de parler, soit une mesure connue aujourd'hui de tous les savans, il ne sera pas inutile d'y rapporter encore les principales mesures de l'Europe, dans la table suivante.

Table des principales Mesures de l'Europe, anciennes et modernes, réduites en toises, pieds, pouces, lignes et décimales de ligne, mesure de l'académie royale des sciences et du grand Châtelet de Paris. La toise contient 6 pieds, le pied 12 pouces, et le pouce 12 lignes.

	toi.	
Le Mille Romain cité dans Pline.	757,5	
Le mille Rom. de Strab. suivant Cassini (*Mém. acad.* 1702).	766	
Le mille moderne de Rome, suivant le P. Boscovich	764	
Le mille d'Italie, de 60 au degré.	958	
Le mille d'Angleterre.	830	
Le Li des Chinois de 1800 tche (*M. Pingré, Descrip. de Pékin*).	295	
Le Verst de Russie; M. d'Anville, *pag.* 124.	547	
Le Stade des anciens Romains, de 625 pieds Romains.	94,693	
Le stade Egyptien, suiv. Freret et M. le Roy, (*Ruines des Monumens de la Grece*).	114,13	
	pou.	**lig.**
Le Pied des anciens Romains (*Mém. acad.* 1757. *Acad. des inscr. T.* 24).	10	10,90
Le pied Romain de Vespasien, auquel Riccioli a rapporté toutes les mesures.	11	1,105
Le pied Grec pris au Capitole, suivant Auzout.	11	3,80
Le pied Grec, suivant M. le Roy.	11	4,56
Le pied Arabe (*Anciens Mém. de l'acad. Tom. VI, pag.* 532).	9	10,72
Le pied d'Alexandrie, *Ibid.*	13	2,9
La coudée des Hébreux, selon Eisenschmid.	19	10,40
Le pied d'Angleterre (*Philos. trans.* 1768, *pag.* 326).	11	3,1154
Le Fathom est à la toise comme 1000 est à 1065,75, suivant M. Roy (*Ph. tr.* 1787).		
Le pied du Rhin, de Leyde et de Danemarck, suivant Lulofs.	11	7,183
Le pied de Bologne, suivant Auzout, la 10e partie de la perche.	14	0,60
Le pied de Turin, suivant le P. Beccaria. *Gradus taurin.*, *pag.* 161.	18	11,70
Le *Braccio da panno* de Florence, suivant le P. Ximenez.	21	6,454
Le pied de Venise, suivant M. Cristiani (*Delle misure*).	12	10,0
Le pied de Padoue, suivant M. Cristiani.	15	9,9
Le pied de Vienne, en Autriche, suivant le P. Hell.	11	8,117
La Vare de Castille (*Mém. acad.* 1747).	30	11,0
Le Palme Romain moderne, suivant le P. Boscovich.	8	3,033
Le palme de Naples, suivant Auzout.	9	8,15
Le pied de Suede (*Mém. acad.* 1714).	10	11,75
L'Archine de Russie, suivant les Manuscrits de de l'Isle	26	6,30
Le pied royal de la Chine, *Ing-cao-chi*, ou *Ing-ts'ao-tchi* (*Observat. astronomicæ Pekini factæ, Tom. I, pag.* 363).	11	9,9

Voyez le traité des mesures itinéraires anciennes et modernes, par D'ANVILLE 1769, *in*-8°. CRISTIANI, *delle misure d'ogni genere* 1760. *Tables of ancient coins, weight and measures*, ARBUTHNOT, 1727 et 1754; et la *Métrologie* par M. Paucton, 1780, *in*-4°. Cet ouvrage, dont j'avois donné l'idée et fourni les premiers matériaux, est le plus complet qu'il y ait sur les mesures, poids et monnoies de tous

les pays et de tous les temps. On trouve dans ces divers ouvrages un grand nombre d'autres mesures rapportées à la nôtre ou à celle d'Angleterre : le P. Riccioli, *Geographia reformata*, en donne aussi une table, où il les compare avec le pied romain de Vespasien.

2651. Enfin pour donner aux étrangers quelque idée de notre toise, j'observerai que des 72 pouces, ou 864 lignes que la toise contient, la planche XXXII de ce livre a 7 pouces 5 lig. $\frac{1}{3}$ de hauteur dans le carré qui en a fait la bordure, pris à droite, et 5 pouces 8 lig. $\frac{1}{2}$ de largeur en bas ; la planche XXXIII a 7 pouces 4 lig. $\frac{7}{15}$ de longueur, et 5 pouces 8 lig. de largeur; en bas ; la planche XXXIII a 7 pou. 6 lig. $\frac{5}{6}$ de hauteur, et 5 pou. 9 lig. $\frac{1}{2}$ de largeur; la planche XXXIV, 7 pouces 4 lig. $\frac{5}{12}$ de longueur, et 5 pouces 8 lig. de largeur. Je suppose dans ces mesures un livre dont le papier a été mouillé, tiré et battu, c'est-à-dire, imprimé et relié à l'ordinaire ; mais on ne peut compter sur ces indications qu'à une demi-ligne près, à cause des inconvéniens du papier (2091). La longueur qui est dans le livre de M. Cristiani pour représenter un demi-pied, est trop grande d'un tiers de ligne. Riccioli, voulant donner un modele du demi-pied, (*Géog. ref. pag.* 33), prit le parti de le faire imprimer sur la feuille, après qu'elle étoit séchée.

2652. Lorsqu'on mesure une distance ou une base sur terre entre deux objets éloignés et invariables, on se sert d'une toise, qui est ordinairement de fer ; et comme cette toise est sujette à se dilater par la chaleur, on trouve dans la même distance mesurée sur la terre, un plus grand nombre de toises, lorsqu'il fait froid : il est donc essentiel, quand on rapporte une semblable opération, de dire à quel degré de chaleur on l'a faite, pour faire connoître quelle devoit être alors la longueur de la toise qu'on a prise pour mesure.

La Condamine (*pag.* 78) a trouvé qu'une toise de fer s'alonge d'environ $\frac{1}{87}$ de ligne pour chaque degré du thermometre de Réaumur, ou plus exactement de 0^{l}, 0117 ; ou bien 0^{t}, 00001354, c'est-à-dire, environ 1 $\frac{1}{3}$ toise sur cent mille. Boscovich se sert de ces expériences de la Condamine, (*Voyage astron. pag.* 349) ; il y a aussi des expériences de la Hire citées par Newton, tom. 3, pag. 113, de l'édition de Geneve 1742, d'autres de Mairan, *Mém.* 1735, de Smeaton, philos. Trans. 1754 ; de M. de Luc, philos. Trans. 1777, de M. Berthoud, Essai sur l'horlogerie 1763, tom. 2, pag. 113. M. Lavoisier en a fait de très exactes en 1782, mais elles ne sont pas encore publiques. Enfin M. Roy et M. Ramsden en ont donné de nouvelles dans les Transactions philosophiques de 1785.

Suivant les expériences de M. Berthoud, faites dans une étuve où le thermometre étoit monté de zéro à 27° sur des verges de 3 pieds 2 pouces 5 lignes, de 5 lignes de large, et de 3 lignes d'épaisseur, le cuivre jaune s'est allongé de $\frac{121}{360}$ de ligne; le cuivre rouge de $\frac{107}{360}$, le fer battu à froid de $\frac{78}{360}$, l'acier trempé et revenu bleu de $\frac{77}{360}$, le fer battu à froid et recuit de $\frac{75}{360}$, l'acier trempé et ensuite recuit $\frac{69}{360}$ (*Essai sur l'horlogerie*, 1763, *Tom. II, pag.* 113).

2653. Suivant M. Smeaton, Phil. Tr. 1754, la différence entre une regle de cuivre et une de fer change de $\frac{1}{7350}$, du total pour chaque degré du thermometre françois (*Phil. Tr.* 1768, *pag.* 325). Les expériences faites en 1784, avec le pyrometre de Ramsden, s'accordent fort bien avec celles de Smeaton, (*Phil. Tr.* 1785, *pag.* 461, 480). Voici les dilatations pour un degré du thermometre de Fahrenheit, et un pied de longueur, le pouce étant divisé en dix millions.

L'échelle de cuivre de Hambourg, de 42 pouces, qui a servi d'étalon,	0,0001237
Perches de cuivre d'Angleterre, de 5 pieds,	1262
Des regles d'acier de 5 pieds d'un demi-pouce de large, et trois dixiemes d'épaisseur,	763
Des prismes de fer fondu, de 5 pieds 1 ¼ pou. de côté,	740
Des tubes de verre,	517
Des perches de verre plein,	539

La dilatation étant connue, il est facile de réduire toutes les mesures à un même degré de chaleur; on a choisi la température moyenne, qui est de 10° sur notre thermometre, 54 ½ de Fahrenheit, 132 suivant de l'Isle (127). Si l'on a mesuré un degré par un temps plus chaud, il faudra ajouter une toise à la mesure, pour chaque degré du thermometre au-dessus de 10, ou plus exactement 0,97 : ce seroit seulement 0,77 suivant la Condamine.

2654. La premiere mesure qu'on ait faite avec précision pour connoître la grandeur de la terre, celle qui a été répétée et constatée avec plus de soin, est la mesure du degré entre Paris et Amiens; je prendrai cette mesure pour exemple, en expliquant la méthode qui a fait trouver avec une extrême précision la grandeur et la figure de la Terre. Cassini venoit d'arriver en France; et ce fut par son conseil qu'on recommença ce travail, avec de grands instrumens.

L'objet que se proposa Picard en 1669 fut de connoître le nombre de toises qu'il y avoit en ligne droite entre Paris et Amiens, et combien de minutes et de secondes il y avoit pour la différence des latitudes, sur la circonférence du méridien. Ainsi il y a deux

opérations principales dans ce travail ; mesure géodésique en toises, mesure astronomique en minutes et secondes de degrés.

2655. A l'égard de la mesure géodésique, il seroit long et difficile de mesurer toise à toise, d'un bout à l'autre, un espace de 25 lieues, quoique cela se soit fait en Amérique (*Phil. Trans.* 1768). Picard préféra d'employer la trigonométrie, et se contenta de mesurer avec soin un espace de 5663 toises de long sur le chemin de Villejuive à Juvisy, qui étoit déja pavé en droite ligne, et d'en conclure tout le reste par des triangles. Depuis ce temps-là on a élevé à Villejuive et à Juvisy deux pyramides, qui sont exactement à 5716 toises l'une de l'autre, suivant la mesure que nous avons faite en 1756 (2659) [a].

On voit dans la *fig.* 217 la disposition des premiers triangles de Picard ; la distance de Villejuive à Juvisy ayant été mesurée, il se transporta aux deux extrémités de cette base pour mesurer les angles d'un triangle dont le sommet étoit le clocher de Brie-Comte-Robert. Etant placé à Juvisy avec un quart-de-cercle de 3 pieds de rayon, qui portoit deux lunettes, l'une fixe et l'autre mobile (FIG. 169), il dirigea l'une sur le moulin de Villejuive, où commençoit sa mesure, et l'autre sur le clocher de Brie ; l'angle formé par les deux lunettes (2583) se trouva de 95° 4′ 55″. Il se transporta pareillement à Villejuive, et là pointant une des lunettes sur le pavillon de Juvisy, qui avoit servi de terme à sa base, et l'autre sur le clocher de Brie, il trouva l'angle de 54° 4′ 35″ ; de ces deux angles avec le côté compris, il étoit aisé de conclure par le calcul la distance de Villejuive à Brie 11012 toises 5 pieds ; pour vérifier l'observation, il ne négligea pas de mesurer encore immédiatement le troisieme angle.

Nous avons parlé ci-dessus (2583 et suiv.) des attentions qu'exigent ces mesures ; et l'on peut consulter les divers ouvrages que nous avons cités, sur la maniere de faire les réductions qu'exigent ces triangles, de les orienter, d'en estimer les erreurs, et d'en conclure la longueur d'une méridienne. On peut voir à ce sujet M. le Gendre (*Mém. acad.* 1787).

(a) On peut voir le détail des précautions que l'on doit prendre pour la mesure exacte d'une base dans les ouvrages cités (2381), et sur-tout dans les *Trans. philos.* 1785, *pag.* 385, par M. le général Roy et M. d'Alby ; on y voit une base de 4286 toises, mesurée avec des tubes de verre de 20 pieds, avec une précision dont il n'y avoit jamais eu d'exemple. M. de Prony en a donné la traduction en 1787 ; *Description des moyens employés pour mesurer la base*, etc. En 1788 on n'a pas trouvé 3 pouces d'erreur dans la seconde base, conclue de la premiere par les triangles intermédiaires.

2656. La distance trouvée par la résolution du premier triangle servit de base au triangle suivant, dont le sommet étoit la fameuse tour de Montlhéry : ayant donc mesuré de même les angles de ce second triangle, 77° 25′ 50″ à Villejuive, et 47° 34′ à Brie, il fut en état de conclure la distance de Brie à Montlhéry 13121 $\frac{1}{4}$ toises ; c'est celle que nous trouvons actuellement de 13108 toises. Le troisieme et le quatrieme triangle furent formés sur cette base, et se terminoient vers le midi au haut du pavillon de Malvoisine, et vers le nord au haut de la tour de Montjay, d'où Picard tira les distances de Montlhéry à Malvoisine 8870 $\frac{1}{2}$ toises, et de Montlhéry à Montjay 21658. Le cinquieme triangle formé sur cette derniere base finissoit au haut du tertre de Mareuil. Par cette suite de triangles, Picard détermina la distance de Malvoisine à Mareuil 31897 toises ; il vérifia aussi cette même distance, en mesurant les trois angles ou triangle formé entre Malvoisine, Montlhéry et Mareuil, (*Mesure de la Terre par M. Picard, in*-8°, *pag.* 36).

2657. A l'occasion de ce grand triangle qui avoit 15 lieues de long, Picard fut obligé plusieurs fois de faire éclairer des feux à Mareuil, à Montlhéry et à Malvoisine, pour servir de signaux ; un feu large de trois pieds, fait à Mareuil, et vu de Malvoisine, paroissoit à la vue simple comme une étoile de la troisieme grandeur ; il n'étoit vu réellement que sous un angle de 3″ $\frac{1}{4}$, cependant, même avec la lunette, il faisoit l'effet d'un objet qui auroit eu 8″ de diametre ; cela prouve que les corps lumineux paroissent un peu plus grands qu'ils ne sont réellement (2787), et que les feux sont très propres à servir de signaux pour les opérations géométriques à de grandes distances.

2658. Enfin, par 13 triangles, Picard trouva 68430 $\frac{1}{2}$ toises de distance entre Malvoisine et Sourdon, et 1° 11′ 57″ de différence en latitude, par le moyen d'un secteur de dix pieds (2380) ; ce qui donne 57064 $\frac{1}{2}$ toises pour le degré dont le milieu passoit à 49° 7′ de latitude. Par le moyen de l'étoile polaire observée dans sa plus grande digression à Mareuil, il avoit trouvé l'angle que faisoient deux des côtés de ses triangles avec la méridienne [a] ; et en abaissant des perpendiculaires sur cette méridienne, il déterminoit les portions comprises entre ses stations. Il trouva aussi le clocher d'Amiens plus septentrional de 78907 toises que le pavillon de Malvoisine, ce qui se réduisoit à 78850 entre les deux points où il avoit fait ses observations ; et comme la différence de latitude

(a) Il pouvoit également le faire par les amplitudes du Soleil levant (1046). La Condamine, *pag.* 63.

étoit

étoit de 1° 22′ 55″, il en conclut que 57057 toises devoient faire précisément un degré de changement en latitude. En combinant un autre résultat, il s'en tint à 57060 toises : on n'a trouvé que 9 toises de plus, en répétant ces mesures avec de meilleurs instrumens et des précautions encore plus grandes ; mais c'est parcequ'il y avoit une différence dans l'arc céleste et une dans les toises, et qu'elles se sont compensées (*Méridienne de l'Observatoire royal de Paris vérifiée*, etc. 1744, *pag.* 50).

2659. La distance de Montlhéry à Brie-Comte-Robert, que Picard avoit trouvée de 13121 toises, n'a été trouvée que de 13108 toises, par la vérification que l'académie en a faite en 1756, en sorte que toutes les distances de Picard étoient trop grandes, et cela d'environ une toise sur mille ; soit que notre toise actuelle soit un peu plus grande que la sienne, soit qu'il n'eût pas mesuré avec assez de soin la base de Villejuive à Juvisy, qui est le fondement de toutes les autres distances (La Condamine, *pag.* 249). Dans la derniere mesure faite en 1756, on s'est servi du moulin de Fontenai pour le premier triangle formé sur la base de Villejuive.

2660. La distance des centres des deux pyramides construites à Villejuive et à Juvisy, est de 5716 toises et demie en employant la toise qui avoit servi au Perou, et supposant le thermometre à 11 ou à 12°, c'est-à-dire un peu au-dessus de la température des caves profondes, et prenant un milieu entre les deux dernieres mesures [a]. Jamais distance n'a été mesurée tant de fois : elle l'avoit été, en 1740, cinq fois de suite, par Cassini et la Caille (*Mérid. vérif.* pag. 35) ; elle le fut encore deux fois, en 1756, par neuf autres académiciens (*Mém. acad.* 1754 ; M. le Monnier, *Premieres Observations faites par ordre du roi, pour connoître la distance entre Paris et Amiens*, à l'Imprimerie royale, 1757). La derniere mesure à laquelle je coopérai, donne, pour la distance de Montlhéry à Brie-Comte-Robert, 13108 toises ; ce qui ne differe pas de deux pieds de la distance trouvée en 1740, par Cassini et la Caille.

C'est cette base qui a servi à trouver la longueur de la partie

(a) M. le Monnier fit bâtir la pyramide de Juvisy en 1756 ; il y a mis, en 1788, une inscription, où la distance est marquée 5716 toises 5 pieds. Il avoit trouvé 5715 toises 4 pieds 9 pouces, avec MM. Godin, Clairaut et la Caille, le 1 juillet à 20° du thermometre ; nous trouvâmes, pour 11 à 12° du thermometre, $5716^{t}\ 5^{pi}\ 10^{po}$; le 31 août, MM. Bouguer, Camus, de Thuri et moi, le tout avec la toise qui avoit servi au cercle polaire. En réduisant tout à la même température et à la toise du Pérou, et prenant un milieu, je trouve $5716^{t}\ 3^{pi}\ 2^{po}$; ce seroit $4^{pi}\ 3^{po}$ en préférant la derniere mesure.

du méridien terrestre, compris entre la face méridionale de l'Observatoire de Paris, et la fleche de la cathédrale d'Amiens, 60390 toises (*Ibid. pag.* 46, 48 *et* 50).

2661. En observant avec soin la distance au zénit, des mêmes étoiles, à Paris et à Amiens avec un secteur semblable à celui que j'ai décrit (2380), on a trouvé 1° 1′ 13″ 1 de différence dans toutes les hauteurs entre deux points dont la distance conclue de la précédente étoit 58233 toises (*Degré du mérid. entre Paris et Amiens, par M. de Maupertuis, in-*8°, 1740; *Mérid. vérif. pag.* 50); il ne reste donc plus qu'à faire la proportion suivante : 1° 1′ 13″ 1 est à 58233 toises, comme 1° 0′ 0″ est à un quatrieme terme qu'on trouve de 57074 toises; c'est la longueur du degré de la Terre entre Paris et Amiens, (*Mérid. de Paris, pag.* 50 *et* 112; *Mém. acad.* 1758, *pag.* 243); la latitude moyenne de ce degré est de 49° 23′: cette longueur suppose la toise du nord, et le temps où le thermometre de Réaumur est à 10 ou 12° (2640). Ce degré se réduit à 57069 toises en adoptant la mesure de la base de Villejuive, faite en 1756, avec la toise de l'équateur qui est maintenant adoptée (2649).

2662. La vingt-cinquieme partie de ce degré de France, ou 2283 toises, est la quantité que nous avons coutume de prendre pour la lieue moyenne de France (1394). En multipliant 25 lieues par 360, on a la circonférence entiere de 9000 lieues, en supposant les degrés égaux. De même on trouvera le diametre de 2865 lieues, par le rapport de la circonférence au diametre (3467), ou 2864 en prenant le diametre moyen (2701).

2663. Par les opérations de trigonométrie décrites ci-dessus (2655), on parvient à mesurer une étendue de 60 lieues à 20 toises près, en employant un quart-de-cercle de 3 pieds pour la mesure des angles. La Condamine, après une suite de 32 triangles, qui mesuroient une distance de 80 lieues au Pérou, ne trouva qu'une toise de différence sur le dernier côté conclu des triangles qui précédoient, et mesuré ensuite immédiatement (*Mes. des* 3 *premiers degrés, pag.* 87); cela peut faire juger du degré d'exactitude dont ces mesures sont susceptibles.

2664. Les degrés de longitude, qui se comptent d'Orient en Occident (47), sont égaux aux degrés de latitude, tant que l'on est sous l'équateur, parceque tous les grands cercles d'un globe sont égaux. Mais en approchant des poles, tous les paralleles à l'équateur diminuent, et les degrés de longitude diminuent en même raison. Soit A le pole (FIG. 218), CE le rayon de

l'équateur terrestre, LO le rayon d'un parallele ; la circonférence de ce parallele est plus petite que celle de l'équateur, dans le même rapport que LO est plus petit que CE : ainsi les degrés de longitude sont plus petits étant comptés sur ce parallele. Le rayon LO du parallele et le sinus de l'arc LA, distance au pole, ou le cosinus de l'arc LE, qui est la latitude géographique du lieu L ; ainsi les degrés de longitude sont comme le cosinus des latitudes. Par le moyen de ce rapport, il est aisé de calculer une table des degrés de longitude pour tous les points de la Terre, supposée sphérique. On en trouvera une ci-après calculée même dans le sphéroïde aplati ; elle est utile pour tracer des cartes de géographie.

2665. La différence de niveau, ou le haussement du niveau apparent au-dessus du vrai, est encore un effet de la rondeur ou de la courbure de la Terre. Le niveau apparent pour le point A (fig. 216) est sur une ligne droite AP perpendiculaire au fil-à-plomb AC, ou tangente à la surface de la Terre en A ; mais le vrai niveau est sur le cercle AB. Quand on a observé deux objets dans la lunette horizontale, ou sur la ligne des pinnules d'un niveau, l'objet le plus éloigné P est nécessairement plus élevé par rapport à la surface de la Terre, qui est le vrai niveau ; la différence de niveau BP est égale à la différence du rayon à la sécante de l'arc AB de la Terre compris entre les deux objets ; c'est à-peu-près le sinus verse de l'angle C. Mais si on veut avoir une expression plus exacte, il faut multiplier la tangente de l'arc par celle de sa moitié et par le rayon de la Terre. En effet, la sécante moins le rayon, ou séc. $-1 = \frac{1}{\text{cos.}} - 1 = \frac{1-\text{cos.}}{\text{cos.}} = \frac{\text{sin. verse}}{\text{cos.}} = \frac{\text{sin.}}{\text{cos.}}$ tang. $\frac{1}{2}$ (3848) $=$ tang. tang. $\frac{1}{2}$.

On peut facilement retenir que cette différence est d'*une aune pour une lieue* de distance ou de 44 pouces pour 2000 toises (plus exactement 43 pieds 11 lignes $\frac{1}{4}$) ; mais elle croît comme les carrés des distances ; ainsi pour 1000 toises, elle n'est que de 11 pouces ; pour 4000 toises, elle est de 14 pieds 8 pouces, et pour 5 pieds qui est la hauteur de l'œil, on a 2327 toises. On peut construire une table de cette différence, en disant, le carré de 2000 toises est à 44 pouces, comme le carré d'une autre distance quelconque est au nombre de pouces qui y répondent pour la courbure de la Terre. On trouvera ci-après une table, que l'on pourra continuer ou étendre en ajoutant le log. constant 6,1199608 avec le double

du log. de la distance en toises ; l'on aura en lignes la courbure de la Terre, en la supposant sphérique et le degré de 57069 toises (2661).

2666. C'est par la même considération qu'on trouve en mer l'inclinaison de l'horizon sensible, ou du rayon visuel PA, qui touche la surface de la mer au-dessus de l'horizon rationel, quand on est à une hauteur PB ; car cet angle est égal à l'angle C. Ainsi, la hauteur du niveau apparent étant prise pour l'élévation BP de l'observateur, on convertit en minutes les toises de la distance correspondante, et l'on a l'inclinaison de l'horizon ; il y a cependant une petite différence, qui vient de la réfraction (2252).

Inclin.	Haut.
min.	*pieds.*
3	$8\frac{1}{2}$
6	34
9	77
10	95
12	137
15	214

De la figure de la Terre, et de son aplatissement.

2667. Le degré mesuré par Picard, entre Paris et Amiens, suffisoit pour connoître la grandeur de la Terre entiere, en la supposant sphérique ; mais si la Terre n'est pas ronde, les 360° doivent être différens entre eux (2673), et celui des environs de Paris ne sera plus la 360e partie de la circonférence entiere de la Terre ; ce fut pour s'en assurer que l'académie des sciences de Paris songea, en 1683, à se procurer la mesure de plusieurs degrés sous différentes latitudes, pour voir si ces degrés étoient égaux, comme ils devoient l'être en supposant la Terre sphérique ; nous verrons bientôt ce qui en résulta.

2668. Je ne sais pas à qui l'on dut la premiere conjecture qui donna naissance à toutes ces recherches ; [a] je trouve seulement que Picard, dans l'art. IV de sa Mesure de la Terre, publiée en 1671, parle d'une conjecture *qui avoit déja été proposée dans l'assemblée, que supposé le mouvement de la Terre, les poids devroient descendre avec moins de force sous l'équateur que sous les poles ;* et Picard observe qu'il en résulteroit une différence sur les pendules qui battent les secondes (2710) : il ajoute qu'on a fait à Londres, à Lyon et à Bologne en Italie quelques expériences, d'où il semble qu'on pourroit conclure que les pendules à secondes doivent être plus courts à mesure qu'on avance vers l'équateur, mais qu'on n'est pas suffisamment informé de la justesse de ces expériences pour en conclure quelque chose ; « D'ailleurs, dit-il, on doit remarquer

(a) Les anciens avoient dit que la Terre étoit aplatie, suivant Freret (*Mém. de l'académie des inscr., Tom.* 18, *pag.* 112).

« qu'à la Haye, où la hauteur du pole est plus grande qu'à Londres, « la longueur du pendule exactement déterminée par le moyen des « horloges a été trouvée la même qu'à Paris [a]. »

2669. On ne savoit donc encore rien de positif, en 1671, sur la figure de la Terre et sur la diminution du pendule sous l'équateur: mais la même année Richer fut envoyé à Cayenne (502); et parmi les objets de son voyage nous voyons qu'il étoit chargé par l'académie d'observer la longueur du pendule à secondes. Il partit de Paris par ordre du roi, au mois d'octobre 1671; il arriva à Cayenne le 22 avril 1672. Dans le chapitre X des Observations qu'il fit imprimer à son retour, il donne un article exprès sur la longueur du pendule, et il dit que c'est l'une des plus considérables observations qu'il ait faites. « La même mesure qui avoit été marquée « en Cayenne sur une verge de fer suivant la longueur qui « s'étoit trouvée nécessaire pour faire un pendule à secondes de « temps, ayant été apportée en France, et comparée avec celle « de Paris, leur différence a été trouvée d'une ligne et un quart, « dont celle de Cayenne est moindre que celle de Paris, laquelle « est de 3 pieds 8 lignes $\frac{3}{5}$; cette observation a été réitérée pen- « dant dix mois entiers, où il ne s'est point passé de semaine « qu'elle n'ait été faite plusieurs fois avec beaucoup de soin. Les « vibrations du pendule simple dont on se servoit, étoient fort pe- « tites, elles duroient fort sensibles jusqu'à 52 minutes de temps, « et ont été comparées à celles d'une horloge très excellente, dont « les vibrations marquoient les secondes de temps ». (*Recueil d'Observations faites en plusieurs voyages*, *in-fol.* 1693). D'ailleurs le pendule de l'horloge de Richer, qui battoit les secondes à Paris, retardoit à Cayenne de 2 minutes par jour; ce qui prouvoit que la pesanteur de la lentille étoit moindre à Cayenne, et que la lentille y descendoit vers la Terre avec moins de vîtesse (*Regiae scient. academiae historia*, L. 1, Sect. 9, c. 3). On en verra la table ci-après (2710).

2670. Telle fut la premiere expérience qui prouva, par le moyen du pendule, que la Terre tournoit sur son axe; Huygens soupçonna dès lors qu'en vertu de la force centrifuge, qui rendoit la pesanteur des corps sous l'équateur moindre qu'à Paris (3545), il pouvoit très bien se faire que les parties de la Terre y fussent aussi plus relevées et plus éloignées du centre; ce qui devoit donner à la Terre la figure d'un sphéroïde aplati vers les poles. Cassini avoit

(a) On auroit dû trouver un huitieme de ligne de plus à la Haye, et l'on pouvoit bien alors se tromper de cette petite quantité.

déja observé l'aplatissement de Jupiter, même avant l'année 1666 ; c'étoit une grande raison de croire aussi la Terre aplatie, comme il le dit lui-même (*Mém.* 1701 , *pag.* 180).

2671. Voyons donc la maniere dont les astronomes pouvoient s'assurer de cet aplatissement, en mesurant les degrés de la Terre sous différentes latitudes. Si la Terre n'est pas ronde, la mesure de ses degrés doit se faire autrement que sur le globe. Soit EPQO (FIG. 218) la circonférence aplatie de la Terre, EDFQ celle d'un cercle circonscrit, et qui a le même diametre ECQ ; ayant pris un arc DF de ce cercle, qui soit $\frac{1}{360}$ de la circonférence entiere, c'est-à-dire un degré, l'angle DCF sera aussi d'un degré ; mais l'arc GH de la Terre aplatie n'est point ce qu'on doit appeller un degré de la Terre, quoiqu'il soit compris entre les lignes DGC et FHC, qui font un angle d'un degré au centre de la Terre.

2672. Je supposerai d'abord comme un principe d'hydrostatique démontré par l'expérience et par le raisonnement, que la pesanteur agit toujours perpendiculairement à la surface de la Terre, quelle que soit sa figure. Les niveaux à bulle d'air, les niveaux d'eau, les niveaux formés par un fil-à-plomb, donnent toujours le même résultat dans les nivellemens ; cela prouve que le fil-à-plomb est exactement perpendiculaire à la surface de l'eau, qui marque la surface de la Terre, et qui prend nécessairement la figure que la gravité donne à la Terre (Bouguer, *Mém. acad.* 1734 ; *Figure de la Terre*, p. 353).

Le fil-à-plomb qui, dans nos instrumens, marque la ligne du zénit, et auquel nous rapportons les hauteurs des astres, est donc perpendiculaire à la surface de la Terre ; et si un observateur en P (FIG. 219), par exemple, à Paris, voit une étoile, comme la Claire de Persée, passer au méridien précisément au zénit, il la verra sur la ligne BPZ, qui est perpendiculaire à la surface de la Terre, et qui ne va point se diriger au centre C, à moins que la Terre ne soit parfaitement sphérique. Un autre observateur situé en A, par exemple, à Amiens, voit la même étoile sur un rayon AS, qui est parallele à PZ à cause de la grande distance (2807) ; cette étoile paroît éloignée de la verticale XAB d'un angle SAX. Si avec les instrumens exacts qu'on emploie à ces observations (2380), on trouve que la Claire de Persée passe à un degré du zénit d'Amiens, il s'ensuit que l'angle SAX est d'un degré ; ainsi l'angle PBA qui est égal à SAX sera aussi d'un degré ; dans ce cas-là, nous dirons que l'arc AP de la Terre, compris entre Paris et Amiens, est un degré de la Terre, d'où résulte la définition suivante.

2673. Le degré *du sphéroïde terrestre* (quelle que soit la figure) *est l'espace qu'il faut parcourir sur la Terre pour que la ligne verticale ait changé d'un degré.* De là il suit que les degrés que nous mesurons par observation, sont des angles B qui n'ont point leur sommet au centre C de la Terre, mais au point de concours des verticales ZPB et XAB perpendiculaires à la Terre en P et en A, c'est-à-dire aux deux extrémités du degré. Cette maniere de concevoir et de mesurer les degrés nous est donnée par la nature même, à cause du fil-à-plomb qui s'emploie nécessairement dans les observations, et qui seul peut nous faire trouver les distances des étoiles au zénit, et par conséquent les degrés de Terre.

2674. Il suit de cette définition que dans les endroits les plus aplatis de la Terre, les degrés doivent être les plus longs, par une raison bien simple : plus un arc PA (fig. 220) aura de convexité ou de courbure, l'angle F étant toujours supposé d'un degré, plus cet arc PA sera court ; si au lieu de PA nous prenons l'arc PD, plus convexe et plus courbe que PA, DG étant parallele à AF, et l'angle PGD d'un degré, aussi bien que PFA, cet arc PD sera plus court, quoiqu'il ait la même amplitude, c'est-à-dire qu'il soit aussi d'un degré ; sa longueur en toises sera plus petite que celle de PA. Dans une ellipse et dans toutes les courbes analogues, la courbure est la plus grande au sommet du grand axe, et la moindre au sommet du petit axe ; donc si la Terre est aplatie vers les poles, l'arc d'un degré aura plus de longueur, renfermera un plus grand nombre de toises à mesure qu'on approchera des poles, où l'aplatissement est le plus grand : c'est d'après ces principes que nous démontrerons ci-après l'aplatissement de la Terre (2682).

2675. Il suffisoit donc de mesurer l'étendue d'un degré, à différentes distances des poles, pour juger si la Terre étoit ronde : en conséquence l'académie obtint, en 1683, des ordres du roi pour continuer la méridienne de Paris, au nord et au sud, depuis l'Océan jusqu'à la Méditerranée ; Cassini partit pour aller au midi, accompagné de Sedileau, Chazelles, Varin, Deshaies et Pernim ; la Hire alla au nord de Paris avec Potenot et le Fevre. L'ouvrage avançoit lorsqu'il fut suspendu tout à coup par un événement funeste pour les savans.

Colbert, protecteur immortel des talens et des sciences, sous les auspices duquel tous les projets de l'académie s'exécutoient, mourut le 6 septembre 1683, à l'âge de 64 ans et 6 jours, après 22 ans d'un ministere glorieux. Cette perte, que déplorerent tous ceux qui conservoient quelque amour pour les sciences, fut prin-

cipalement ressentie dans l'académie ; les astronomes furent rappellés ; et la guerre qui recommença en 1688, éloigna encore plus le goût des entreprises littéraires.

Eisenschmid en voyant que le degré de Snellius étoit plus petit que celui de Picard, et celui de Riccioli plus grand, en conclut un alongement de la Terre ; on disputoit déja en 1696, dans l'académie, si la Terre étoit aplatie ou allongée vers les poles (*Hist. de l'acad.* par Duhamel, année 1696, Sect. VIII, c. 3, art. 16).

Mais en 1700, le roi donna de nouveaux ordres pour la continuation de la méridienne, et Cassini partit au mois d'août 1700 pour aller du côté du midi, la reprendre où elle avoit été laissée (*Hist. acad.* 1700).

2676. En comparant les mesures faites au nord et au midi de Paris, on crut appercevoir que l'étendue des degrés étoit un peu plus grande vers le midi; ce qui a fait dire pendant quelques années que la Terre pouvoit bien être alongée ; mais il paroît que ce n'étoit pas d'abord l'intention de Cassini et de Fontenelle : ils pensoient que cette augmentation étoit favorable aux hypotheses communes, c'est-à-dire à celles de Newton et de Huygens, et qu'il s'ensuivoit un aplatissement [a] : la théorie de Huygens menoit à cette conséquence ; mais Cassini reconnut bientôt l'erreur (*Mém.* 1713, *pag.* 192). Roubaix, ingénieur, écrivit contre cette opinion, (*Journal Littéraire de l'année* 1717, tom. IX, p. 416, art. 22. *Dissertation sur l'Ovalité de la Terre*). M. Montucla a vu un volume imprimé à la Haye, où cette dissertation étoit insérée.

2677. Au reste, les instrumens de ce temps-là n'avoient pas une précision suffisante pour constater une aussi petite différence que celle des degrés de la France ; car l'augmentation qu'on avoit cru appercevoir de 72 toises, en allant vers le midi (au lieu de 14 toises de diminution), fut réduite à 11 toises (*Mém.* 1713, *pag.* 200) ; et Cassini, à la page 241 de son *Traité de la grandeur et de la figure de la Terre,* qui fait une suite des mémoires de 1718, trouva l'augmentation, d'un degré à l'autre, de 31 toises, le degré entre Paris et Amiens étant de 57021 toises.

(a) *En supposant que cette diminution de la valeur terrestre d'un degré continue toujours de l'équateur vers le pole... que la Terre est un globe aplati vers les poles* (Hist. 1701, pag. 96), *ce qui semble être favorable aux hypotheses modernes que nous venons de rapporter* (Huygens et Newton). *Mém.* 1701, *pag.* 181. Dans l'édition de 1743 on a substitué ces mots : *On voit qu'un méridien est une ellipse, l'équateur demeurant toujours parfaitement circulaire, et que la figure de la Terre est un sphéroïde;* Maupertuis remarque ces différences (*Lettre d'un Horloger Anglois à un astronome de Pékin,* 1740).

Mais

Mais cette différence entre les degrés mesurés dans l'étendue de la France, étoit trop petite, pour que l'on pût constater d'une maniere décisive la figure de la Terre. Il est vrai que la mesure du degré du parallele entre Paris et S.-Malo, faite en 1733, et celle du degré entre Paris et Strasbourg, faite en 1734, semblerent indiquer aussi un sphéroïde alongé ; mais les longitudes de S.-Malo et de Strasbourg ne pouvoient pas se déterminer par les méthodes ordinaires avec une précision assez grande pour donner une détermination certaine de la figure de la Terre : il étoit facile de se tromper sur les longitudes de 30″ de temps ou 7′ ½ de degré ; c'est la quarante-quatrieme partie de 5° 33′ qu'il y a entre Paris et Strasbourg, et cela fait 841 toises d'incertitude, à raison de 37000 toises pour le degré, tandis que Cassini lui-même ne trouve que 680 toises de moins par sa mesure, que par le calcul de la Terre sphérique (*Mém. acad.* 1734).

2678. Au milieu des dissertations que la mesure du parallele de Paris occasionna en 1733 dans les assemblées de l'académie, la Condamine représenta qu'on leveroit la difficulté de la façon la plus sûre, en mesurant un degré aux environs de l'équateur, par exemple à Cayenne, et il offrit de l'entreprendre lui-même. En 1734, Godin lut aussi un mémoire sur les avantages qu'on pourroit tirer d'un voyage à l'équateur, qu'il offroit d'entreprendre avec M. de Fouchy : le comte de Maurepas fit agréer au roi ce voyage, que Godin, la Condamine et Fouchy devoient faire ; mais la santé et les occupations de ce dernier le déterminerent à remettre cette commission à Bouguer, qui étoit alors hydrographe du roi au Havre de Grace ; l'abbé Bignon et Réaumur le presserent de l'accepter, et on lui donna pour cet effet une place de pensionnaire astronome, qui vint à vaquer par la mort de Lieutaud. Les passeports d'Espagne arriverent en 1734, et les trois académiciens partirent au mois de mai 1735, pour aller dans l'Amérique méridionale ; ils choisirent les environs de Quito.

2679. Peu après ce départ, Maupertuis ayant eu occasion de voir familiérement le comte de Maurepas, lui représenta qu'on détermineroit avec une précision bien plus grande l'inégalité des degrés, et par conséquent la figure de la Terre, si l'on alloit mesurer aussi un degré dans le nord, le plus loin qu'il seroit possible de l'équateur ; l'académie reçut les ordres du roi, et choisit pour ce voyage du nord MM. de Maupertuis, Clairaut, Camus, le Monnier, auxquels on joignit l'abbé Outhier, qui étoit très accoutumé aux obser-

vations ; ils partirent en 1736 pour la Suede, et ils arriverent à Tornéo vers la fin de l'hiver.

2680. Cette entreprise fut exécutée avec autant de promptitude que de soin ; car l'année suivante et le 13 novembre 1737, dans l'assemblée publique de l'académie des sciences, Maupertuis lut un discours qui contenoit la relation et le résultat de ce voyage célebre, comme il en avoit lu, 18 mois auparavant, le motif et le projet ; elle est imprimée dans son livre qui a pour titre : *La figure de la Terre, etc.* 1738, 184 pag. in-8°. Voici une idée de ces opérations.

2681. L'on commença le 6 juillet 1736 par reconnoître les sommets des montagnes qui étoient le long du fleuve de Tornéo, et y placer des signaux. C'étoit des cônes creux bâtis de plusieurs grands arbres, qui, dépouillés de leur écorce, rendoient ces signaux si blancs, qu'on les pouvoit facilement observer de 10 à 12 lieues ; leur centre étoit toujours facile à retrouver, en cas d'accident, par des marques qu'on gravoit sur les rochers, ou par des piquets. On parvint de montagnes en montagnes, et de signaux en signaux, jusqu'à *Pello*, village habité par quelques Finois, auprès duquel est *Kittis*, la moins élevée, mais la plus septentrionale des montagnes qui ont servi à ce travail ; l'on mesura les angles à Kittis le 6 août. On forma une suite de dix triangles, dans laquelle se trouvoit *Horrilakero* qui en étoit comme le foyer ; c'est le lieu où aboutissoient les dix triangles placés sur un long heptagone dans la direction du méridien.

2682. Vers le milieu de l'heptagone se trouvoit une base de 7407 toises qui fut mesurée sur la surface la plus unie, puisque c'étoit la glace du fleuve de Tornéo. On trouva par la méthode indiquée ci-dessus (2655), que la distance des deux observatoires qu'on avoit établis à Tornéo et à Kittis, réduite au méridien, étoit de 55023 $\frac{1}{2}$ toises. Par les distances des étoiles α et δ du dragon au zénit de chaque endroit, on trouva que l'amplitude de l'arc du méridien compris entre les paralleles de ces deux observatoires, étoit de $57' 28'' \frac{2}{3}$; d'où il résulte que la longueur du degré du méridien qui coupe le cercle polaire, est de 57438 toises ; il faut en ôter 16 toises, à cause de la réfraction que Maupertuis avoit négligée (Bouguer, *pag.* 290. La Condamine, *pag.* 260), et l'on aura le degré de 57422 toises, plus grand de 353 toises que le degré de Paris (2651). Cette augmentation du degré entre 49° et 66° de latitude forma une démonstration complete de l'aplatissement vers les poles (2674).

2683. Les trois académiciens envoyés au Pérou (2668) trouverent plus de difficulté dans leurs mesures, et y employerent plus de temps : ce ne fut qu'en 1741 qu'elle fut terminée ; mais elle renfermoit la mesure d'un arc de 176950 toises, dont l'amplitude fut trouvée de 3° 7′ 1″ entre les deux observatoires de Cotchesqui et de Tarqui. Ainsi la longueur du degré étoit de 56775 toises ; mais en le réduisant au niveau de la mer, la Condamine conclut, après l'examen de toutes les observations faites par les trois académiciens, que le premier degré du méridien est de 56750 toises (*Mesure des trois premiers degrés du méridien dans l'hémisphere austral*, etc. par LA CONDAMINE, 1751, p. 229); c'est 56753 suivant Bouguer (*Figure de la Terre*, 1749, *pag.* 290 et 305) ; et 56768 suivant D. Georges-Juan.

2684. Ce premier degré du méridien, supposé de 56753 toises, est plus petit de 316 toises que celui de Paris à Amiens, 57069, et de 669 toises que le degré mesuré sous le cercle polaire 57422. Le détail des travaux et des observations curieuses en tout genre que ce voyage du Pérou a occasionnés, a formé la matiere des ouvrages de Bouguer et de la Condamine que je viens de citer, et de celui des officiers espagnols, D. Georges-Juan et D. Antonio d'Ulloa, imprimé en espagnol, à Madrid, en 1749, 3 vol. in-4°, et traduit en françois ; il y a une nouvelle édition in-folio des observations, Madrid, 1773, en espagnol.

2685. Deux degrés de la Terre suffisent pour en déterminer toutes les dimensions, si l'on suppose que sa figure soit réguliere, et elliptique, comme elle devroit l'être en vertu de la pesanteur naturelle dans un fluide homogene (3755). Je vais expliquer la maniere dont Maupertuis résout ce problême dans sa *Figure de la Terre*, et dans les *Mém. de l'acad.* pour 1735. Soit CLE le rayon de l'équateur (FIG. 219), ZPLB la verticale de Paris (2660), L leur point d'intersection ; l'angle PLE est égal à la latitude de Paris, telle que la donnent les observations ; en effet, nous ne jugeons de la latitude que par la différence de hauteur entre une étoile placée dans l'équateur, c'est-à-dire sur la ligne CLE, et une autre étoile qui passe à notre zénit ; du moins nos observations reviennent toutes à cela : or l'angle sous lequel on voit la distance de ces deux étoiles, est égal à l'angle ZLE ; donc cet angle de la verticale avec le rayon de l'équateur est égal à la latitude du lieu P. Nous supposerons cette définition dans toutes les explications suivantes.

2686. PROBLÊME. *Connoissant deux degrés d'une ellipse, trouver ses dimensions.* Soit APB (FIG. 221) l'ellipse du méridien, CA le rayon de l'équateur, CP le demi-axe, Ee un arc d'un degré, c'est-à-dire un arc tel que les perpendiculaires EG, eG fassent un angle EGe d'un degré (2671); Ff un autre arc aussi d'un degré; EKA, FLA les latitudes des points E et F; EM l'ordonnée au point E; on a, par la propriété de l'ellipse, $y = m\sqrt{1 - xx}$, la normale $EK = m\sqrt{1 - xx + mm\,xx}$ (3409),

Soit	CA	=	1
	CP	=	m
	CM	=	x
	EM	=	y
Sin.	EKA	=	s
Sin.	FLA	=	t
	Ee	=	N
	Ff	=	M

et le rayon de la developpée $EG = \frac{1}{m}(1 - xx + mmxx)^{\frac{3}{2}}$ (3411).

Il s'agit de substituer, dans l'expression de EG, une valeur de xx, où il n'y ait de variable que le sinus de la latitude, c'est-à-dire de l'angle EKA.

Dans le triangle EKM, rectangle en M, le rayon est au sinus de l'angle K, comme EK est à EM, c'est-à-dire $1 : s :: m\sqrt{1 - xx + m^2x^2} : m\sqrt{1 - xx}$, d'où l'on tire $xx = \frac{1 - ss}{1 - ss + mmss}$; mettant cette valeur de xx dans l'expression du rayon de la développée, l'on aura $EG = \frac{1}{m}\left(\frac{mm}{1 - ss + mmss}\right)^{\frac{3}{2}}$. Par la même raison $FH = \frac{1}{m}\left(\frac{mm}{1 - tt + mmtt}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Pour simplifier cette expression, on considérera que $1 - ss + mmss = 1 - (1 - mm)\,ss$; et si l'on nomme a l'aplatissement de la Terre supposé comme infiniment petit, on aura $a = \frac{1 - mm}{2}$ parce-que la différence des lignes CA et CP, qui sont 1 et m, est la moitié de la différence de leurs carrés (3423) à cause de la petitesse de a; ainsi, au lieu de $1 - (1 - mm)\,ss$, nous écrirons $1 - 2ass$, qui, élevé à la puissance $-\frac{3}{2}$, devient $1 + 3ass$ (3424), en négligeant le carré de a. Ainsi la valeur de FG sera $\frac{1}{m}m^3(1 + 3ass)$, ou $m^2(1 + 3ass)$, et celle de FH sera $m^2(1 + 3att)$.

Les angles G et H étant chacun d'un degré, les secteurs EGe, FHf, sont semblables; ainsi les rayons sont proportionnels aux arcs: donc Ee : EG :: Ff : FH, ou N : M :: $1 + 3ass : + 3att$; donc $N + 3Natt = M + 3Mass$, et l'aplatissement $a = \frac{N - M}{3Mss - 3Ntt}$.

Le dénominateur de cette fraction est fort grand, en comparaison du

numérateur; ainsi on peut négliger la différence entre N et M qui est très petite, et supposer M = N dans le dénominateur; pour lors on aura l'aplatissement égal à $\frac{N-M}{3M(ss-tt)} = \frac{N-M}{3M \sin.(EKA+FLA) \sin.(EKA-FLA)}$.

2687. Si l'un des degrés M se trouve sous l'équateur même, on aura $t=o$, et l'aplatissement $\frac{N-M}{3Mss}$; c'est à peu près $\frac{1}{300}$. Cette expression fait voir que dans l'hypothese de la Terre elliptique, les accroissemens des degrés sont à très peu près comme les carrés des sinus des latitudes; car N — M est proportionnel à ss, dès que la fraction $\frac{N-M}{3Mss}$ est constante. On peut voir une autre maniere dont on trouve le rapport des diametres de la Terre par la mesure des degrés dans les Elémens de navigation de Roberston, *Tom. II, pag.* 254, d'après les formules de Letherland; M. Maskelyne s'en est servi (*Philos. Trans.* 1768, *pag.* 328. Il y a encore une méthode dans M. Boscovich (*Voyage astronomique, pag.* 477); mais la formule précédente est bien plus simple, et très suffisante dans la pratique.

2688. Cependant si l'on vouloit construire une table exacte des degrés de la Terre par le moyen de cette regle, on pourroit se tromper de 6 toises; cette erreur est peu sensible, cependant je vais rapporter une formule plus rigoureuse que M. Cagnoli a démontrée (*Trigon. pag.* 409). Nommant M le degré partagé par l'équateur, N un autre degré pour une latitude L, a l'aplatissement, et m la valeur de $a - \frac{1}{2}a^2$; l'on aura $N - M = 3mM \sin. L^2 + \frac{15}{2} m^2 M \sin. L^4$.

Soit M = 56700 toises, $a = \frac{1}{300}$, $m = 0{,}003323$; $3mM = 5665$, $\frac{15}{2} m^2 M = 47$; le degré de latitude sous le pole se trouvera donc plus long de 571 toises que le degré vers l'équateur, comme dans la table que l'on trouvera ci-après. Cette table a été calculée par M. Carouge, sur cette formule $526^t, 523 \sin.^2 \text{lat.} + 4^t, 71267 \sin.^4 \text{lat.}$ Voy. Ephém. de Berlin pour 1793 p. 194.

2689. En substituant dans la formule (2687) les degrés mesurés en France et au Pérou, la Condamine trouve que l'aplatissement de la Terre est de $\frac{1}{304}$; mais en y substituant le degré du nord et celui du Pérou, il ne trouve que $\frac{1}{210}$. Cette différence de résultat fait croire que la Terre n'a pas une figure regulièrement et parfaitement elliptique; ou qu'il y a dans les mesures quelques imperfections, ou quelques raisons d'inégalité (2703), sans quoi l'on auroit le même degré d'aplatissement par ces deux différentes comparaisons. Boscovich en a conclu que le degré du nord étoit

un peu trop grand ; et l'on verra bientôt que je m'en tiens à $\frac{1}{300}$ pour l'aplatissement (2700,2702).

2690. Si l'un des degrés M est supposé vers l'équateur, et l'autre N vers le pole, la formule 2686 devient $\frac{N-M}{3M}$; ainsi l'aplatissement ou la différence des demi-diametres de la Terre n'est que le tiers de la différence des degrés. Par exemple, les deux degrés extrêmes différant entre eux de $\frac{1}{100}$, les diametres ne différeront que de $\frac{1}{300}$, c'est-à-dire trois fois moins.

2691. L'angle de la verticale ou perpendiculaire EG avec le rayon EC de la Terre peut s'exprimer par le moyen de l'aplatissement. Supposons le demi petit axe CP $=1$, le demi grand axe CA $=1+a$, la lettre a exprimant la fraction de l'aplatissement ; le carré de $1+a$ sera $1+2a$ 3423 ; car à cause de la petitesse de a, l'on peut négliger le terme a^2 soit l'abscisse CM $=x$, la sous-normale MK sera $=x.\frac{1}{1+2a}$ par la propriété de l'ellipse (3408) $=x(1-2a)$, en négligeant encore les termes suivans (3422) ; donc CK $=2ax$ $=2a$ cos. latit. La petite perpendiculaire KD abaissée sur CE sera CK sin. KCD $=$ CK sin. latit. $=2a$ cos. lat. sin. lat. $=a$ sin. 2 lat. (3817), et le sinus de l'angle KED, $=\frac{DK}{DE}$ ou $\frac{DK}{CE}=a$ sin. 2 lat. Nous supposons EK sensiblement égal au demi petit axe, car il n'en differe que d'une quantité qui n'introduiroit rien de sensible dans cette formule. C'est ainsi que l'on peut calculer la seconde colonne de la table, qui contient les angles tels que CEK, formés par le rayon CE, et par la ligne verticale EK, perpendiculaire à la surface de la Terre en E. On s'en sert pour les observations de la Lune (1694,4141).

2692. Cette expression de l'angle KED est fort simple ; elle n'est pas rigoureuse, mais l'erreur ne peut aller qu'à 3 ou 4 secondes, qui sont toujours négligeables [a] ; cependant on a donné une autre formule (*Connois. des T.* 1790), de même que M. de Lambre dans son mémoire sur les parallaxes (*Mém. de Stockholm* 1788). M. Cagnoli préfere d'employer l'expression tang. ECM $=\frac{CP^2}{CA^2}$ tang. latit. celle-ci est facile à démontrer ; car tang. ECM : tang. EKM :: CM : KM :: CA^2 CP^2 (3408). La différence entre ECM et la latitude EKM, sera l'angle de la verticale (*Trigon. pag.* 410).

(a) On trouveroit jusqu'à 9″ de plus si l'on calculoit dans la courbe, où les excès des degrés sont rigoureusement comme les carrés des sinus des latitudes (*Mém.* 1752, *pag.* 101).

Cet angle, en supposant l'aplatissement de $\frac{1}{230}$, est pour Paris de 14′ 51″ (1694). Il seroit de 19′ 30″, si l'on admettoit l'hypothese de Bouguer (2697), et 18′ 28″ dans celle où l'on détermine l'aplatissement par les seuls degrés du nord et du Pérou (2695 *Mém.* 1752). Enfin il est de 11′ 23″ seulement, si l'aplatissement est de $\frac{1}{300}$, comme j'ai lieu de le croire, (2700, 3764). Alors la plus grande différence de l'équateur au pole, pour 1° de parallaxe, sera de 12″.

2693. On démontre par les mêmes principes que dans l'hypothese de la Terre elliptique, les différences des rayons de la Terre par rapport au demi grand axe sont comme les carrés des sinus des latitudes ; en supposant toujours très petits et l'aplatissement et les différences des degrés. Par la propriété de l'ellipse (3287) OA : KL : : CA : BL, ou a : KL : : 1 : sin. lat. ; donc KL := a sin. lat. Mais à cause des triangles semblables BKC, MKL, on a KL : KM : : CK : BK, ou a sin. lat. : KM : : 1 : sin. lat. Donc KM = a sin.² lat. ; c'est-à-dire que la différence entre le rayon de l'équateur et le rayon CK, pour une latitude donnée, est égale à l'aplatissement multiplié par le carré du sinus de la latitude. On peut dire également que l'excès de CK sur CO est comme le carré du cosinus de la latitude ; car CK = CM — KM = $1 + a - a$ sin.² lat., ou CK — 1 = a (C — sin.² lat.) = a cos.² lat. Cette formule est suffisante pour l'usage de l'astronomie ; mais si l'on en veut une plus rigoureuse, on observera que CK (FIG. 218) = CE. $\frac{\text{cos. BCL}}{\text{cos. BCK}}$, tandis que les tangentes de ces deux angles sont comme le grand axe ou petit axe, et l'angle BCK est connu par l'angle de la verticale, et la latitude du lieu (M. Cagnoli, *pag.* 411). C'est sur ce principe que sont calculés les nombres de la table XCIV, qui sont les diminutions de la parallaxe de la Lune à différentes latitudes, dépendantes de l'inégalité des rayons CE, CP. Ainsi la parallaxe horizontale de la Lune sous l'equateur, qui a pour base CE, étant supposée de 60′ 0″, ou de 3600″, on ajoutera le logarithme de ce nombre avec celui de $\frac{1}{300}$, et deux fois le logarithme du sinus de la latitude, par exemple de 49° ; et l'on trouvera qu'il faut ôter 6″ 8, pour avoir la parallaxe qui convient au rayon CG à 49° de latitude.

2694. Le rayon de courbure ou le rayon d'un degré du méridien, sous une latitude dont le sinus est s, a pour valeur m^2 ($1 + 3ass$) (2686) ; et comme $m = 1 - a$, ou $m^2 = 1 - 2a$, ce rayon est $1 - 2a + 3ass$: si l'on fait $s = o$, on aura le rayon du degré du

méridien sous l'équateur, $1-2a$; si l'on fait $s=1$, on aura le rayon du degré sous le pole $1+a$. De là il suit qu'il y a des différences égales entre ces quatre quantités; le rayon du premier degré de latitude, qui est de $1-2a$, le demi-axe $1-a$, le rayon de l'équateur 1, et le rayon du dernier degré du méridien $1+a$; tout cela suppose qu'on néglige le carré de l'aplatissement. La verticale KR (FIG. 218), prolongée jusqu'à l'axe de la Terre, peut se trouver en considérant la petite partie CT; car sin. R : cos. CR :: T : RT, ou cos. lat. : sin. lat. :: $2a$ cos. lat. sin. lat. : $2a$ sin.^{2} lat., qui ajoutée avec CK ou KT $=1-a$ sin.^{2} lat. donnera $1+a$ sin.^{2} lat. pour la verticale entiere dont nous ferons usage (2707, 2708).

2695. Les degrés mesurés ne s'accordent pas exactement avec la figure elliptique (2689): j'ai voulu voir quel changement il faudroit faire aux trois degrés du Pérou, de la France et du nord, pour qu'ils s'accordassent à donner le même degré d'aplatissement (*Mém. acad.* 1752), j'ai trouvé qu'on y parviendroit en ôtant 26 toises du degré mesuré sous l'équateur, et 77 du degré de Laponie, mais ajoutant 77 toises au degré de France; par ce moyen l'on auroit $\frac{1}{232}$ pour l'aplatissement, à-peu-près comme on le trouve par la théorie de l'attraction, en supposant que la Terre soit homogene. On verra ci-après qu'en corrigeant ainsi les degrés mesurés, et en tenant compte des observations du pendule, on trouve l'aplatissement encore moindre (2699).

2696. Les différences qu'on trouve entre la table et les mesures de plusieurs degrés, passent les bornes des erreurs qu'on a droit de supposer dans les opérations; il en résulte donc que la Terre n'a pas une figure elliptique, ou que son hétérogénéité intérieure est sensible, et qu'elle est plus dense vers le centre; c'est ce que prouve aussi la longueur du pendule observé en différens pays de la Terre (2700); car la diminution de pesanteur en allant vers le midi, s'est toujours trouvée plus grande qu'elle ne seroit si la Terre étoit elliptique et homogene; tandis que l'aplatissement paroît moindre (2700, 3704). Il peut aussi y avoir des causes locales qui ont fait paroître les degrés plus ou moins grands (2703); c'est peut-être ce qui fait que le degré de Laponie s'écarte de 200 toises de l'hypothese que les autres degrés m'ont fait adopter (2700).

2697. Bouguer avoit cru devoir recourir à une hypothese purement astronomique, pour expliquer l'aplatissement et pour représenter les trois degrés qu'on avoit mesurés de son temps: le degré de France mesuré sous la latitude de $49°\frac{2}{3}$ surpasse le degré de l'équateur de 316 toises, et celui du cercle polaire surpasse le degré de

de l'équateur de 669 ou 675t (2674); ces excès de 316 et 669 toises devroient être comme les carrés des sinus des latitudes, c'est-à-dire, comme les carrés des sinus de $49^\circ\frac{2}{3}$ et $66^\circ\frac{1}{3}$, si la Terre étoit elliptique (2687); mais ils sont à-peu-près comme les carrés carrés ou comme les quatriemes puissances des sinus des latitudes. En étendant cette hypothese à tous les autres degrés de la Terre, il en résulte une courbe dont Bouguer a cherché la nature et calculé les rayons, ainsi que les angles des verticales avec les rayons, qui sont fort différens d'une ellipse au même degré d'aplatissement, qui étoit $\frac{1}{179}$, je m'en étois servi pour les parallaxes de la Lune (*Mém.* 1752).

2698. Dans cette hypothese, Bouguer n'employoit que trois degrés, celui du Pérou, celui du nord et celui de Paris; mais il y a encore d'autres degrés qui ont été mesurés avec soin : savoir, au midi de la France par Cassini de Thury, et la Caille; au Cap de Bonne-Espérance par la Caille seul; en Italie, entre Rome et Rimini, par le P. Boscovich, et le P. Maire; en Autriche et en Hongrie par le P. Liesganig; en Piémont par le P. Beccaria; en Pensylvanie, dans l'Amérique septentrionale, par MM. Masonet et Dixon : on en verra les quantités dans la table suivante; j'observerai seulement que la toise de la Caille étoit trop grande (2645); celle du nord et celle de Boscovich trop petites (2649). Voilà pourquoi j'ai fait aux degrés mesurés quelques petites corrections.

TABLE des dix degrés qui ont été mesurés géométriquement par divers astronomes.

Latit. moy. des degrés mesurés.	Valeur des degrés en toises.	Auteurs d'où les mesures sont tirées, et qui en ont donné les détails.
0° 0′	56753	Bouguer et la Condamine, au Pérou (2673).
33 18 A	57040	La Caille, au Cap, *Mém. acad.* 1751, *p.* 435.
39 12	56888	Mason et Dixon, en Amérique, *Phil. Tr.* 1768.
43 1 S	56973	Le P. Boscovich, en Italie, *de Litter. exped.* 1755.
44 44	57069	Le P. Beccaria, en Piémont, *Gradus Taur.* 1774.
45 0	57023	En France, *Mérid. vér. Mém. ac.* 1758, *p.* 244.
45 57	56881	Le P. Liesganig, en Hong. *Dimens. grad.* 1770.
48 43	57086	Le P. Liesganig, en Autr. *ib. p.* 214, *Ph. Tr.* 1768.
49 23	57069	De Paris à Amiens, Picard, *etc.*
66 20	57419	Sous le cercle polaire (2672).

2699. Boscovich, dans ses notes sur le poëme latin de M. Stay, et dans son *Voyage astrono. pag.* 501, examina de quelle maniere on pourroit combiner les cinq degrés dont on avoit la mesure pour en tirer l'ellipticité de la Terre par une espece de milieu ; et il se proposoit de trouver les corrections à faire aux résultats des mesures, de maniere que la somme des corrections positives fût égale à celle des négatives ; que les différences des degrés fussent proportionnelles aux différences des carrés des sinus des latitudes, ou des sinus verses des doubles latitudes (3818) ; enfin que la somme des corrections positives ou négatives fût la plus petite de toutes celles que l'on peut avoir en observant les deux premieres conditions ; et il trouvoit $\frac{1}{248}$ pour la différence des axes (*Tom. II*, *pag.* 424) ; mais la correction alloit jusqu'à 167 toises pour le degré de Laponie, (*Voyage*, *pag.* 509).

Employant ensuite les degrés mesurés par le P. Liesganig, avec les 8 autres que l'on avoit, on a pour l'ellipticité de la Terre $\frac{1}{311}$; et si l'on omettoit le seul degré de Laponie, qui differe sensiblement des autres, sur-tout du degré de l'Amérique septentrionale, et de celui de Bohême, on auroit $\frac{1}{331}$. Ces deux fractions ne s'éloignent pas beaucoup de $\frac{1}{335}$ que Boscovich trouve par la théorie, en faisant varier les densités d'une maniere assez naturelle, et supposant un noyau sphérique également dense à la même distance du centre, (*Voyage astron. pag.* 512).

2700. M. de la Place trouve l'aplatissement $\frac{1}{321}$ (*Mém.* 1783, *pag.* 528). M. du Séjour $\frac{1}{307}$ (*pag.* 86), ou $\frac{1}{320}$. M. Carouge, en comparant le degré de l'équateur avec tous les degrés mesurés, a trouvé par un milieu $\frac{1}{300}$. Enfin j'ai voulu aussi combiner les degrés qui paroissent les plus sûrs (2689), et les expériences du pendule ; et j'ai trouvé encore qu'il falloit supposer l'aplatissement de $\frac{1}{300}$ (*art.* 3764, *Mém.* 1785) ; c'est le résultat auquel je m'en tiendrai dans tout le cours de ce livre. La différence entre le rayon de l'équateur et celui du pole sera de $4\frac{3}{4}$ lieues, au lieu de $6\frac{1}{4}$ que Newton supposoit.

2701. Pour donner une idée de la surface de la Terre, de sa solidité et de son poids ; supposons les deux rayons de la Terre, *du pole et de l'équat[eur]* 3262237 et 3273148 toises ;+ son volume ou sa solidité sera $\frac{2}{3}$ $c\,a^2\,b$ (3477), ou 1230 320000 lieues* cubes, c'est-à-dire douze milliards ou billions. *+ c'est la proportion de 299 : 300. (No. 2700). La différence entre le r[ayon] du pole et de l'[équa]teur (=a) = 190[..] Toises. (2702).*

Si l'on suppose un globe de même volume ou grosseur que le sphéroïde, son rayon sera $\sqrt[3]{b\,a^2}$ (3479), ou de 3269511 toises ; c'est le rayon moyen dont j'ai coutume de me servir ; alors la surface sera 25772900 lieues carrées.

Not. $c = 2\pi$ (No. 3400)

1 Lieue de France = 2283 Toises (No. 2662. 1394)

** 1 Lieue : 1 Mile Allem = 15 : 25*

donc $1\,L = \frac{15}{25}A = \frac{3}{5}A$

$L^2 = \frac{3^2}{5^2}A^2 = \frac{9}{25}A^2$

$L^3 = \frac{3^3}{5^3}A^3 = \frac{27}{125}A^3$

autre formule exacte de [illegible]

Par là on calcule la grandeur du rayon pour une lati[tude] donnée suivant 2693. Soit le [rayon] de l'équat. CE. le rayon cherché = x. $x = CE - a.\sin^2 latit.$ Une for[mule] plus exacte est celle de Pacassi pour C[..] dans les ephem. de Berlin 1788. p. 17[..] Le rayon pour Paris se trouve 3266[..] par la formule de Pacassi et 32[..]

Mais si l'on veut voir la surface du sphéroïde, sans recourir à la supposition d'une sphere équivalente, il faudra employer la formule $2cab + \frac{cae^2}{3b} - \frac{cae^4}{20b^3} + \frac{cae^6}{56b^5}$ (art. 3476), et l'on trouvera le premier terme 25744200; les autres sont + 28749,6 — 28,8 + 0, 07; le total sera 25772921 lieues carrées, surface totale d'un sphéroïde elliptique décrit sur les deux axes employés ci-dessus.

Pour avoir une idée de la masse ou du poids total de la Terre, supposons qu'elle soit composée intérieurement d'une matiere à-peu-près analogue à l'argille, dont le pied cube pese environ 140 liv. [a]; la toise cube pesera 30240, la lieue cube 359775200000000, et le poids de la Terre entiere sera 4426384000000000000000000 liv., ce nombre étant composé de 25 chiffres. Si l'on vouloit pousser le calcul jusques à avoir le nombre des grains de sable dont cette masse est composée; chaque grain de sable sensible ne peut avoir moins d'un vingtieme de ligne; d'où j'ai conclu qu'il devoit y avoir en tout 755382300000000000000000000000000 grains de sable, ce nombre étant composé de 33 chiffres. Il y en a 34 pour la seule combinaison des 24 lettres de l'alphabet.

2702. Les degrés mesurés ne suffisant pour trouver tous les autres, sans le secours d'une hypothese, Bouguer a fait par la sienne (2697) une table de tous les degrés de latitude et de longitude. Il y en a d'autres dans le Manuel de Trigonométrie de la Grive, imprimé en 1754, qui sont faites sur différentes hypotheses, et j'en ai inséré une dans le quatrieme volume de ma seconde édition. Il y en a aussi une dans le recueil des tables de Berlin (*Tom. III.*). L'on s'est contenté d'ôter 30 toises du degré mesuré vers l'équateur, et de les ajouter à celui 45°; et dans cette hypothese, on a calculé toutes les dimensions du sphéroïde (2702), en supposant le rapport des rayons de 229 à 230 employés par Newton; mais cette hypothese n'a satisfait à aucun des degrés mesurés: j'ai donc préféré la mienne, et j'en ai fait la table des degrés de latitude et de longitude dans le sphéroïde, en supposant le premier degré 56747 toises, et l'aplatissement de $\frac{1}{300}$, ou de 10911 toises. Cette hypothese n'exige que 6 toises d'augmentation dans le degré de Paris à Amiens, que je suppose 57075.

2703. On remarque dans les accroissemens des degrés des

(a) La livre d'Angleterre, *troy weight*, contient 12 onces un gros et 41 grains de celle de France; celle-ci se divise en 16 onces, l'once en 8 gros, le gros en 72 grains. Voyez la *Métrologie* de Paucton, et les *Mémoires de l'académie* pour 1767.

irrégularités (2696), qui viennent peut-être des circonstances locales, plus que de l'irrégularité de la Terre : on trouve, par exemple, que le degré mesuré en Italie est plus petit, et que celui du Cap est plus grand qu'ils ne devroient être suivant la loi établie par les degrés mesurés sous l'équateur, en France et au cercle polaire ; mais une partie de ces différences peut venir de l'attraction latérale des montagnes sur le fil-à-plomb. Par des observations que Bouguer et la Condamine firent avec grand soin en 1737, près de la montagne de Chimboraço au Pérou, le fil-à-plomb étoit détourné de 8″ par la masse de cette montagne ; les hauteurs des étoiles prises avec un quart-de-cercle de deux pieds et demi, quand les étoiles étoient du côté du midi, paroissoient toutes plus grandes ; et les hauteurs prises sur les étoiles situées du côté du nord paroissoient plus petites quand on observoit à 1753 toises, au midi du centre de la montagne, que quand on en étoit éloigné de 4572 toises, en réduisant tout à une même latitude ; ce qui prouvoit que le poids du fil-à-plomb étoit attiré au nord, et indiquoit une ligne verticale et un zénit trop près du midi ou des étoiles méridionales (Bouguer *pag.* 389).

Cette montagne qui a 3217 toises de hauteur, est environ 7400 millions de fois plus petite que la Terre ; mais quand on est placé à 1800 toises de son centre de gravité, c'est à-dire, 1900 fois plus près de ce centre que de celui de la Terre, son attraction doit être environ $\frac{1}{2000}$ de celle de la Terre ; cette quantité auroit dû produire une différence 13 fois plus considérable que celle qu'on a observée, si la montagne n'eût pas été un volcan creusé par l'action des feux souterrains (Bouguer, *pag.* 389).

2704. Le P. Beccaria a trouvé en Piémont une différence encore plus grande : entre Turin et Andra, l'arc mesuré s'est trouvé de 26″ plus petit qu'en France sur une égale longueur ; et le degré qu'on en auroit voulu conclure auroit été trop grand de 900 toises ; mais Andra est située sur le penchant de *Monte Barone*, qui va toujours en s'élevant sur une longueur de plus de sept lieues jusqu'au sommet de *Monte Rosa*, que le P. Beccaria regarde comme la plus haute montagne de l'Europe, et qui est en effet, selon lui, de 2212 toises plus élevée que Turin, ou 2335 au-dessus du niveau de la mer.

Boscovich trouva le degré du méridien en Italie de 56979 toises ; tandis qu'il auroit dû être de 57124, en le réglant sur ceux du nord et du Pérou, dans l'hypothese elliptique, ou 57008, en prenant le degré du Pérou avec celui de France. D'après cela, il pense que les termes de sa mesure étant placés, l'un au nord et

l'autre au midi de la grande chaîne des montagnes de l'Apennin, les observations faites par le moyen du fil-à-plomb avoient dû être troublées par l'attraction de cette masse de montagnes, et donner un moindre nombre de toises pour chaque degré. (*Voyage astron. pag.* 156).

M. Cavendish croit que le degré qui a été mesuré dans l'Amérique septentrionale pourroit bien avoir été diminué de 60 ou 100 toises, parceque l'attraction du côté de la mer est moindre que du côté du continent; il pense que les degrés mesurés en Italie et au cap de Bonne Espérance pourroient être sensiblement affectés de la même cause (*Philos. Trans.* 1768, p. 328). Le P. Boscovich proposoit de s'en assurer en faisant des expériences à S.-Malo lorsque la mer est très basse, et lorsqu'ensuite une élévation de 50 pieds, par l'effet des grandes marées, rend son attraction considérablement plus forte.

2705. La Caille pensoit aussi qu'à Perpignan le voisinage des Pyrénées avoit pu faire dévier le fil-à-plomb vers le sud, faire paroître le zénit plus au nord qu'il ne l'est réellement, et rendre plus petits les arcs compris entre Perpignan et les autres villes de France; aussi voyons-nous que la Caille abandonne, pour ainsi dire, les observations célestes faites à Perpignan pour conclure la longueur du degré, dont le milieu passe à 45° de latitude 57023 toises (*Mém. acad.* 1758, p. 244).

2706. M. Maskelyne a fait sur la montagne de Schehallies en Écosse de semblables observations (*Philos. Trans.* 1775, *p.* 500; *Journal des Sav.* 1776, *p.* 722). Il a trouvé une attraction de 5″ 8; ce sont les observations les plus exactes et les plus directes qu'on ait faites pour prouver l'attraction des montagnes.

2707. Jusqu'ici nous n'avons parlé que des degrés du méridien ou des degrés de latitude sur le sphéroïde; il y a cependant des cas où l'on a besoin des degrés de longitude. Si la circonférence de la Terre PEM (FIG. 222) est supposée sphérique, le rayon BR du parallele qui passe par le point B, est le cosinus de la latitude EB; ainsi le degré de latitude étant à Paris 57069 toises, si l'on multiplie cette quantité par le cosinus de 48° 50′ 14″, l'on aura 37563 toises + pour l'étendue de chaque degré de longitude sur le parallele de Paris. + au lieu de 37672. page 39. l. 7.

Mais la Terre étant aplatie on trouve par cette regle des degrés de longitude qui sont toujours trop petits; + car BI est le rayon du degré de latitude en B, ou le rayon du cercle osculateur (2686), et il est plus petit que la verticale BH prolongée jusqu'au petit

axe : or c'est BH qu'il faut prendre pour que la regle précédente ait lieu, et fasse trouver le rayon BR du parallele, par le moyen de la latitude dont le complément est l'angle BHM. Nous avons vu ci-devant l'expression de cette verticale (2694).

2708. Le degré d'un grand cercle perpendiculaire au méridien, dans le sphéroïde aplati, a aussi pour rayon la verticale entiere BH prolongée jusqu'à l'axe MCP ; car les verticales qui passent par les deux extrémités de ce degré du grand cercle, étant dans deux méridiens ou dans deux plans différens, les deux rayons qui comprennent l'angle d'un degré ne peuvent se rencontrer que dans l'intersection des deux méridiens ou dans l'axe même de la Terre. On pourroit croire que ce grand cercle seroit celui qui auroit BC pour rayon, et son centre au centre C de la Terre ; mais le grand cercle que nous mesurons en allant à l'orient perpendiculairement au méridien, doit être un vertical : or le cercle dont BC seroit le rayon, ne seroit pas ce vertical qui est perpendiculaire au méridien ; et si l'on conçoit deux méridiens consécutifs et deux verticales, elles ne peuvent se rencontrer qu'à l'intersection des plans des deux méridiens, ou sur l'axe même, c'est-à-dire en H.

Ce degré du grand cercle en B surpasse celui de l'équateur d'une quantité égale au tiers de l'excès du degré du méridien en B sur le premier degré de latitude aux environs de l'équateur. En effet, nommant 1 le rayon de l'équateur, la verticale BH est $1 + ass$ (2694) ; le rayon du premier degré de latitude est $1 - 2a$, et celui du degré du méridien sous une latitude donnée est $1 - 2a + 3ass$; donc celui-ci surpasse celui du premier degré de la quantité $3ass$, et celui du grand cercle, qui est $1 + ass$, ne surpasse celui de l'équateur que d'une quantité ass.

Le rayon du grand cercle surpasse le rayon du degré correspondant du méridien $1 - 2a + 3ass$ d'une quantité $2a - 2ass$, qui est les deux tiers de l'excès du rayon du dernier degré de latitude $1 + a$ sur celui du degré du méridien, ce dernier excès étant $3a - 3ass$. La quantité $2a - 2ass$ est la même chose que $2a\ (1 - ss)$ ou $2a$ cos.^{2} lat. Ainsi, les excès des rayons des grands cercles sur ceux des degrés du méridien sont donc zéro sous le pole, et $2a$ sous l'équateur ; les excès des degrés suivent le même rapport que ceux des rayons ; ainsi ils diminuent en partant de l'équateur, ou ils augmentent en partant du pole, comme les carrés des sinus des distances au pole, ou des cosinus des latitudes.

La verticale entiere $BH = 1 + ass$ étant divisée par 57 donne

le degré du grand cercle qui est perpendiculaire au méridien en B, et ce degré multiplié par le cos. de la lat. donne le degré du parallele sur le sphéroïde aplati. Ainsi l'on trouveroit pour Paris que le degré du grand cercle perpendiculaire au méridien est de 57230 toises, plus grand de 161 que le degré du méridien ; Bouguer trouvoit 397 de différence, mais il faisoit l'aplatissement de $\frac{1}{178}$. Le degré du parallele est 37672 toises, plus grand de 109 toises, qu'il ne seroit sur la Terre sphérique, où l'on trouve 37563, calculée, se trouve plus petite de 66″ que suivant le calcul fait sur la Terre sphérique (M. du Séjour, *Mém.* 1778, *pag.* 186). On peut voir les propriétés générales des perpendiculaires à la méridienne traitées complètement dans le second volume du *Traité analytique des Mouvemens apparens des corps célestes*, par M. du Séjour, 1789, in-4° ; par M. le Gendre dans un Mémoire lu le 7 mars 1789 dans le vol. de 1787. Cette différence de degrés perpendiculaires au méridien dans le sphéroïde mérite d'être employée dans le calcul des longitudes, par les distances à la méridienne et à la perpendiculaire, observées sur la Terre. La longitude de Brest ainsi calculée differe très sensiblement de celle qu'on employoit sur la Terre sphérique 6° 56′ 45″. Par exemple, dans mon hypothese de $\frac{1}{300}$, je trouve le degré de latitude vers 48° 36′ de 57066 toises ; ainsi la perpendiculaire à la méridienne de Paris qui passe par Brest, étant à 14614 toises au midi, ce qui fait 15′ 22″, on a pour la latitude du pied de la perpendiculaire 48° 34′ 52″. Pour avoir le degré du grand cercle, je multiplie $2a = 380$ toises par le carré du cosinus de la latitude, je trouve 162 toises, qui, ajoutées à 57066, donnent pour le degré du grand cercle 57228. La distance de Brest à la méridienne 259168 toises vaut donc 4° 31′ 44″ ; résolvant le triangle rectangle formé au pole et à Brest, je trouve l'angle au pole 6° 49′ 39″, c'est la différence de longitude ; et l'hypoténuse 45° 37′ 17″, ce qui donne pour la latitude de Brest 42° 28′ 43″. M. du Séjour trouve 4″, 2 de plus pour la longitude et 4″ de moins pour la latitude ; mais ses élémens sont un peu différens des miens. Il trouvoit même 116″ de différence entre la sphere et le sphéroïde aplati de $\frac{1}{178}$ (*Mém.* 1737). On peut voir les propriétés générales des perpendiculaires à la méridienne discutées complètement dans le *Traité analytique* de M. du Séjour, t. II ; il y a aussi un mémoire lu le 7 mars 1789, par M. le Gendre, imprimé dans le volume de 1787.

2709. De là on voit combien la mesure des degrés de longitude pouvoit servir à déterminer l'aplatissement de la Terre (*Mém. acad.*

1733) ; mais pour déterminer l'amplitude des arcs des paralleles en minutes et secondes avec assez d'exactitude, il faut de très grandes distances, et une très grande précision dans la différence des méridiens : on auroit dû y employer sur-tout des feux pour servir de signaux (*Mérid. vérif.* pag. 98, 105 ; *Mém. acad.* 1735, pag. 1).

La Condamine, dans ses observations sur l'Italie, dit qu'on pourroit placer sur les sommets de l'Apennin vers Camaldoli, des feux que l'on verroit de la mer adriatique à l'orient, et de celle de Toscane à l'occident ; on appercevroit même les montagnes d'Istrie et de Croatie d'un côté, et de l'autre celles de Gênes, cela formeroit une distance de plus de 5° en longitude, qu'on pourroit mesurer avec assez de précision (*Mém. acad.* 1757) : l'on trouveroit la différence des longitudes par les temps vrais de chaque lieu au moment où l'on verroit le signal intermédiaire. Les globes de Montgolfier, élevés à une très grande hauteur, pourroient fournir de pareils signaux, qui se verroient encore de plus loin. Ce ne sera pas le seul avantage de cette belle découverte faite en 1783, et que l'on a probablement trop négligée.

De la longueur du pendule.

2710. Le pendule simple dont il s'agit ici est celui dont on suppose toute la pesanteur réduite en un seul poids, qu'on appelle le centre d'oscillation : on le calcule par le moyen des pendules composés dont on est obligé de se servir pour les expériences.

Les pays de la Terre qui sont plus près du pole sont moins éloignés du centre de la Terre, à cause de l'aplatissement ; ainsi la pesanteur y est plus grande (3762). De plus, la force centrifuge y est moindre (3544), ce qui augmente encore la pesanteur. Ainsi un pendule animé par la pesanteur doit y descendre plus vîte et faire des oscillations plus promptes ; et s'il étoit réglé sous l'équateur de maniere à battre les secondes, il avancera quand on ira vers les poles, et il faudra l'alonger pour le régler.

2711. L'observation a constaté cette vérité depuis le voyage fait à Cayenne en 1672 (2669) ; et l'on a observé une différence de 2 lig. $\frac{1}{2}$ dans la longueur du pendule depuis l'équateur jusques en Laponie. Il y a de l'équateur jusqu'à Paris une différence de 1 $^{\text{li.}}$ 46, dont 0, 86 pour l'effet de la force centrifuge et 0, 6 pour celui de l'aplatissement. Sous l'équateur le pendule auroit 1 $^{\text{li.}}$ 53 de plus si la Terre étoit immobile.

Table

Table des degrés de latitude et de longitude en toises, sur un sphéroïde aplati d'un trois centieme, en ôtant 6 toises du premier degré de latitude, et les ajoutant à celui de Paris (2702). Voy. 2688.

Pour Paris: Voy. 2707. Le rayon de l'equateur = 3273148 T. ([illegible])

Hauteur du pole.	Degrés de latitude.	Différ.	Degrés de longitude.	Différ.	Hauteur du pole.	Degrés de latitude.	Différ.	Degrés de longitude.	Différ.
0°	56747		57127		45	57031		40462	
1	56747	0	57118	9	46	57041	10	39752	710
2	56748	1	57093	25	47	57051	10	39030	722
3	56749	1	57049	44	48	57061	10	38296	734
4	56750	1	56989	60	49	57071	10	37550	746
5	56751	1	56911	78	50	57081	10	36793	757
6	56753	2	56816	95	51	57091	10	36024	769
7	56755	2	56704	112	52	57101	10	35244	780
8	56758	3	56575	129	53	57110	9	34453	791
9	56761	3	56428	147	54	57120	10	33652	801
10	56764	3	56265	163	55	57129	9	32840	812
11	56768	4	56084	181	56	57139	10	32018	822
12	56772	4	55887	197	57	57148	9	31187	831
13	56776	4	55672	215	58	57157	9	30346	841
14	56780	4	55441	231	59	57166	9	29495	851
15	56785	5	55193	248	60	57174	8	28635	860
16	56790	5	54928	265	61	57183	9	27767	868
17	56795	5	54647	281	62	57192	9	26889	878
18	56801	6	54348	299	63	57200	8	26004	885
19	56807	6	54034	314	64	57208	8	25111	893
20	56813	6	53703	331	65	57215	7	24209	902
21	56820	7	53356	347	66	57223	8	23301	908
22	56827	7	52993	363	67	57230	7	22385	916
23	56834	7	52613	380	68	57237	7	21462	923
24	56841	7	52217	396	69	57244	7	20532	930
25	56848	7	51806	411	70	57251	7	19596	936
26	56856	8	51378	428	71	57257	6	18655	941
27	56864	8	50936	442	72	57263	6	17707	948
28	56872	8	50477	459	73	57269	6	16753	954
29	56880	8	50004	473	74	57274	5	15795	958
30	56889	9	49515	489	75	57280	6	14832	963
31	56897	8	49011	504	76	57285	5	13864	968
32	56906	9	48492	519	77	57289	4	12892	972
33	56915	9	47958	534	78	57293	4	11915	977
34	56925	10	47410	548	79	57297	4	10936	979
35	56934	9	46847	563	80	57301	4	9952	984
36	56943	9	46270	577	81	57304	3	8966	986
37	56953	10	45679	591	82	57307	3	7977	989
38	56962	9	45074	605	83	57310	3	6985	992
39	56972	10	44455	619	84	57312	2	5991	994
40	56982	10	43822	633	85	57314	2	4996	995
41	56992	10	43176	646	86	57315	1	3998	998
42	57002	10	42517	659	87	57317	2	3000	998
43	57012	10	41845	672	88	57317	0	2000	1000
44	57021	9	41160	685	89	57318	1	1000	1000
45	57031	10	40462	698	90	57318	0	0000	1000

Hauteur du Niveau apparent.

Toises.	Pi.	Pou.	Lig.	Poin.	Toises.	Pi.	Po.	Lig.	Poi.	Toises.	Pieds.	Pouc.	Lig.	Poi.
50	0	0	0	5	550	0	3	3	11	2900	7	8	6	1
60	0	0	0	6	560	0	3	5	5	3000	8	3	0	0
70	0	0	0	8	580	0	3	8	5	3100	8	9	8	6
80	0	0	0	10	600	0	3	11	6	3200	9	4	7	8
90	0	0	1	1	650	0	4	7	9	3300	9	11	9	6
100	0	0	1	4	700	0	5	4	8	3400	10	7	3	11
120	0	0	1	11	750	0	6	2	8	3500	11	2	9	0
140	0	0	2	7	800	0	7	0	6	3600	11	10	6	8
150	0	0	3	0	850	0	7	11	4	3700	12	6	7	1
160	0	0	3	5	900	0	8	10	11	3800	13	2	10	1
180	0	0	4	3	950	0	9	11	1	3900	13	11	3	8
200	0	0	5	4	1000	0	11	0	0	4000	14	8	0	0
220	0	0	6	5	1050	1	0	0	0	4100	15	4	10	11
240	0	0	7	7	1100	1	1	3	8	4200	16	2	0	6
250	0	0	8	4	1200	1	3	10	1	4300	16	11	4	8
260	0	0	9	0	1250	1	5	2	3	4400	17	8	11	6
280	0	0	10	5	1300	1	6	7	1	4500	18	6	9	0
300	0	0	11	11	1400	1	9	6	8	4600	19	4	9	1
320	0	1	1	6	1500	2	0	9	0	4700	20	2	11	11
340	0	1	3	3	1600	2	4	1	11	4800	21	1	5	3
350	0	1	4	3	1700	2	7	9	5	4900	22	0	1	4
360	0	1	7	0	1800	2	11	7	8	5000	22	11	0	0
380	0	1	8	1	1900	3	3	8	6	6000	33	0	0	0
400	0	1	9	2	2000	3	8	0	0	6603	40	0	0	0
420	0	1	11	4	2100	4	0	6	1	7382	50	0	0	0
440	0	2	1	7	2200	4	5	2	10	8087	60	0	0	0
450	0	2	3	0	2300	4	10	2	3	8735	70	0	0	0
460	0	2	4	0	2400	5	3	4	4	9338	80	0	0	0
480	0	2	8	5	2500	5	8	9	0	9904	90	0	0	0
500	0	2	9	0	2600	6	2	4	4	10440	100	0	0	0
520	0	2	11	9	2700	6	8	2	3	12786	150	0	0	0
540	0	3	2	6	2800	7	2	2	10	28035	747	0	0	0
										57069	2988	0	0	0

Voici une Table des longueurs du pendule simple observées avec soin en différens endroits.

2712. Sous l'équateur, à 2434^{t} de hauteur (Bouguer, *fig. de la Terre, pag.* 338, 343), par l'expérience immédiate.	36$^{po.}$	6$^{li.}$	70
Le même, supposé dans le vide.		6,	69
Sous l'équateur, à 1466 toises de hauteur.		6,	83
Le même, dans le vide.		6,	88
Sous l'équateur, au niveau de la mer (Bouguer, *ib.*).		7,	07
Après les réductions.		7,	21
Sous l'équateur, suivant la Condamine, *Mém. ac.* 1747, *pag.* 511, sans réduction.		7,	15
A Portobelo, lat. 9° 34′ (Bouguer, *ib.*).		7,	16
et avec les réductions.		7,	30
A Pondichéry, lat. 11° 56′ N. M. le Gentil, *Voyage aux Indes, Tom. I, pag.* 458.		7,	26
A Manille, 14° 34′ N. *Id.*		7,	43
A Madagascar, 17° 40′. *Id.*		7,	39
Au petit Goave, dans l'isle S.-Domingue, 18° 27′, Bouguer.		7,	33
et avec ses réductions.		7,	47
A l'Isle de France, 20° 10′ S. *Mém. acad.* 1754, *pag.* 56.		7,	66
Au cap de Bonne-Espérance, 33° 55′ S. *Mem.* 1751, *pag.* 433.		8,	07
A Malte, 35° 54′ N, par M. le chevalier d'Angos, en 1788.		8,	22
A Toulouse, 43° 36′. M. d'Arquier, *Observ. T. II.*		8,	40
A Geneve, 46° 12′, par M. Mallet.		8,	17
A Paris, 48° 50′. Mairan, *M. ac.* 1735, *V.* art. 2638.	36	8,	52
La Caille, *Mém.* 1754, *pag.* 56.			55
Bouguer, *fig. de la Terre.*			58
Après les réductions.			67
A Leyde, 52° 9′, par M. Lulofs.		8,	71
A Arensberg, dans l'isle d'Asel, 58° 15′. M. Grischow.			
A Pétersbourg, 59° 56′, par M. Mallet, *Mém. Pétersb. Tom. VII, pag.* 520, 8, 97, ou		9,	20
A Archangel, 64° 33′. *Mém de Pétersb.* 1771, *pag.* 585, 9, 10, ou		9,	15

A Pello, 66° 48′, Maupertuis, *fig. de la T. p.* 180.	9, 17
A Ponoi, en Laponie, 67° 4′. M. Mallet. . .	9, 17
A Kola, 68° 52′. *Mém. de Pétersb.* 1771, *pag.* 575.	9, 31
Au Spitzberg, 79° 50′. M. Lyons, *Voyage de Phips*, *pag.* 183, *Mém. de l'ac.* 1786, . . .	3, 40

2713. La maniere de déterminer la longueur du pendule simple avec la plus grande précision, et d'y faire toutes les corrections nécessaires, a été donnée par Mairan, dans les *Mém. de* 1735. La Condamine, Bouguer et Godin donnerent aussi des Mémoires sur cette matiere, dans le même volume; enfin, on peut voir le livre de Bouguer, *pag.* 330, et un Mémoire de 90 pages, dans le cinquieme volume des OEuvres de M. Boscovich, *Bassano* 1785. A l'égard des pendules composés, j'en ai parlé fort au long dans un mémoire que j'ai donné à la suite du Traité d'Horlogerie de M. Lepaute, en 1755.

2714. Quand on donne aux arcs d'un pendule une certaine étendue, la durée des oscillations augmente de sa huitieme partie multipliée par le sinus verse de l'arc décrit (*Euleri mechanica*, Tom. II, art. 161). C'est d'après cette regle que j'ai calculé la table suivante, où l'on voit de combien il retarde par rapport au vrai pendule simple, dont les arcs sont supposés infiniment petits.

Arcs décrits de chaque côté.		Retard diurne.
0° 15′	1 li. 9	0″ 1
0 30	3, 8	0, 4
1 0	7, 7	1, 6
2 0	15, 4	6, 6
3 0	23, 1	14, 8
4 0	30, 7	26, 3
5 0	38, 4	41, 1

2715. Les observations du pendule ont besoin de diverses corrections relativement à la chaleur qui dilate les instrumens, il y a deux centiemes de ligne pour 3° du therm.; et relativement au poids de l'air, il y avoit $\frac{4}{100}$ à ajouter, à cause de la pesanteur de l'air, au sommet de Pitchincha; mais l'effet de sa résistance peut se négliger. Il faut aussi avoir égard à la hauteur au-dessus du niveau de la mer. Bouguer trouve avec ces corrections que le pendule sous l'équateur au niveau de la mer doit être de 36 pou. 7 lig. 21, en ajoutant 75 milliemes pour la chaleur, et 65 pour le poids de l'air; il trouvoit pour Paris 36 pou. 8 lig. 67. (*Figure de la Terre*, *pag.* 342).

2716. On peut trouver la longueur du pendule simple en différens pays, par le moyen d'un pendule invariable [(a)], tel que celui dont

(a) Ce pendule invariable est une lentille de plomb, soudée sur une verge de fer, et qui se meut sur deux couteaux fortement rivés à la verge du pendule.

la Condamine s'étoit servi au Pérou (*Mém. acad.* 1745, *pag.* 476, 1747, *pag.* 508); il faisoit au Para 98740 oscillations par jour, à Quito 98708, à Pitchincha 98689. J'ai trouvé qu'il faisoit à Paris, en 24 heures de temps moyen, 98884 oscillations en 1767, et 98882 en 1781, entre 16 et 17° de chaleur; M. Mallet, à qui je l'envoyai pour son voyage de Laponie, en a trouvé 98852 à Geneve, 98941 à Pétersbourg, 98964 à Ponoi, et supposant le pendule simple qui bat les secondes à Paris 36 pou. 8 lig. 52, suivant M. de Mairan, réduction faite à la toise du Pérou; il en a conclu les trois autres longueurs par le rapport des carrés des nombres d'oscillations (3513). M. d'Agelet, à qui j'ai remis ce pendule pour son voyage autour du monde en 1785, nous rapportera de nouvelles comparaisons. On trouvera des applications de ces expériences du pendule, art. 3515 et 3577; la correction à raison de la force centrifuge, art. 3543.

2717. En multipliant la longueur du pendule par $\frac{c^2}{2}$ (3515), on a l'espace que les corps graves parcourent en une seconde par la pesanteur naturelle.

2718. En partant de l'équateur pour aller vers les poles, l'augmentation de pesanteur est comme le carré du sinus de la latitude. Newton, *Tom. III*, *pag.* 126. Il en est de même de l'alongement du pendule, quoiqu'il dépende de deux causes, et cela est vrai, même dans un sphéroïde, dont les couches augmentent de densité (Clairaut, *pag.* 247). En partant du pole, la diminution de pesanteur en un lieu donné est comme le carré du cosinus de la latitude; c'est d'après cette regle que j'ai calculé la table suivante.

2719. On voit, par la comparaison des trois premieres observations de Bouguer, que la pesanteur diminue sur les montagnes du Chili : on a prétendu que le contraire avoit été observé dans les Alpes en 1768; mais c'étoit une observation supposée, comme on le voit dans le journal de physique, mai 1773 : au reste Bouguer avoit déja montré que cela même pouvoit avoir lieu, si les montagnes avoient une densité beaucoup plus considérable que le total du globe, *ibid. pag.* 362; et M. d'Alembert en a parlé dans ses Opuscules, *Tom. VI.*

Table des longueurs du Pendule, assujettie aux observations faites au Pérou, à Paris et au Spitzberg. Mém. acad. 1785, pag. 1.

Latit.	Long. du pend.		Latit.	Long. du pend.		Latit.	Long. du pend.	
Degrés.	Lignes.	Centiemes.	Degrés.	Lignes.	Centiemes.	Degrés.	Lignes.	Centiemes.
0	439,	07	30	439,	72			
1	439,	07	31	439,	76	61	440,	95
2	439,	08	32	439,	80	62	440,	97
3	439,	08	33	439,	84	63	441,	01
4	439,	09	34	439,	87	64	441,	04
5	439,	09	35	439,	91	65	441,	07
6	439,	11	36	439,	95	66	441,	09
7	439,	12	37	440,	00	67	441,	12
8	439,	13	38	440,	04	68	441,	15
9	439,	14	39	440,	08	69	441,	18
10	439,	15	40	440,	13	70	441,	20
11	339,	16	41	440,	17	71	441,	22
12	439,	18	42	440,	22	72	441,	24
13	439,	20	43	440,	27	73	441,	26
14	439,	22	44	440,	31	74	441,	29
15	429,	24	45	440,	35	75	441,	31
16	439,	27	46	440,	40	76	441,	33
17	439,	30	47	440,	45	77	441,	35
18	439,	32	48	440,	49	78	441,	36
19	439,	35	49	440,	54	79	441,	37
20	439,	38	50	440,	58	80	441,	38
21	539,	41	51	440,	62	81	441,	39
22	439,	44	52	440,	65	82	441,	40
23	439,	47	53	440,	68	83	441,	41
24	439,	50	54	440,	71	84	441,	42
25	439,	53	55	440,	75	85	441,	43
26	439,	56	56	440,	79	86	441,	43
27	439,	59	57	440,	82	87	441,	44
28	439,	63	58	440,	85	88	441,	44
29	439,	67	59	440,	88	89	441,	44
30	439,	72	60	440,	92	90	441,	45
			61	440,	95			

Suivant cette table, l'alongement total du pendule, depuis l'équateur jusqu'au pole, est de 2^{li} 38; c'est ce que je trouve par les observations du capitaine Phips, faites à 79° 10′ de latitude, et par conséquent le plus près du pole où l'on ait fait des observations. Le premier nombre de cette table est 439^{li} 07; c'est ce que donnoit l'expérience immédiate suivant Bouguer, *pag.* 338 : mais en y faisant la correction, qui dépend du poids de l'air, Bouguer trouvoit 439, 21. On trouve des tables de la longueur du pendule dans Newton, Maupertuis (*Fig. de la Terre*), Bradley (*Phil. Tr.* 1734), dans le 3e volume des tables de Berlin, dans l'Encyclopédie. Une diminution de $2\frac{31}{100}$ lignes sur le pendule à secondes, le fait avancer de 3′ 56″ pour suivre le mouvement sidéral.

LIVRE SEIZIEME.

De la Précession et de la Parallaxe annuelle des étoiles fixes, des changemens de l'obliquité de l'écliptique, et du déplacement particulier de différentes étoiles.

Les étoiles fixes sont les termes de comparaison auxquels les astronomes rapportent sans cesse les mouvemens planétaires ; ainsi les situations des étoiles sont le fondement essentiel de toutes les recherches des astronomes ; et la connoissance de leurs mouvemens, vrais ou apparens, influe sur tout le reste de l'astronomie.

2720. On doit considérer six especes de mouvemens dans les étoiles fixes, la précession, l'aberration, la nutation, le changement général de latitude, les changemens particuliers à différentes étoiles, et la parallaxe annuelle que plusieurs astronomes y ont soupçonnée ; nous réserverons l'aberration et la nutation pour le livre suivant, comme ayant été trouvées ensemble, et fort récemment ; nous parlerons ici des quatre autres mouvemens : ils sont purement apparens, excepté peut-être les changemens particuliers ou dérangemens observés dans quelques étoiles.

2721. La précession est ce changement annuel d'environ $50''\frac{1}{4}$ par année (918), observé dans les longitudes de toutes les étoiles fixes, et qui vient du déplacement de l'équateur terrestre (3526). Le mouvement général de la précession se fait le long de l'écliptique, et autour de ses poles, en sorte que les latitudes des étoiles fixes n'en sont point affectées ; car tandis que nous voyons toutes les longitudes des étoiles plus grandes en 1750 de $26^\circ\frac{1}{2}$ qu'elles n'étoient au temps d'Hipparque (915), nous n'appercevons qu'à peine un petit changement dans les latitudes des étoiles fixes ; et ce changement même tient à une cause fort différente (2760). Aussi Bradley pensoit qu'il falloit déterminer la quantité de la précession par les seules déclinaisons des étoiles observées par Tycho et Flamsteed, parceque ne dépendant que de la seule position de l'équateur, elles sont plus propres à en faire connoître le déplacement. Pour moi je l'ai déterminée par les seules longitudes qui sont

sont dans le catalogue de Flamsteed (918), et j'ai trouvé 50″$\frac{1}{4}$ par année.

Par un effet de ce mouvement en longitude, toutes les étoiles changent d'ascension droite et de déclinaison; mais ce changement n'est pas le même pour différentes étoiles : nous allons donc commencer par la recherche de la précession en ascension droite et en déclinaison, qui est d'un usage continuel et indispensable dans l'astronomie.

Il est facile, quand on connoît la longitude et la latitude d'un astre, de trouver par la trigonométrie sphérique l'ascension droite et la déclinaison (908), et par conséquent d'avoir le changement de l'une quand on connoît le changement de l'autre; mais il est beaucoup plus facile de trouver la précession pour un petit espace de temps, par la considération des arcs supposés comme infiniment petits; c'est ce que nous allons exécuter par deux méthodes différentes, quoique cela soit compris dans les analogies différentielles qu'on verra ci-après.

2722. Supposons que ENT (FIG. 224) soit l'équateur, EQ l'écliptique, ED le changement du point équinoxial le long de l'écliptique, ou la précession en longitude, qui est de 50″ par an, DG un petit arc perpendiculaire sur EG; l'équateur ET prendra la situation DVT, en sorte qu'il tournera, pour ainsi dire, autour d'un point T situé dans le colure des solstices à 90° du point E; car puisque l'obliquité de l'écliptique ne change pas, c'est-à-dire que l'angle GED est égal à l'angle FDQ, c'est une preuve que le petit arc GE est parallele au petit arc DF, et que tous deux sont perpendiculaires sur DG; ce qui n'arrive qu'à 90° de l'intersection T des deux cercles, ou du pole de l'arc GD. Ainsi, les longitudes qui se comptoient du point E le long de l'écliptique EDQ se compteront du point D, et seront toutes changées d'une quantité ED. De même les ascensions droites qui se comptoient du point E le long de l'équateur EGNT se compteront du point D, et seront toutes changées de la quantité EG, parceque TG étant égal à TD, on a GE pour la différence entre TE et TD. Ainsi la précession en ascension droite commune à tous les astres sera égale à EG, ou ED cos. E (3801), c'est-à-dire, à la précession en longitude multipliée par le cosinus de l'obliquité de l'écliptique. Si l'on appelle P la précession en longitude qui est de 50″ par année, et O l'obliquité de l'écliptique de 23° 28′, l'on aura *la précession moyenne en ascension droite, ou la premiere partie de la précession totale en ascension droite* = P cos. O.

2723. Il y a un autre changement dans la précession en ascension droite, qui varie pour les différentes étoiles, parcequ'il dépend de leur situation. Soit A un astre quelconque, AK sa déclinaison lorsque l'équateur étoit en ET, AH sa déclinaison lorsque l'équateur est en DT; la différence entre TH et TK, ou entre GK et DH, qui est sensiblement égale au petit arc BK de l'équateur, marque un autre changement d'ascension droite dans l'étoile A, puisqu'au lieu de répondre au point K, elle répond au point H qui en differe de la quantité BK, changement qui est indépendant du changement GE que nous avons évalué ci-devant. De même KC indique à très peu près la différence entre la déclinaison AK et la déclinaison AH; c'est-à-dire la précession en déclinaison, qui dérive de la précession en longitude, ED.

La différence KB vient de ce que les petits arcs KB, CH, ne sont pas paralleles entre eux; ces arcs sont convergens vers le point d'intersection T, et cela d'autant plus que le cosinus de l'arc TC augmente; car dans le triangle CKT, supposé rectangle en C, la cotangente de l'angle K est comme le cosinus de son côté opposé TC (3887); donc la tangente du petit angle, ou l'angle lui-même formé par BK et la parallele CH, c'est-à-dire la convertence de ces deux arcs, change comme le cosinus de TC, ou le sinus de l'ascension droite DC; ainsi le petit angle T, mesuré par GD, étant égal à P sin. O (3801), et l'angle pouvant être pris pour la tangente, l'angle des arcs BK, CH, ou de leurs tangentes, est P sin. O. sin. ascension droite. C'est aussi l'angle des arcs AB et AK, ou de leurs tangentes tirées en B et en K. Connoissant l'angle des deux tangentes, et la longueur de ces mêmes tangentes, il est aisé de trouver l'arc BK; par exemple, si l'angle étoit d'une minute, et que la longueur des tangentes fût égale au rayon, l'arc BK seroit aussi d'une minute; mais si les tangentes qui forment l'angle d'une minute, sont seulement la moitié du rayon, l'arc BK, qui ne sera qu'à moitié chemin, ne seraaussi que la moitié, c'est-à-dire 30″; donc en général il faut multiplier l'angle des tangentes en B et en K, que nous avons trouvé ci-devant par la tangente de la déclinaison AB, pour avoir l'arc KB. Donc, *cette seconde partie* BK *de la précession en ascension droite sera* P sin. O sin. ascension droite tang. déclinaison. On en verra bientôt deux autres démonstrations (2726 et 2727). Celle qui précede est un peu abstraite; mais elle m'a paru plus propre à faire sentir la nature de cette quantité.

2724. La précession en déclinaison CK est à GD, ou P sin. O,

comme sin. TK ou cos. EK est à sin. TG (3879) ; donc CK = P sin. O. cos. EK. Ainsi la précession en déclinaison est P sin. O. cos. ascens. dr. (*Voyez* 2732).

2725. Je vais chercher aussi les mêmes expressions par la considération des poles de l'écliptique et de l'équateur ; c'est la maniere dont Euler et d'autres géometres ont traité les mouvemens des cercles de la sphere, et cette maniere est plus commode en certains cas. Soit P (FIG. 223) le pole de l'équateur, E le pole de l'écliptique, S une étoile, PSI le cercle de déclinaison, ESL le cercle de latitude, HI une portion de l'équateur, KL une portion de l'écliptique, FS un petit arc parallele à l'équateur, DS parallele à l'écliptique ; je suppose l'arc KL, ou l'angle KEL, égal à la précession en longitude, et l'arc HI, ou l'angle HPI, égal à la précession en ascension droite ; ce sont les quantités dont il faut trouver le rapport, c'est-à-dire que, par le moyen de KL, il faut avoir HI.

L'angle DSF est égal à l'angle de position PSE ; car l'angle PSF est droit, aussi bien que l'angle ESD : si l'on retranche l'angle commun ESF, il reste PSE = DSF. Le petit triangle DSF étant sensiblement rectiligne, on a $\frac{DS}{SF} = \frac{1}{\text{cos. PSE}}$ (3801) $= \frac{\text{tang. S}}{\text{sin. S}}$. Puisque EL et PH sont des quarts-de-cercles, on a $\frac{KL}{DS} = \frac{1}{\text{sin. ES}}$ (3879), et $\frac{SF}{HI} = \frac{\text{sin. PS}}{1}$; ainsi $\frac{KL}{HI}$, qui est le rapport des précessions, est $\frac{\text{DS sin. PS}}{\text{SF sin. ES}}$, ou $\frac{\text{sin. PS tang. S}}{\text{sin. ES sin. S}}$: mais sin. ES sin. PSE = sin. PE sin. EPS (397) ; donc $\frac{KL}{HI} = \frac{\text{tang. PSE. sin. PS}}{\text{sin. PE. sin. EPS}}$.

2726. Il faut, dans cette expression, faire évanouir tang. PSE, puisqu'on peut exprimer l'angle S par l'angle P et par les côtés PS, PE, au moyen de l'ascension droite et de la déclinaison de l'étoile avec l'obliquité de l'écliptique, qui sont les données de ce problême. Or on a tang. S $= \frac{\text{sin. P}}{\text{sin. PS. cot. PE.} - \text{cos. P. cos. PS}}$ (3951). Si l'on met cette valeur dans l'expression de $\frac{KL}{HI}$, on aura $\frac{\text{sin. P. sin. PS.}}{\text{sin. PE. cot. PE. sin. P. sin. PS} - \text{sin. PE. sin. P. cos. P. cos. PS}}$; divisant le numérateur et le dénominateur par sin. P sin. PS, et mettant cos. PE à la place de sin. PE cot. PE, on aura $\frac{KL}{HI} = \frac{1}{\text{cos. PE.} - \text{sin. PE. cos. P. cot. PS}}$: mais l'angle P est le complément de l'ascension droite ; donc la précession en ascension droite HI est égale à la précession en longitude

multipliée par (cos. $23^\circ\frac{1}{2}$ — sin. $23^\circ\frac{1}{2}$. sin. asc. dr. tang. déclin.) 2722, 2723.

On trouveroit cette expression par les formules différentielles (4017), en considérant comme constans les côtés SE, PE, ou AC et BC; mais j'ai voulu en faire voir ici le procédé, appliqué aux cercles mêmes de la précession, en présentant les différentes expressions de la même quantité.

2727. On peut démontrer autrement la même formule, en laissant l'étoile fixe en S, et considérant le pole de l'équateur qui se meut réellement autour du pole E de l'écliptique, sur le petit arc Pp d'un parallele à l'écliptique; car toutes les fois que l'intersection de deux cercles change de place par le mouvement d'un des cercles, l'inclinaison restant la même, il s'ensuit que le pole du cercle mobile décrit aussi un arc de cercle autour du pole du cercle immobile (1353). Supposons un grand cercle PpR perpendiculaire à EP, c'est-à-dire le colure des équinoxes, qui est confondu avec le parallele à l'écliptique sur le petit espace Pp et un arc perpendiculaire SR: l'étoile S change d'ascension droite par deux raisons; la premiere, c'est que le colure des solstices PEA passe en pEB, et va répondre sur l'équateur en un autre point B, en sorte que BA = BEA sin. EA (3819), c'est-à-dire, égal à la précession en longitude multipliée par le cosinus de l'obliquité de l'écliptique; c'est une quantité constante qui affecte toutes les étoiles, puisque toutes les ascensions droites se rapportent au colure des solstices PEA ou PEB, ou au colure des équinoxes PR, qui en est toujours à 90°. C'est la premiere partie de la précession en ascension droite (2722, 2726).

Mais il y a une seconde cause de changement dans les ascensions droites de différentes étoiles; elle vient de ce que l'angle SPR se change en un angle SpR; or dans le triangle SPR, dont l'angle R est constant, ainsi que le côté SR, le changement de l'angle P ou dSPR = Pp. sin. P. cot. PS (4001); mais Pp = PEp. sin. $23^\circ\frac{1}{2}$ (3879), et l'angle SPR est égal à l'ascension droite de l'étoile; donc ce changement de l'ascension droite = PEp sin. $23^\circ\frac{1}{2}$. cot. PL. sin. asc. droite, c'est-à-dire à la précession en longitude, multipliée par le sinus de l'obliquité de l'écliptique, par le sinus de l'ascension droite de l'étoile, et par la tangente de sa déclinaison, comme dans les art. 2723 et 2726.

2728. Si l'on appelle L la précession en longitude, on aura la précession en ascension droite composée de deux parties; l'une L cos. $23^\circ\frac{1}{2}$, l'autre = L. sin. $23^\circ\frac{1}{2}$ sin. asc. dr. tang. décl. Si l'on appelle M la premiere partie L cos. $23^\circ\frac{1}{2}$ de l'expression précédente,

et qu'à la place de L on mette dans la seconde $\frac{M}{\cos. 23^\circ \frac{1}{2}}$, on aura pour cette seconde partie M. tang. $23^\circ \frac{1}{2}$. sin. asc. dr. tang. décl. Ainsi la premiere partie de la précession en ascension droite sera constante, et la seconde sera égale au produit de la premiere par la tangente de $23^\circ \frac{1}{2}$, par le sinus de l'ascension droite de l'étoile, et par la tangente de sa déclinaison.

Je suppose la précession en longitude L pour dix ans égale à $8' 24'' 35$, en la multipliant par cosinus $23^\circ 28'$, on a $7' 42'' 64$, qui est la premiere partie M de la précession en ascension droite, commune à toutes les étoiles. Si l'on multiplie cette premiere partie par tang. obl. éclip. par sin. asc. dr. et par tang. déclin., on a la seconde partie en forme d'équation, qu'on peut appliquer à chaque étoile.

2729. Le changement qu'on observe est de $8' 22'' 5$ seulement, parceque la précession est diminuée par le déplacement de l'écliptique; mais il est plus exact d'employer ici $8' 24'' 35$, qui est le vrai mouvement de l'équateur, et d'ôter ensuite la quantité constante $2'' 02$ de la précession pour dix ans (2768). J'ai donné une table de précession à la suite de celles de Halley, réimprimées à Paris en 1759 (A Paris, chez Bailly, rue S.-Honoré).

2730. On suppose dans la figure 223 l'étoile S dans les six derniers signes d'ascension droite, puisque le point S est plus près du pole de l'écliptique que l'équateur; on en jugera à l'inspection du globe, et comme on a mis — sin. asc. dr. au lieu de — cos. P, on a supposé le 3ᵉ quart d'ascension droite, qui est le seul des deux derniers quarts où le sinus et le cosinus aient le même signe (3794). Ainsi la quantité — cos. P de la formule (2726) devient positive quand l'ascension droite est moindre que six signes, parcequ'alors l'angle P est obtus; l'équation doit donc être ajoutée dans les six premiers signes d'ascension droite; mais dans les six autres, le sinus devenant négatif, elle doit être retranchée de la premiere partie de la précession. On observera aussi que, pour les étoiles dont la déclinaison est australe, la tangente de la déclinaison devient négative; ainsi l'on doit changer les signes des équations (3796).

2731. Quand la seconde partie de la précession est soustractive et plus grande que la premiere, l'ascension droite de l'étoile va en diminuant d'une année à l'autre, comme cela arrive pour quelques étoiles de la petite Ourse et du Dragon, renfermées dans la courbe dont nous parlerons 2734.

2732. La précession en déclinaison est exprimée par DF; or dans

le triangle DFS on a $\frac{DF}{DS}$ = sin. S (3803), et au lieu de DS substituant KL sin. ES (3879), on a DF = KL sin. ES. sin. S; mais sin. ES. sin. S = sin. PE. sin. P (3909); donc DF = KL. sin. PE. sin. P; donc la *précession en déclinaison est égale à la précession en longitude multipliée par le sinus de l'obliquité de l'écliptique et par le cosinus de l'ascension droite de l'étoile*, c'est-à-dire L. sin. 23° ½. cos. asc. dr., et mettant pour L comme ci-devant $\frac{M}{\text{cos. } 23^\circ \frac{1}{2}}$, la précession en déclinaison devient M tang. 23° ½ cos. asc. droite; elle est additive dans les signes ascendans pour les étoiles boréales : c'est ainsi que j'ai formé la table que j'ai ajoutée à celles de Halley, *pag.* 177, de même que les précessions en déclinaison du catalogue des étoiles : celles qui sont dans le catalogue de Flamsteed sont peu exactes, parcequ'elles n'ont pas été calculées par une semblable formule. On a vu une autre démonstration de cette précession en déclinaison art. 2724.

2733. On peut, avec une même table, trouver la seconde partie de la précession en ascension droite pour 45° de déclinaison, et la précession en déclinaison; car une même table peut exprimer M tang. 23° ½. sin. asc. droite, tang. déclinaison (2728), si tang. déclin. = 1, et exprime M tang. 23° ½. cos. ascension droite (2730), pourvu qu'il y ait des argumens qui soient renversés, c'est-à-dire différens de trois signes; ainsi la partie M tang. 23° ½ sin. ascension droite, qui répondra à 1^s d'argument, sera la même chose que M tang. 23° ½ cos. asc. droite pour 4^s d'argument; on peut donc réunir à côté d'un même nombre les argumens 1^s et 4^s; lorsqu'on emploiera 1^s, on aura la précession en ascension droite (pour 45° de déclinaison); lorsqu'on emploiera 4^s, on aura la précession en déclinaison; la premiere devra être multipliée par la tangente de la déclinaison pour avoir la seconde partie ou équation de la précession en ascension droite (2728). Tel est l'artifice employé dans la table de la Caille (*Astronomiæ fundamenta*).

2734. Pour les étoiles qui ont l'angle de position égal à 90°, c'est-à-dire dont le cercle de déclinaison et le cercle de latitude se coupent à angles droits, la seconde partie de la précession en ascension droite détruit la premiere; en sorte que la précession est nulle, parceque le mouvement en longitude SD se dirige alors vers le pole P. Tous ces points sont sur la courbe que forme à la surface de la sphere l'intersection d'un cône oblique dont les deux côtés passent par les poles de l'écliptique et de l'équateur, et dont la

base circulaire est tangente à la sphere sur un des poles, c'est-à-dire perpendiculaire à un des côtés du cône, et a pour diametre la tangente de 23° 28′. C'est une courbe à double courbure, qui, dans le sens du colure PE, occupe 23° 28′, mais qui occupe 23° 58′ dans le sens perpendiculaire répondant au milieu du cercle.

2735. Le triangle PES, quand il est rectangle en S, donne cotang. lat. = tang. 23° 28′ sin. longit. (3884); et voici une table qui montre pour chaque longitude par quel degré de latitude passe cette courbe; elle détermine les étoiles qui auroient la plus grande parallaxe annuelle en déclinaison, et au dedans elle renferme toutes celles dont la précession est négative, c'est-à-dire décroissante pendant que la longitude augmente. Cette table est plus étendue dans le traité de Manfredi, *De annuis stellarum aberrationibus*, 1729.

Longit.	Latitude.
0	90° 0′
10	85 41
20	81 34
30	77 44
50	71 36
70	67 47
90	66 32

2736. La précession en ascension droite et en déclinaison, trouvée par les expressions précédentes, est sensiblement uniforme pendant un espace de dix ans; mais dans les dix années suivantes, il peut y avoir une demi-seconde de plus ou de moins, parceque les sinus et les cosinus changent sensiblement: par exemple, la précession en déclinaison pour *Antarès*, entre 1745 et 1755, est 1′ 29″3; mais de 1755 à 1765, elle n'est que de 1′ 28″7; cette inégalité se pourroit aussi réduire en tables; c'est sur-tout pour l'étoile polaire que l'inégalité est très considérable. *V*. Mr Bernouilli, recueil pour les astronomes, II, 52, et la Connoiss. des Temps de 1789; son mouvement qui, en 1790, est de 3′ 4″, augmente de 1″ chaque année.

Si donc on veut avoir la précession en ascension droite pour un long espace de temps, il faudra calculer la longitude, et ensuite l'ascension droite qui lui répond, ou bien calculer le mouvement de 10 en 10 ans par les formules précédentes, en changeant à chaque fois l'ascension droite et la déclinaison, ou enfin avoir des formules plus rigoureuses. M. de Lambre les a données dans la *Connoiss. des Temps* de 1791, et M. Cagnoli, dans sa *Trigon.*, *pag.* 471.

2737. La précession apporte aussi un changement à l'angle de position (1049); car l'angle EDP (FIG. 223) est plus ou moins grand que l'angle ESP; sa variation est égale à l'angle DES, multiplié par le sinus de PE et le cosinus de l'angle P, le tout divisé par le sinus de PS (4015). Ainsi le changement annuel de l'angle de

position est $\frac{-50'' \sin. 23^\circ \sin. \text{asc. dr.}}{\cos. \text{déclin.}}$. Il est de 20″01 pour les étoiles situées dans l'équateur, et en même temps près du colure des solstices; mais les étoiles situées sur le colure des équinoxes, dont l'ascension droite est 0° ou 180°, n'ont aucun changement dans leur angle de position en vertu de la précession. Cet angle, quand il est aigu, va en diminuant dans le 1er et le 3e quart d'ascension droite, et il va en augmentant dans le second et le 4e quart; mais s'il est obtus, ce qui ne peut arriver que dans le 3e et le 4e quart d'ascension droite, il augmente dans le 3e, et diminue dans le 4e; au reste, il suffit de changer le signe de la formule, soit quand l'astre est dans les signes descendans, soit quand les déclinaisons sont australes. On trouvera ces variations dans la table des angles de position (1050).

Diminution de l'obliquité de l'Écliptique.

2738. Les formules précédentes suffiroient pour trouver le changement des étoiles en ascension droite et en déclinaison, s'il étoit exactement vrai que la latitude fût invariable, et que tout le changement vînt du mouvement de l'équateur et de celui des points équinoxiaux le long de l'écliptique. Hipparque, Ptolémée, et tous les astronomes qui suivirent jusqu'au temps de Tycho, supposerent en effet que les latitudes des étoiles fixes étoient constantes, et que leur mouvement de précession se faisoit parallèlement à l'écliptique; mais Tycho ayant observé, avec plus de soin que personne, les positions de beaucoup d'étoiles, apperçut que celles qui sont voisines des solstices avoient changé de latitude : en effet, on voit que toutes les latitudes méridionales des étoiles situées vers trois signes de longitude, sont devenues plus petites, et les latitudes boréales plus grandes, au moins d'un tiers de degré (Tycho, *Progymn. pag.* 233).

2739. J'ai fait voir, en calculant plus exactement les observations primitives rapportées dans l'Almageste de Ptolémée, et qui servirent autrefois à déterminer les latitudes des étoiles fixes, qu'en effet les points de l'écliptique situés vers le solstice d'été se sont rapprochés de l'équateur et des étoiles méridionales (*Mém. acad.* 1758). On verra bientôt la cause de ce mouvement (2751); en voici encore d'autres preuves, tirées des observations multipliées qu'on a faites de l'obliquité de l'écliptique.

2740. Ptolémée nous dit expressément (*Almag. I*, 11) qu'il a trouvé pendant plusieurs années la distance des tropiques de 47 degrés

degrés avec deux tiers d'une portion majeure (ou d'un degré), et trois quarts d'une portion mineure (ou d'une minute), c'est-à-dire 47° 40′ 45″, dont la moitié est 23° 50′ 22″. Ainsi, ajoute-t-il, c'est à-peu-près la même partie qu'a trouvée Eratosthene, et dont Hipparque s'est servi; car la distance des points solstitiaux est, selon eux, $\frac{11}{83}$ de la circonférence du méridien (*Ptol. Alm. pag.* 17); ce qui fait 23° 51′ 20″, environ 250 ans avant notre Ere.

2741. Ptolémée donne à la fin de son livre une table des ombres sous différens paralleles; on y voit que la hauteur du gnomon étant de 60 parties, la longueur de l'ombre à Marseille étoit de 20 $\frac{5}{6}$. On attribue à Pythéas cette détermination; *voyez* Strabon, L. II, *pag.* 134; Gassendi, *Tom. IV, pag.* 523, 527, *in Vita Peir. et Epist. ad Vendel. de prop. gnom. ad solstitium;* Louville, *Hist. acad.* 1716, *pag.* 48; *Acta erudit. jul.* 1719; *Veidler, Hist. astron. pag.* 120; Riccioli, *Alm. I*, 164. Ces différens témoignages s'accordent à-peu-près à donner l'obliquité de l'écliptique 200 ans avant notre Ere de 23° 51′ : il me paroît qu'il y a 7′ de trop; mais cette erreur est petite pour ce temps-là. Si on compare cette obliquité avec celle que nous observons actuellement, de 23° 28′ (2749), on trouve une diminution de 69″ par siecle.

Le P. Riccioli s'efforce de prouver que l'obliquité de l'écliptique n'étoit alors que de 23° $\frac{1}{2}$ (*Almag. I,* 164. *Astr. ref. pag.* 19. *Geog. ref. pag.* 308); mais on ne sauroit avoir actuellement de preuves assez démonstratives pour contredire quatre observations anciennes, qui étoient d'ailleurs faciles à faire, du moins à 10′ près.

Il est vrai qu'en consultant Pappus d'Alexandrie (*Collec. l. VI, prop.* 35; Riccioli, *Astron. refor. pag.* 20), qui vivoit 200 ans après Ptolémée, on trouve à-peu-près l'obliquité de l'écliptique telle qu'elle est aujourd'hui; mais c'est en admettant l'interprétation de Commandinus, à laquelle Vendelinus n'a pas cru devoir déférer; d'ailleurs Pappus n'étoit pas autant observateur qu'Eratosthene, Hipparque et Ptolémée, et son but n'étoit pas de donner une détermination astronomique de l'obliquité de l'écliptique.

2742. Dès l'an 106 avant notre Ere, les astronomes chinois donnent comme un principe connu que l'obliquité de l'écliptique est de 24° chinois, qui font 23° 39′ 18″ (P. Gaubil II, 114) : cette quantité est moins considérable que celle des Grecs; mais elle prouve cependant aussi une diminution dans l'obliquité de l'écliptique, qui s'accorde même avec plusieurs observations modernes, et donne une diminution de 35″ par siecle.

2743. Albategnius, qui vivoit vers l'an 880 (*De sci. stell. c.* 4),

dit qu'il a observé avec le plus grand soin la distance du Soleil au zénith dans le méridien, à Aracte, de 59° 36′ en hiver, et la plus petite de 12° 26′; d'où il conclut l'obliquité de l'écliptique 23° 35′. Cette observation fut faite avec une alidade très longue et très bien vérifiée. Il faut encore y ajouter 40″, pour l'effet de la réfraction, moins la parallaxe, et l'on aura 23° 35′ $\frac{2}{3}$ pour l'obliquité de l'écliptique vers l'an 900 (355); ce qui suppose une diminution de 50″ par siecle. Cette observation differe peu de celle d'Almamon (350); la diminution qu'elle donne tient un milieu entre celles qu'on déduit des observations plus anciennes. Edward Bernard a rapporté plusieurs autres observations des Arabes sur l'obliquité de l'écliptique dans les Transactions philosophiques de 1684; on les trouvera aussi dans un long mémoire que j'ai donné à ce sujet, *Mém. de l'acad.* 1780, *pag.* 296.

2744. Par les observations de Co-cheou-King, on trouve pour 1278, 23° 32′ 12″ (381).

Par celles de Walthérus, faites à Nuremberg, la Caille trouve, pour l'an 1490, 23° 29′ 47″ (*Mém. ac.* 1757); il en résulte une diminution de 34″ par siecle.

Suivant Tycho-Brahé (*Progymn. pag.* 17, 28, *epist. pag.* 10), l'obliquité de l'écliptique, en 1587, étoit de 23° 31′ 30″; mais en calculant mieux toutes ses observations, on trouve 23° 29′ 30″; diminution 44″.

2745. Les observations d'Hévélius donnent, pour 1660, 23° 29′ 0″; diminution 46″ par siecle. Le P. Ximenès, par le moyen du gnomon de Florence, construit vers 1480, trouve 34″ (*Mém.* 1780, *pag.* 294. Cassini le fils, par les observations de Richer faites à Cayenne en 1672, trouva l'obliquité de 23° 28′ 54″ (*Elém. d'astron. pag.* 112), et par celles de son pere, faites au gnomon de S.-Pétrone, 23° 29′ 0″ : c'est ainsi qu'il l'employa lui-même dans ses tables. Les observations de Richer ont été discutées par M. le Monnier (*Mém. acad.* 1769, *pag.* 18, 1774, *pag.* 48.). Elles me paroissent donner une diminution de 33″ par siecle.

2746. Nous voyons aussi que Flamsteed, en 1689 et 1690, trouva, par des observations répetées, l'obliquité de l'écliptique de 23° 28′ 56″ (*Proleg. pag.* 114); il en faut ôter 8″ (2897), et l'on aura l'obliquité moyenne pour 1690, 13° 28′ 48″, quantité plus grande de 30″ que celle de tous les observateurs modernes, et qui donne 47″ de diminution. Il examine des observations de Walthérus, de Tycho, de Riccioli, d'Hévélius, de Mouton, de Richer, de la Hire et de Margraf; et il trouve toujours le même résultat par les plus voisines,

comme par les plus éloignées ; mais le systême qu'avoit embrassé Flamsteed, lui faisoit peut-être donner la préférence aux observations qui lui étoient favorables.

2747. Bianchini, en 1703, trouva l'obliquité de l'écliptique 23° 28′ 35″ (*De Gnomone clementino*). Horrebow, par les observations de Romer, faites en 1709, trouve 23° 28′ 47″ (*Atrium astronomiae*, *pag.* 33), diminution 50″. M. Cassini le fils, par les observations faites depuis un siecle à l'Observatoire, trouve la diminution de 63″½ (*Mém. acad.* 1778, *pag.* 504 ; *Connoiss. des Temps* 1781, *pag.* 426). M. Méchain, par un grand nombre de comparaisons, m'a dit avoir trouvé 39″ en 1780. Je m'en tenois à 33″, en considérant que cela approchoit des observations de la Chine (2742), de Walthérus, de Tycho, de Richer à Cayenne en 1662, de Mouton à Lyon, de Romer en 1706, de Louville en 1716 ; elle me paroissoit indiquée par les gnomons de Florence, et de saint Sulpice de Paris (*Mém.* 1774, *pag.* 253) ; enfin, par les hauteurs solstitiales que j'ai observées au college Mazarin, avec le même instrument que la Caille, sur les mêmes points de la division ; on peut voir le détail de ces comparaisons dans les *Mém. de* 1780, *pag.* 293. J'ajouterai que M. le Monnier a donné à l'académie, en 1788, le résultat des hauteurs solstitiales du soleil, faites pendant 50 ans, avec le même quart-de-cercle de trois pieds, et il a trouvé 25 ou 30″ pour un siecle.

2748. Cependant il y a beaucoup d'observations qui donnent une augmentation plus forte. M. Maskelyne, par plusieurs solstices observés de 1765 à 1772, avec d'excellens instrumens, trouve, pour le premier janvier 1769, l'obliquité moyenne 23° 28′ 8″5 (*Philos. Trans.* 1787) : si on la compare avec celle de Bradley pour 1750, 23° 28′ 19″, on trouve 55″ par siecle, ou 54″ ; M. Hornsby 58″ par les siennes, depuis 1774. On a environ 50″ par les observations d'Almamon, d'Albategnius, de Co-cheou-King, d'Hévélius ; enfin la théorie donne environ 50″ quand on emploie la masse de Vénus, que j'ai établie par plusieurs considérations (3564) : je me suis donc déterminé à adopter cette diminution de 50″ par siecle, et je m'en suis servi pour faire la table de l'obliquité en divers siecles. *Tables du Soleil*, *pag.* 4.

2749. L'obliquité pour le temps actuel a été déterminée par la Caille de 23° 28′ 19″, à l'époque de 1750. Bradley avoit trouvé la même quantité avec le grand quart-de-cercle mural de 8 pied de rayon, qui est à l'Observatoire royal de Greenwich (*Naut. Alm.* 1767, *pag.* 152) : Mayer m'envoya des observations qui donnent

23° 28′ 18″. Par les observations faites à Quito en 1736 et 1737, avec un secteur de 12 pieds, Bouguer et la Condamine trouverent 23° 28′ 23″ (Bouguer, *fig. de la Terre*, *pag.* 258). Cette quantité, réduite à l'obliquité moyenne, donne 23° 28′ 37″, ce qui feroit, pour 1750, 23°28′30″; mais M. le comte de Cassini ne trouve que 23° 28′ 12″, *Mém.* 1778, *pag.* 490; le milieu est 23° 28′ 21″. Je supposerai donc, pour 1750, 23°28′18″, et une diminution d'une demi-seconde par an; par ce moyen j'ai, pour 1786, la moyenne 23° 28′ 0″, ainsi que par les observations de M. Maskelyne. M. Cagnoli a trouvé 2″ de moins, M. d'Agelet 5″, M. Cassini 8″ de moins; mais les astronomes de Milan trouvent 2″ de plus, et par mes observations faites en 1782 au college Mazarin, je trouverois 6″ de plus, et M. Ximenès 7″ de plus, ou 23° 28′ 7″: le milieu entre tous ces résultats est encore exactement 23° 28′ 0″, obliquité moyenne au commencement de 1786.

2750. Il est donc prouvé par les observations de l'obliquité de l'écliptique faites dans tous les temps, aussi bien que par les latitudes des étoiles rapportées dans Ptolémée, que l'écliptique se rapproche de l'équateur; il s'agit actuellement d'en donner une explication physique, et conforme aux principes de l'attraction.

Euler est le premier qui ait fait voir que l'attraction des planetes sur la Terre devoit produire cet effet (*Inégalités de Saturne*, *pag.* 79; *Mémoires de Berlin, Tom. X,* 1754; *Pieces des prix, Tom. VII*). J'en ai donné fort au long les démonstrations et les calculs (*Mémoires* de 1758, 1761, 1780, *pag.* 307; j'en donnerai ici les principes avec les résultats. M. de la Grange en a donné d'autres dans les *Mém. de l'acad.* pour 1774; ses formules donneroient à-peu-près le même résultat que les miennes, si on employoit les mêmes valeurs pour les masses des planetes; mais il s'est servi de celles que j'avois publiées dans la *Connoissance des Temps* de 1774, avant les derniers calculs du passage de Vénus, ce qui lui donne une plus grande diminution. Dans les *Mém.* de Berlin pour 1782, il trouve 61″ 56; mais je crois que, dans cet endroit, il donne encore à Vénus une masse trop grande (3564).

Explication physique de la diminution de l'obliquité de l'Ecliptique, et du changement de latitude des étoiles.

2751. Toutes les fois que deux planetes tournent autour du même centre dans le même sens, mais dans des plans différens, chacune de ces planetes fait rétrograder sur son orbite le nœud de

l'autre (3682); nous avons déja expliqué ce mouvement (1348) à l'occasion des planetes qui agissent les unes sur les autres; voyons ce qui doit avoir lieu sur la Terre en conséquence de ce déplacement, et prenons pour exemple l'attraction de Vénus sur la Terre. Soit EDQ l'équateur (FIG. 224), EGN l'écliptique, NVQ l'orbite de Vénus, en sorte que la Terre avance de E en N le long de l'écliptique, et Vénus de Q en N dans son orbite; l'attraction de Vénus sur le globe de la Terre fait que le point N rétrograde en V, c'est-à-dire que le nœud de l'écliptique sur l'orbite de Vénus avance dans un sens contraire au mouvement de la Terre; on trouve cette quantité par la formule 3688.

L'écliptique changera donc de situation, et passera de N en DV, sans que l'inclinaison en soit affectée, c'est-à-dire de telle sorte que l'angle V soit encore égal à l'angle N, mais que la rétrogradation du nœud de l'écliptique sur l'orbite de Vénus soit de la quantité NV dans une année. Or l'équateur EQ ne change point de situation par l'effet dont il s'agit, parceque la rotation de la Terre est indépendante de son mouvement annuel, et que l'attraction des planetes n'est pas sensible sur l'axe de notre sphéroïde; ainsi l'écliptique EN au lieu de couper l'équateur au point E, le coupera en D l'année suivante; le point équinoxial E avancera de la quantité ED le long de l'équateur, ou de la quantité EG le long de l'écliptique; et ce déplacement de l'écliptique produira avec le temps des changemens dans les longitudes et les latitudes de toutes les étoiles, et dans les inclinaisons des orbites planétaires rapportées à l'écliptique.

2752. Dans un triangle ENQ, dont les angles Q et N sont constans, et dont le côté NQ varie, par exemple, de $2''39$, comme cela me paroît indiqué par la diminution observée dans l'obliquité de l'écliptique d'une demi-seconde par année; le changement ED qui en résulte sur l'autre côté EQ, est égal à $\frac{2'' \text{sin. N. cos. EN.}}{\text{sin. E.}}$ (4034). Si l'on abaisse une perpendiculaire DG sur l'écliptique EGN, la petite quantité EG sera $=$ ED cos. E; donc multipliant la valeur précédente de ED par cos. E, l'on aura $2''$ sin. N cos. EN cotang. E pour la quantité EG, dont le point équinoxial a changé par l'action de Vénus le long de l'écliptique. Quant au changement que reçoit, par son autre extrémité V, l'arc de l'écliptique DV; il est inutile d'y avoir égard; il n'affecte que la longitude du nœud V de Vénus sur l'écliptique, mais il ne change rien aux longitudes des autres astres, qui se comptent du point équinoxial E ou D (Voyez encore 2756). Ces longitudes ne sont changées qu'à raison de ce que l'équinoxe et

l'étoile ne changent pas de position également par rapport à ce nœud, en comptant le long de l'écliptique; aussi la quantité que nous cherchons est bien plus petite que le déplacement total de l'écliptique.

2753. Nous pouvons encore trouver le même résultat, en considérant les poles des trois cercles dont nous venons d'examiner les circonférences. Soit E (FIG. 225) le pole de l'écliptique, P le pole de l'équateur ou le pole du monde, V le pole de l'orbite de Vénus. Le mouvement de l'écliptique sur l'orbite de Vénus produit un mouvement du pole de l'écliptique autour du pole de l'orbe de Vénus (1353); et j'ai fait voir qu'il revient au même de dire que l'écliptique rétrograde de 5″ sur l'orbite de Vénus, ou que le pole de l'écliptique rétrograde autour du pole de l'orbite d'une quantité EM qui vaut 5″ sur la circonférence du petit cercle EMN, dont le rayon EV est la distance des poles de l'écliptique et de l'orbite de Vénus.

Dans le triangle sphérique PVE l'on a deux côtés PV et VE constans, tandis que tout le reste varie par le mouvement du pole E dans la circonférence EMN; de là il suit (4015) que la variation de l'angle P, ou petit angle EPM, $= \frac{\text{MX}}{\text{sin. PE}} = \frac{\text{EM sin. XEM}}{\text{sin. PE}} = \frac{2'' \text{sin. EV sin. XEM}}{\text{sin. PE}} = \frac{2'' \text{sin. EV cosin. PEV}}{\text{sin. PE}}$. Mais dans le triangle PBE, la variation de P est à celle de E comme le rayon est au cosinus de PE (3999); donc la variation de l'angle PEB, qui est la même que celle de l'angle PEV, $= 5''$ sin. EV cos. PEV cotang. PE, ce qui revient au même que la formule précédente (2752); car EV est égal à l'inclinaison de l'orbe de Vénus, PE est égal à l'obliquité de l'écliptique, et l'angle PEV égal à la longitude du nœud de Vénus; puisque c'est l'angle formé au pole de l'écliptique E, entre le colure des solstices EP qui est à 90° des équinoxes, et le cercle EV, qui passe par les poles de l'orbe de Vénus, et qui est à 90° de son nœud. Ce changement de l'angle PEB est la quantité dont le colure des solstices EP change de place en prenant la situation nouvelle MP, et par conséquent le changement du colure des équinoxes, qui est toujours à angles droits avec celui des solstices; c'est donc aussi la quantité dont le point équinoxial s'éloigne de la ligne EMBC, qui est supposé fixe pendant le temps que le pole met à parcourir le petit espace EM. Ce point équinoxial étant toujours à l'extrémité d'un arc de 90° ou d'un cercle de latitude perpendiculaire à EP, et dont la position change autant que la position du colure EP, toutes les longitudes célestes qui se comptent depuis le colure des équinoxes changeront

de cette quantité, qui sera par conséquent une partie de la précession des équinoxes.

2754. On trouveroit aussi dans le triangle PEV la variation du côté PE égale à 2″ sin. EV sin. PEV (4018); c'est la quantité dont l'obliquité de l'écliptique PE varie chaque année par l'action de Vénus. Mettant à la place de VE sa valeur 3° 23′ 35″, et à la place de l'angle E 74° 26′, longitude du nœud de Vénus en 1750, et multipliant par 100, l'on trouvera 30″88 par siecle, dont l'obliquité de l'écliptique diminue par l'action seule de Vénus.

2755. En faisant la même substitution dans l'autre formule (2753), qui exprime le changement de l'angle E, l'on aura 2″ sin. 3° cos. 74° cot. 23° $\frac{1}{2}$ = 0″0887 pour la quantité dont l'angle E (FIG. 225), ou le point D (FIG. 224), varie chaque année par l'action de Vénus; c'est-à-dire que la précession des équinoxes diminue de 8″87 chaque siecle par l'action de Vénus. Nous verrons bientôt une autre maniere de trouver les mêmes résultats (2765).

2756. Nous pouvons aussi calculer, par les mêmes principes, la quantité dont les longitudes et les latitudes des étoiles fixes varient par ce déplacement de l'écliptique. Nous avons démontré (2723) que le pole de l'équateur tournant autour du pole de l'écliptique, l'inégalité des positions des astres le long de l'équateur étoit égale à L sin. 23° sin. asc. dr. tang. déclin., c'est-à-dire, qu'en général l'inégalité des positions comptées sur le cercle tournant est égale au mouvement du pole tournant, multiplié par le sinus de la distance des deux poles, par le sinus de la distance de l'étoile au nœud des deux cercles, mesurée le long du cercle tournant, et par la tangente de la distance au cercle tournant. Si nous appliquons ce théorême au mouvement du pole de l'écliptique autour du pole de Vénus, nous aurons, pour le changement de longitude qui en résulte chaque année sur une étoile, 5″ multipliées par le sinus de l'inclinaison de Vénus, par le sinus de la distance de l'étoile au nœud de Vénus, mesurée le long de l'écliptique, et par la tangente de la latitude de l'étoile.

On ne considere point ici la premiere partie de la formule (2722), c'est-à-dire L cos. 23° $\frac{1}{2}$, parcequ'elle n'exprime ici qu'un changement commun aux étoiles et aux points équinoxiaux (2752).

2757. Le changement de déclinaison des étoiles (2732) = L sin. 23° cos. asc. dr. nous apprend que quand le pole de l'équateur tourne autour du pole de l'écliptique, le changement qu'éprouve la distance d'une étoile à l'équateur ou au pole tournant, est égal au mouvement de ce pole, multiplié par le sinus de la distance des

deux poles, et par le cosinus de la distance d'une étoile à l'intersection des deux cercles, mesurée le long du cercle tournant. Cette expression, transportée au cas dont il s'agit, fait voir que si le pole de l'écliptique tourne autour du pole de l'orbe de Vénus, le changement qu'éprouve la distance d'une étoile à l'écliptique, ou sa latitude, est égal au mouvement de l'écliptique multiplié par le sinus de l'inclinaison de l'orbite de Vénus, et par le cosinus de la distance de l'étoile au nœud de Vénus mesurée le long de l'écliptique.

Nommons D la distance d'une étoile au nœud ascendant d'une planete, ou la longitude de l'étoile moins celle du nœud de la planete, I l'inclinaison de l'orbite de la planete, L la latitude de l'étoile, M le mouvement du pole de l'écliptique autour du pole de la planete, ou le changement NV (FIG. 224) du nœud de la planete le long de son orbite; on aura M sin. I sin. D tang. L pour le changement de l'étoile en longitude, et M sin. I cos. D pour le changement en latitude.

2758. La formule du mouvement des nœuds (3688) étant appliquée à chaque planete, donne le mouvement annuel du nœud de l'écliptique sur chaque orbite; c'est ce que j'appelle M dans les expressions précédentes.

La quantité D, ou la distance d'une étoile au nœud d'une planete, est variable, à cause du mouvement des nœuds de chaque planete (1347), et de celui des étoiles en longitude (917); mais à cause de la lenteur de ces mouvemens et de la petitesse des quantités que nous avons à déterminer, on peut supposer la distance D invariable dans l'espace d'un siecle. On prendra le lieu du nœud de chaque planete pour 1750 (1347), on le retranchera de la longitude d'une étoile en 1750 pour avoir D; on prendra l'inclinaison (1376) égale à I; la valeur de M est donnée par le mouvement du nœud de l'écliptique sur chaque orbite; ainsi, en connoissant encore la latitude de l'étoile, il ne manquera rien pour évaluer les deux formules.

Par exemple, on trouve pour l'action de Jupiter (3689) $6''983$ par année, c'est la valeur de M; son inclinaison est $1^\circ\ 18'\ 50''$ = I; donc M sin. I = $0''\ 1601$; son nœud est à $3^s\ 7^\circ\ 56'$ de longitude; donc le changement de latitude M sin. I cos. D = $0''\ 16$; cos. (longit. — 98°).

2759. On peut donner à cette expression une forme plus commode, en considérant que le cosinus de la différence de deux arcs est égal au produit des cosinus, ajouté avec celui des sinus (2812); or le cosinus de 98° est égal à celui de 82°, pris négativement; on

aura

aura donc 0″16 cos. (longit. — 98°) = — 0″16 cos. 82° cos. long. + 0″16 sin. 82° sin. long. = 0″1586 sin. longit. — 0″0211 cos. longit.

2760. En employant de même les mouvemens des nœuds et les inclinaisons de chacune des autres planetes dans l'évaluation de cette formule, M sin. I cos. D, et multipliant par 100 le mouvement annuel, on a le mouvement séculaire des étoiles boréales en latitude, par l'action de chaque planete, tels que je les ai donnés *Mém.* 1758, 1761, 1780, suivant diverses suppositions pour les masses des planetes. Voici les nombres auxquels je m'en tiens actuellement; ce sont ceux de M. de la Grange (*Mém. de Berlin*, 1782), à l'exception de Vénus, dont j'ai diminué la masse d'environ un quart (3565), de maniere à trouver en nombres ronds 50″ de diminution séculaire dans l'obliquité de l'écliptique (2748).

Saturne,	1″ 39 sin. longit.	— 0″ 53 cos. long. étoile.
Jupiter,	15, 86	— 2, 11
Mars,	1, 03	+ 0, 95
Vénus,	30, 88	+ 8, 87
Mercure,	0, 84	+ 0, 85
TOTAL	+ 50″ 00 sin. longit.	+ 8″ 03 cos. longit.

Les signes changent pour les étoiles qui ont des latitudes australes; il faut aussi observer les changemens des sinus (3794).

2761. Cette expression revient à 50″64 sin. (long. + 9° 7′), parceque $\frac{8''03}{50''00}$ = tang. 9° 7′ 26″; car appellant y cette quantité de 9°, et x le coëfficient que l'on cherche, on aura pour 0° de longitude $8''0 = x \sin. y$, et pour 90° $50'' = x \cos. y$; donc $x = \frac{8''}{\sin. y} = \frac{50''}{\cos. y}$, donc $\frac{\sin. y}{\cos. y} = \frac{8''}{50''}$ = tang. 9° 7′ 26″, et $x = \frac{50''0}{\cos. 9°7'} = 50''64$.

2762. EXEMPLE. Sirius étoit à 3ˢ 10° 38′ de longitude en 1750; multipliant les 50″ de ma formule par le sinus de 79° 22′, on a 49″1, et multipliant 8″03 par le cosinus de 79° 22′, pris négativement, on trouve 1″5; la différence est 47″6; c'est la diminution séculaire de la latitude de Sirius dans ce siecle.

Il seroit nécessaire de connoître aussi ces mêmes quantités pour des siecles plus éloignés; par exemple, à la place de 3ˢ 8°, qui est le nœud de Jupiter, il faut mettre sa longitude 2ˢ 20° pour l'année 50. En tenant compte également du mouvement du nœud (1347) de Vénus 14° 38′, j'ai trouvé le changement de latitude dans le premier

siecle de notre Ere, 46″66 sin. longit. + 20″41 cos. long. Cette quantité est différente de celle qu'on vient de trouver pour ce siecle-ci, et c'est en prenant un milieu qu'on aura à-peu-près le changement séculaire des étoiles en latitude, depuis le temps de Ptolémée jusqu'au nôtre (*Mém. acad.* 1761). Au reste, ce changement pour le premier siecle dépend du mouvement des nœuds de chaque planete, qui est encore mal connu; ainsi l'on ne peut avoir cet effet avec précision.

2763. Les mêmes nombres serviront à trouver le changement de la longitude des étoiles fixes, M sin. I. sin. D. tang. L (2757); car il suffit de changer les mots de *sinus* et de *cosinus de la longitude*, et de multiplier le tout par la tangente de la latitude de l'étoile. Voici la valeur pour le premier siecle de notre Ere, et pour celui où nous sommes: les signes sont pour les étoiles boréales, et le signe moins indique une diminution de longitude.

(— 46″7 cos. long. + 20″4 sin. long.) tang. latit. An. 50.

(— 50″0 cos. long. + 8″03 sin. long.) tang. latit. An. 1750.

Ces expressions reviennent à — 50″93 cos. (long. + 23° 37 ½) tang. lat. Année 50.

A — 50″64 cos. (long. + 9° 7) tang. lat. Année 1750.

On doit faire attention que la tangente de la latitude change de signe quand l'étoile est au midi. Il faut aussi observer les changemens de signes des cosinus et des sinus (3794); ainsi pour Sirius, dont la longitude est 3ˢ 10° 38′ et la latitude 39° 33′ méridionale, on aura — 50″ cos. long. = + 9″2, parceque le cosinus de 3ˢ 10° change de signe, et + 8″03 sin. long. = + 7″9, la somme est + 17″1, qui, multipliées par la tangente de 39° 33′ qui est négative, donne — 14″1; c'est ce qu'il faut ôter de la précession 1° 23′ 45″, pour avoir le mouvement de Sirius 1° 23′ 31″. Je prends ici la précession réelle et non la moyenne, parceque l'équinoxe et l'étoile ayant chacun leur mouvement, il faut tenir compte ici de tous deux; ainsi sa longitude diminue de 14″ dans ce siecle-ci par l'attraction des planetes sur la Terre, indépendamment de la cause générale de la précession (2721), et du dérangement particulier à cette étoile (2781). On trouvera la table des variations séculaires en longitude et en latitude à la suite du catalogue des étoiles.

2764. Le mouvement en longitude et le mouvement en latitude, déterminés par les formules précédentes, sont à peu près d'accord avec les observations, comme on le voit en comparant les positions qui sont dans l'ancien catalogue de Ptolémée, avec celles qu'on observe aujourd'hui: on voit, par exemple, que la premiere étoile

de la constellation du Cocher, qui, dans Ptolémée, est à 30° de latitude, se trouve à 30° 49′ dans le catalogue de Flamsteed ; au contraire la quatorzieme étoile des Gémeaux, qui est au midi de l'écliptique, a dans Ptolémée 1° 30′, et seulement 0° 56′ dans Flamsteed. Il en est de même de la latitude de presque toutes les étoiles (*Mém. acad.* 1758). Les différences de longitude paroissent également changées d'une maniere conforme à cette théorie. Entre la 27e étoile de la grande Ourse, et la 10e du Dragon, dont la latitude est 81° 48′, on trouve aujourd'hui une différence de longitude moindre de 1° 21′, qu'elle n'est dans le catalogue de Ptolémée, parce-qu'une des étoiles a augmenté de longitude, tandis que l'autre a diminué. Ces différences ne peuvent être bien sensibles que pour les étoiles qui ont une très grande latitude ; elle est nulle pour les étoiles situées dans l'écliptique.

2765. Dans la formule générale de la précession des équinoxes (2728), il y avoit une partie L cos. $23°\frac{1}{2}$ commune à tout le ciel ; elle seroit ici égale à M cos. EV ; cette partie indique seulement que la ligne EV est plus avancée que MV de la quantité M cos. EV ; c'est le mouvement du nœud de la planete ou du pole E, rapporté sur l'écliptique (2752). Si l'on tire un arc de cercle EMBC perpendiculaire à EV, et sensiblement confondu avec le petit arc EM, ce sera le cercle de latitude qui passe par le nœud de l'orbite de Vénus. Le changement de longitude d'une étoile S, trouvé par les formules précédentes (2763), est la différence entre l'angle SEP et l'angle SMP; une partie de cette différence vient de la variation de l'angle E dans le triangle SCE, dont le côté SC et l'angle C sont constans ; cette variation = EM. sin. E. cotang. ES (4001). Mais outre ce changement de l'étoile S par rapport au cercle EMC, il y a celui de PE ou du colure des solstices, qui passe de la situation PE dans la situation PM; l'angle PEB se changeant en un angle PMB, c'est la variation de l'angle E dans le triangle sphérique PBE, dont PB et l'angle B sont constans; ainsi cette quantité est EM. sin. PEB. cot. EP ; elle est commune à tous les astres (2754); c'est une partie de la précession.

2766. On peut trouver le changement de l'obliquité de l'écliptique et celui de l'angle PEB, qui est le changement de longitude commun à tous les points du ciel, de la même maniere qu'on trouveroit la variation en longitude d'une étoile qui seroit en P ; c'est-à-dire que dans les formules des deux articles précédens, on peut considérer le pole de l'équateur comme une étoile dont la longitude seroit de 90°, et la latitude 66° 32′, et trouver, par les mêmes for-

mules (2762), combien il change par rapport au pole mobile de l'écliptique, soit en latitude, soit en longitude ; on aura d'abord 50″ pour la variation de l'écliptique dans ce siecle (2760), et 46″7 pour le premier siecle (2762).

2767. Le changement du pole en longitude se trouve, par la même méthode (2763), de 8″03 tang. 66° = 18″; c'est la diminution [(a)] de la précession des équinoxes que l'action des planetes produit pendant ce siecle-ci, en déplaçant l'écliptique ou l'orbite de la Terre. Ce seroit 26″1 suivant M. de la Grange ; mais s'il eût diminué la masse de Vénus, de maniere à réduire le changement de l'obliquité de l'écliptique à 50″, M. de la Grange auroit trouvé la même chose que moi.

M. de la Place a donné des formules plus générales et plus rigoureuses pour ces calculs (*Mém.* 1788) : voici celle qui donne la variation de l'obliquité de l'écliptique pour un nombre n d'années, à partir de 1700 ; 932″56 cos. 17″7686 n — 3140″34 sin. 32″8412 n, en supposant le changement de 50″ dans ce siecle-ci. Le second terme change de signe pour les années antérieures à 1700 ; ainsi, pour l'an 300 avant notre Ere, 17″7686 multipliées par 2000, font 9° 52′ 17″2, dont le cosinus multiplié par 932″56 donne 918″75 ; le second terme est + 983″19 : il faut ôter de la somme le terme 932″56, qui a lieu quand $n = 0$, ou en 1700 ; il reste 969″38, qu'il faut ôter de l'obliquité moyenne de l'écliptique en 1700, 23° 18′ 43″, et l'on a 23° 44′ 52″, qui differe peu de celle que j'ai employée dans les Tables du Soleil, *pag.* 1. Cette formule donne 46″26 pour la variation séculaire ; il y a 2000 ans ; elle est de 46″0 suivant ma table.

Si donc la précession observée est de 1° 23′ 45″ entre 1700 et 1800 (918), il y a 18″5 pour l'action des planetes, et 1° 24′ 3″5 pour l'action du Soleil et de la Lune sur l'équateur terrestre, qui est la cause principale de la précession des équinoxes (3727) : on trouvera de même, pour le premier siecle de notre Ere, que la précession diminuoit de 46″6 ; ainsi, la précession totale n'étoit réellement que de 1° 23′ 17″, eu égard à cette premiere inégalité.

Mais la précession des équinoxes a encore une inégalité, à cause de celle de l'obliquité de l'écliptique, dont le cosinus entre dans la précession (3727, 3725) ; elle a dû augmenter la précession de 9″

(a) La précession diminue, car on voit dans la fig. 224, où j'ai marqué la vraie situation des trois cercles, que l'écliptique rétrogradant de N en V sur l'orbite de Vénus, le point équinoxial avance de E en D ; d'ailleurs le signe plus de la formule indique un avancement de l'équinoxe, et par conséquent une diminution dans le mouvement général de l'équinoxe qui est rétrograde.

depuis 1700 ans (*Mém.* 1780, *pag.* 311); ainsi au lieu de 28″ il y en aura 37″ pour la diminution réelle de la précession.

2768. Cette inégalité de la précession fait que le mouvement séculaire du Soleil, par rapport aux équinoxes, qui est de 46′ 0″ dans le 18e siecle, n'étoit que de 45′ 23″ dans le premier siecle; d'où il suit qu'il faut ajouter une équation séculaire de 5′ 32″ au lieu du Soleil, calculé par un mouvement uniforme de 46′ 0″ pour la premiere année de notre Ere (*Mém.* 1786): j'en ai donné la table, *pag.* 4 des Tables du Soleil. Cette équation est nulle pour 1700 et 1800; mais en 1900, elle sera de 2″2 comme en 1600, et également additive à la longitude moyenne. En distribuant l'augmentation de 37″, il est aisé de calculer une table de la précession pour les 17 siecles, en la supposant uniforme; mais elle n'étoit que de 1° 23′ 8″ dans le premier siecle, et elle augmente de 2″17 à chaque siecle. Voici une formule générale de M. de la Place (*Mém.* 1788) qui donne la précession pour un nombre n d'années après 1700: elle est 50″53353 n — 3292″28 sin. 17″7686 n — 9315″65 cos. 32″ 8412 n + 9315″65. En remontant avant 1700, le sin. de n devient négatif; ainsi pour 2000 ans, ou pour l'an 300 avant notre Ere, on a 28° 4′ 27″06 + 3292″28 sin. 9° 52′ 17″2 — 9315″65 cos. 18° 14′ 42″4 + 9315″65 = 27° 47′ 14″32, et pour l'an 200 on a 1° 23′ 0″08 de moins, c'est la précession séculaire il y a 2000 ans. L'équation séculaire du Soleil donne pour l'accroissement de l'année, suivant la formule de M. de la Place, 36″114 sin. 32″ 8412 n + 6″9039 cos. 17″7686 n — 6″9039; d'où il suit qu'au temps d'Hipparque l'année étoit plus longue d'environ 10″$\frac{1}{3}$ (*Mém.* 1788).

Le déplacement de l'écliptique fait que la précession en ascension droite doit se calculer autrement que si elle étoit produite en entier par le déplacement de l'équateur. M. Oriani, *Eph. de Milan*, 1781. Si l'écliptique a passé de la situation EG (FIG. 224) à la situation DF, le mouvement ED sur l'équateur produit un changement EG sur l'écliptique; car ayant tiré du point solstitial T, comme pole, un arc GD perpendiculaire sur l'écliptique, on voit que la longitude d'une étoile située en T seroit égale à TD ou TG, au lieu d'être égale à TA. Cette quantité AG est celle que nous avons trouvée de 18″5 par siecle (2767); la valeur de ED sera $\frac{18''5}{\text{cos. A}}$ ou 20″2, quantité constante pour toutes les étoiles, et qu'il faudra ôter de leur mouvement séculaire en ascension droite, calculé avec la précession moyenne 1° 24′ 3″, qui est causée par le déplacement de

l'équateur; si la précession en ascension droite étoit négative, il faudroit ajouter la quantité constante.

2769. La période entiere de la précession des équinoxes, ou le retour des étoiles aux mêmes longitudes, en supposant la précession moyenne de 1° 24′ 3″6 par siecle, est de 25696 années juliennes; mais on voit par ce qui précede que les attractions des planetes diversifiées de tant de façons différentes, rendent cette quantité fort inégale, et la période fort incertaine. Une seule seconde sur la précession en un siecle change de six années la durée de cette grande période. C'est d'après ces résultats que j'ai mis dans les Tables du Soleil l'obliquité de l'écliptique pour les différens siecles, et à la fin du Catalogue des étoiles leurs variations en longitude et en latitude pour le siecle actuel. M. Cagnoli a donné pour les quantités calculées jusqu'ici, et pour le changement qui en résulte sur les ascensions droites, des formules très commodes. *Trig. art.* 782 *et suiv.*

2770. On a vu que la diminution de l'obliquité étoit moindre autrefois qu'elle n'est actuellement; plus anciennement on trouveroit que la diminution n'avoit pas lieu; et en remontant davantage, on trouveroit une augmentation au lieu d'une diminution. La circulation du pole de l'écliptique ne peut produire que ces alternatives, et elles sont contenues dans un espace de 1° 21′, à cause de l'action du Soleil et de la Lune sur le sphéroïde terrestre (M. de la Place, *Mém.* 1788). De là il suit que le pole E (FIG. 225) ne peut jamais arriver en P; ainsi la cause qui fait diminuer actuellement l'obliquité de l'écliptique ne peut la rendre nulle, et n'a jamais pu produire l'équinoxe général et continuel, dont quelques auteurs ont parlé; comme Plutarque *de Plac. Phil. Lib. II, cap.* 8; Fracastor, Whiston, *Théorie de la Terre, pag.* 107; Pluche, *Spect. de la Nat. Tom. III, pag.* 526, réfuté dans les *Mémoires de Trévoux* pour 1745; l'Encyclopédie, au mot *Libration;* Louville, *Acta erud.* 1719; Godin, *Mém. de l'acad.* 1734. Nous n'avons donc aucune preuve de cet équinoxe général, qu'on suppose avoir eu lieu autrefois sur toute la Terre et pendant toute l'année.

Du Mouvement particulier de quelques étoiles.

2771. Les mouvemens généraux que nous venons d'expliquer affectent toutes les étoiles; mais il y en a qnelques unes qui forment exception à ces regles, et qui ont eu un mouvement propre, un dérangement physique dont on ignore la cause, et qu'on tâche de déterminer par observation.

On peut dire cependant qu'en général les étoiles sont immobiles; les alignemens observés autrefois entre elles se retrouvent encore les mêmes (Ptolémée, *Alm. l. VII*, c. 1. Tycho, *Progym. t. I, pag.* 234). Riccioli rapporte plus de 25 exemples d'étoiles qui, prises 3 à 3, paroissent exactement en ligne droite (*Astron. réf. pag.* 203); telles sont la Chevre avec le pied précédent du Cocher, et Aldebaran; les deux têtes des Gémeaux avec le cou de l'Hydre; le bassin austral de la Balance, avec Arcturus, et la moyenne de la queue de la grande Ourse; les deux étoiles boréales de la tête du Bélier et la Luisante au genou de Persée: celles qui avoient autrefois cette position rectiligne la conservent encore, du moins autant qu'on peut en juger à la vue; ainsi les étoiles sont à-peu-près fixes, et les dérangemens dont il s'agit ici ne tombent que sur de très petites quantités et sur un petit nombre d'étoiles.

2772. Halley en examinant les positions des étoiles qui sont dans le septieme livre de l'Almageste, pour en déduire la précession des équinoxes, apperçut que trois des principales étoiles, Aldebaran, Sirius et Arcturus, avoient changé de latitude en un sens contraire au changement de toutes les autres, et contraire à ce qu'exige la diminution de l'obliquité de l'écliptique (*Philos. Trans.* 1718, *n°.* 355). Suivant Halley, Aldebaran devroit être 15′ plus au nord de l'écliptique, et il est 20′ plus au sud que dans Ptolémée; Sirius devroit être 20′ plus au nord (2762), et il est 22′ plus au sud; Arcturus qui devroit avoir à-peu-près la même latitude est 33′ plus au midi; l'épaule orientale d'Orion est au contraire plus au nord d'un degré que suivant le Catalogue de Ptolémée. On ne peut pas soupçonner des erreurs des copistes, dans toutes ces positions, parceque les déclinaisons rapportées dans d'autres endroits du livre s'accordent avec les longitudes insérées dans le catalogue; on ne peut avec vraisemblance attribuer cette différence à l'erreur des observations, parcequ'on voit celles d'Aristylle et de Tymocharès d'accord avec celles d'Hipparque et de Ptolémée.

2773. Cassini ayant comparé ses observations avec celles de Richer, à Cayenne, trouva que, depuis 1672 jusqu'en 1738, Arcturus s'étoit rapproché de l'écliptique de 2′, ce qui fait 3′ 2″ par siecle; M. le Monnier a trouvé ce mouvement de 4′ 5″ vers le midi (*Mém.* 1769, p. 21). Il est encore prouvé par les observations de Bradley et de Cassini de Thury (*Philos. Trans.* 1748; *Mém. acad.* 1755); les observations de Flamsteed comparées à

celles de la Caille, donnent 3′ 43″ après avoir ôté 25″ pour le changement de latitude qu'on doit trouver (M. Maskelyne). Ce changement est principalement en latitude ; cependant M. le Monnier trouvoit une rétrogradation de 1′ par siecle en longitude (*Mém.* 1769) ; il l'a réduite à 29″ en 1786 : les observations de Flamsteed donnent au contraire 15″ d'avancement. Mais en général celles du dernier siecle ne sont pas assez exactes, pour qu'on puisse bien s'assurer d'une si petite quantité, sur-tout pour la longitude.

2774. Quant à la déclinaison, elle étoit, suivant Flamsteed, au commencement de 1690, de 20° 49′ 0″, et suivant la Caille, en 1750, de 20° 29′ 39″ : la différence est de 19′ 21″, tandis qu'elle ne devroit être que de 17′ 16″ 6, par la précession ; il y a 2′ 4″ 4 de plus, pour le mouvement propre de cette étoile en 60 ans, ou 3′ 27″ par siecle. M. Maskelyne ne trouve que 3′ 1″. Voici le mouvement en déclinaison distribué de dix en dix ans, avec son inégalité (2736), d'abord par le calcul, ensuite par l'observation, suivant M. Maskelyne. Par le calcul, 2′ 53″ 3 ; 2′ 53″ 1 ; 2′ 52″ 9 ; 2′ 52″ 7 ; 2′ 52″ 5 ; 2′ 52″ 2 ; total 17′ 16″ 6. Par l'observation, 3′ 11″ 4 ; 3′ 11″ 2 ; 3′ 11″ 0 ; 3′ 10″ 8 ; 3′ 10″ 6 ; 3′ 10″ 2 ; total 19′ 5″ 2, pour le même intervalle de 60 ans ; différence, 1′ 48″ 6.

2775. Il y a près d'Arcturus une petite étoile marquée *b* dans nos cartes célestes, qui est très propre à faire appercevoir le mouvement réel d'Arcturus ; car leur position respective a changé considérablement depuis le dernier siecle. Le P. Mayer a observé en 1777 un grand nombre de petites étoiles, qui sont auprès des grosses, et qui seront propres à faire connoître ces mouvemens particuliers ; il y avoit même déja remarqué des différences ; il en attribuoit une partie aux petites étoiles, qu'il regardoit comme des especes de satellites, mais cela n'est point vraisemblable : *De novis in cœlo phœnomenis. Mannheimii* 1779, *in*-4°.

2776. Le changement de latitude est encore sensible dans Sirius ; Flamsteed trouva cette latitude de 39° 32′ 8″ pour 1690. Par les observations de Richer, faites en 1672, Cassini la trouve de 39° 31′ 55″, tandis que lui-même, vers 1738, l'a observée plus grande d'une minute ; la Caille trouve 39° 32′ 58″ ½ pour 1750. Ainsi, par un milieu, on trouve une augmentation de 57″ (*Mém.* 1758) ; mais cette latitude auroit dû diminuer de 47″ 6, par l'effet général (2762) ; ainsi il y auroit un changement propre en latitude de 1′

45″

45″ vers le midi. Par les observations de la Hire, la Caille trouve pour 1684 l'ascension droite 97° 48′ 29″, et la déclinaison 16° 19′ 20″; ce qui donne la longitude 3ˢ 9° 43′ 58″, et la latitude 39° 32′ 6″: ainsi la longitude a changé de 54′ 24″ en 66 ans, et la latitude a augmenté de 52″; d'où résulte un mouvement séculaire de 1′ 13″ vers l'occident, et de 2′ 7″ en latitude vers le midi. Le mouvement de déclinaison est de 2′ par siecle vers le midi; M. d'Agelet m'a dit aussi qu'il l'avoit reconnu en comparant ses observations avec celles de la Caille.

2777. Il est difficile de déterminer les variations d'*Aldebaran*, qui jusqu'à présent ont paru fort irrégulieres; sa latitude que nous trouvons de 5° 29′ 0″, est de 5° 29′ 50″ dans le Catalogue de Flamsteed. Cassini trouve par les observations de Tycho, que cette latitude, en 1589, étoit de 5° 30′ 23″ (*Mém.* 1738, *pag.* 340); elle paroît donc avoir diminué de 1′ 20″ par siecle: mais cette diminution devant être d'ailleurs de 32″ par la théorie générale, il n'en reste que 38 pour le mouvement propre.

La Caille me disoit que dans le grand nombre de réductions qu'il avoit faites de ses observations sur Aldebaran, il avoit trouvé souvent des irrégularités de 15 à 20″, qu'il ne pouvoit attribuer qu'à des variations particulieres à cette étoile; Ticho-Brahé s'étonnoit aussi de la grande différence qui se trouve entre les latitudes d'Aldebaran, déduites des observations de Timocharès, d'Hipparque et de Ptolémée, et que j'ai fait remarquer dans les *Mém. de* 1758.

2778. Cassini trouve des variations en latitude dans *Rigel*, l'épaule orientale d'Orion, Régulus, la Chevre et l'Aigle; la différence de latitude entre la Luisante de l'Aigle et l'étoile δ de la même constellation est plus grande de 36′ qu'au temps de Ptolémée, et de 2 ou 3′ que suivant Tycho.

2779. Cassini ayant examiné aussi en 1738 le mouvement des étoiles en longitude a reconnu que depuis Flamsteed, c'est-à-dire dans l'espace de 48 années, la Luisante de l'Aigle s'étoit éloignée de 48″ en ascension droite de celle qui la précede, et s'étoit approchée de 73″ de celle qui la suit; par les observations de Tycho, on trouve ces différences de 4′ 14″, et de 2′ pour 138 ans; d'où il suit que ces étoiles, ou du moins deux d'entre elles, ont eu un mouvement particulier en ascension droite (*Mém. acad.* 1738).

2780. Tobie Mayer lut, en 1760, à l'académie de Gottingen un Mémoire sur le mouvement propre des étoiles, et il a été publié en 1774; on y voit une Table de comparaison entre les ascensions droites et les déclinaisons observées par Romer en 1706 (*Triduum astronomiae*), et celles que Mayer avoit observées en 1756. Sur 80 étoiles, il y en a une quinzaine qui paroissent avoir quelque mouvement. Voici un extrait de sa Table, où l'on voit le déplacement en ascension droite et en déclinaison pendant cinquante ans. Le signe négatif indique un mouvement vers l'occident ou vers le midi. J'ai disposé ces douze étoiles dans l'ordre des variations en déclinaison qui me paroissent les plus certaines.

Etoiles,	*Chang. d'asc. droite.*	*Chang. de déclinaison.*
Arcturus	— 1′ 11″	— 1′ 55″
Sirius	— 37	— 52
β Cygni	— 3	+ 49
Procyon	— 33	— 47
ε Cygni	+ 20	+ 34
γ Ariet.	— 14	— 29
γ Gemin.	— 8	— 24
Aldebaran	+ 3	— 18
β Gemin.	— 48	— 16
γ Piscium	+ 53	+ 7
α Aquil.	+ 32	— 4
α Gemin.	— 24	— 1

2781. M. Maskelyne, à la page 4 de l'explication de ses Tables, comparant les positions de 7 étoiles vers 1767 avec celles de Bradley, qui avoient été déterminées vers 1755, en a conclu leur mouvement propre en ascension droite pour chaque année de la maniere indiquée dans la Table ci-jointe, où la grande exactitude des observations compense l'intervalle de temps.

En ascension droite.	
Sirius	— 0″ 63
Castor	— 0, 28
Procyon	— 0, 80
Pollux	— 0, 93
Régulus	— 0, 41
Arcturus	— 1, 40
L'Aigle	+ 0, 57

M. de Lambre a reconnu, par les observations de Flamsteed, que l'ascension droite ε des Gémeaux a diminué de 50″ en 50 ans; il s'est assuré que celle de β de la Vierge augmente de 1″2 par année. Procyon avance d'une demi-seconde vers le midi, suivant les observations de M. Maskelyne. La déclinaison de β de l'Aigle a diminué de 30″ en 37 ans, depuis 1750, suivant M. Cassini, et l'étoile *e* de Pégase a avancé de 20″ en ascension droite depuis le même temps. Sur 213 étoiles de Flamsteed, dont j'ai comparé les longitudes avec celles de la Caille, il y en a 41 où le mouvement differe de plus d'une minute de ce qu'il devroit être en 60 ans; et probablement une partie de ces différences vient des mouvemens propres des étoiles (*Mém.* 1781, *pag.* 342).

2782. On a attribué la cause de ces variations aux attractions des corps célestes ; mais le déplacement du système solaire que j'ai démontré, a servi à M. Herschel pour les expliquer (3284) : en sorte que ces mouvemens pourroient être encore purement apparens. Cependant celui du Soleil peut donner lieu de croire qu'il y en a de semblables dans quelques étoiles.

2783. Quoi qu'il en soit, il se passera bien des siecles avant qu'on connoisse la loi et la mesure de ces changemens ; les étoiles de la premiere grandeur, qui sont probablement les plus proches de nous, sont celles où ces mouvemens sont plus sensibles ; mais je ne doute pas qu'il n'y en ait de pareils dans les autres étoiles ; et parmi celles où Mayer a trouvé des différences, il y en a plusieurs qui ne sont pas des plus brillantes : en attendant, ce doit être une raison pour les astronomes d'employer, quand ils le peuvent, les étoiles de la troisieme grandeur dans leurs recherches sur le mouvement des planetes, au lieu des étoiles les plus brillantes, et de ne pas compter sur les anciens catalogues d'étoiles sans avoir examiné par observation le mouvement de chacune.

De la Parallaxe annuelle des Étoiles fixes.

2784. Il est démontré actuellement que la parallaxe annuelle (1140) est insensible et comme nulle dans les étoiles fixes (2804) : cependant j'ai cru qu'il étoit nécessaire de donner au moins une idée d'une question qu'on a traitée si souvent, et même en 1760 (2805) ; je démontrerai d'une maniere plus simple qu'on ne l'a fait jusqu'ici, la loi des variations qui devroient en résulter. On trouvera de plus grands détails à ce sujet dans l'ouvrage intitulé : *Eustachii Manfredii de annuis inerrantium stellarum aberrationibus, Bononiae* 1729. Soit S le Soleil (fig. 226), E une étoile, AB le diametre du grand orbe que la Terre décrit chaque année, A le point où se trouve la Terre au 1 janvier, B le point où elle est au 1 juillet ; la ligne AB étant dans le plan de l'écliptique, et l'orbe de la Terre étant conçu perpendiculaire au plan de la figure, en sorte qu'on ne voie pour ainsi dire que son épaisseur ; l'angle EAB est la latitude de l'étoile, quand la Terre est en A et que l'étoile est en conjonction avec le Soleil ; quand la Terre sera en B l'étoile paroîtra sur le rayon BE, et sa latitude apparente sera l'angle EBC, plus grand que EAB, et la différence est l'angle AEB ; enfin l'angle AES, qui est sensiblement la moitié de AEB à cause de l'extrême petitesse de AB, est la *parallaxe annuelle* en latitude.

2785. Si la distance SE de l'étoile fixe est deux cents mille fois plus grande que la distance SA du Soleil à la Terre, cet angle sera d'une seconde dans le cas où ES est perpendiculaire à E sur SA, et la latitude EAS d'une étoile en conjonction sera plus petite de 2″ que la latitude EBC de l'étoile observée dans son opposition, en supposant que la latitude de l'étoile soit à-peu-près de 90°; cependant on n'y apperçoit aucune différence. Copernic, en démontrant le mouvement de la Terre, ne dissimula pas cette objection (*L. I*, *c.* 10). Pour que la latitude des étoiles paroisse la même en tout temps de l'année, malgré le mouvement de la Terre, il faut que la distance des étoiles soit si grande, que l'orbite de la Terre n'y ait aucun rapport sensible, et que l'angle AES soit comme infiniment petit; « mais, dit-il, je pense qu'on doit plutôt admettre « cette grande distance des étoiles que la grande quantité de mou- « vemens qui auroient lieu si la Terre étoit immobile ». Ajoutons que la grande distance des étoiles est un fait que rien ne contredit, et qu'il est très aisé d'admettre (1099).

2786. Si l'étoile qui est éloignée du Soleil de la quantité SE étoit située au pole P de l'écliptique, et à la même distance SP = SE, sa parallaxe seroit SPA: appellons *p* cette *Parallaxe absolue*, qui est la plus grande de toutes, et cherchons quel sera son effet dans d'autres positions.

2787. L'étoile étant en E, dans le plan EABC d'un cercle de latitude perpendiculaire à l'écliptique, et la Terre au point A, la parallaxe de latitude SEA est égale à *p* sin. EAS (1628), puisqu'elle a pour mesure la perpendiculaire SX au lieu de SA, c'est-à-dire qu'elle est égale à la parallaxe absolue multipliée par le sinus de la latitude de l'étoile, en supposant AS assez petite par rapport à AP, pour que l'arc et le sinus soient égaux; ainsi le plus grand effet de la parallaxe sur la latitude, ou la parallaxe en latitude, quand elle a pour base le rayon SA de l'orbite terrestre, est *p* sin. lat. Cette parallaxe fait toujours paroître l'étoile plus près de l'écliptique, et diminue sa latitude quand l'étoile E est en conjonction avec le Soleil.

2788. Si l'on conçoit la Terre tourner dans son orbite, dont AB est le diametre et dont le plan ATB est situé perpendiculairement au plan de la figure et au plan du triangle EAB, on concevra facilement que la Terre étant en T à 90° du point B, elle répondra au-dessus du point S, et le rayon dirigé vers l'étoile sera autant incliné que le rayon SE, étant à la même distance du point E, que le point S; l'angle EAC deviendra égal à ESC, ou la latitude

apparente égale à la vraie ; ainsi il n'y a point de parallaxe en latitude quand l'étoile E est en quadrature, c'est-à-dire qu'elle répond à 90° du Soleil le long de l'écliptique, trois mois après la conjonction ou l'opposition.

2789. Je suppose que le point T et le point S sont à la même distance du point E, c'est-à-dire que la ligne TS est également perpendiculaire aux deux rayons visuels, qui des points T et S vont aboutir à l'étoile E ; la grande petitesse de ST par rapport à SE fait que l'erreur est incomparablement plus petite encore que la parallaxe, en sorte qu'il est indifférent de supposer la Terre dans la circonférence T ou sur le point S du diametre auquel la Terre répond perpendiculairement. Pour s'en assurer, il suffit de considérer que si EB est la commune section des deux plans, dont l'un passe par les points ES et B, l'autre par les points ET et B, le point T répondant toujours perpendiculairement en S, le sinus de l'angle en S ou de la latitude vue du point S seroit $\frac{EB}{ES}$ (3801), et celui de l'angle en T $\frac{EB}{ET}$; mais ET surpasse ES, comme l'hypoténuse d'un triangle surpasse le côté, ou comme le rayon surpasse le cosinus, c'est-à-dire d'un infiniment petit du second ordre, si TS est un infiniment petit du premier (3460), donc les latitudes vues du point T ou du point S sont égales.

2790. Par la même raison la latitude de l'étoile vue du point D ou du point F est la même ; ainsi quand la Terre répondra au point F, la ligne SF sera le sinus de la distance de la Terre au point T de la quadrature, et SF sera la base d'un angle égal à l'angle SEF, qui est la parallaxe de latitude ; donc la parallaxe en latitude est proportionelle au sinus de la distance de la Terre à la quadrature, qui est aussi le cosinus de la distance de l'étoile à sa conjonction au Soleil ; en sorte qu'elle est la plus grande dans les conjonctions et dans les oppositions. C'est donc aussi le temps où elle varie le moins d'un jour à l'autre. Si l'on appelle L la latitude de l'étoile, E son élongation ou la longitude de l'étoile moins celle du Soleil, on trouvera la parallaxe en latitude pour un moment donné, p sin. L cos. E. Elle s'ajoute à la latitude vraie pour avoir l'apparente, tant que l'étoile est plus près de l'opposition que de la conjonction, ou que la valeur de E est entre 3 et 9 signes. Ainsi quand on a la plus grande parallaxe en latitude qui est p sin. L (2787), il suffit de la multiplier par le cosinus de l'élongation, pour avoir la parallaxe actuelle de latitude pour un moment quelconque.

2791. Pour la parallaxe de longitude, nous considérerons d'abord une étoile E (FIG. 227) située dans le plan même de l'écliptique ou de l'orbite de la Terre AFBG. Soit SA la ligne d'où l'on compte les longitudes, l'angle ESA la longitude de l'étoile E vue du Soleil S; si la parallaxe absolue AES est de 1″, la longitude de l'étoile paroîtra plus grande de 1″ dans la premiere quadrature après la conjonction la Terre étant en A, et plus petite de 1″ dans la seconde quadrature la Terre étant en B. Quand la parallaxe qui a pour base le rayon AS, la Terre étant en A, aura ensuite pour base le sinus DH, la Terre étant en D, elle diminuera dans la même proportion; or l'arc GAD est le chemin qu'a fait la Terre depuis la conjonction, qui est égal à l'élongation de l'étoile par rapport au Soleil; ainsi la parallaxe en longitude sera p sin. E, l'élongation de l'étoile étant nommée E: si donc on décrit un demi-cercle HIK (FIG. 229), dont le demi-diametre CK soit de 1″, et qu'on prenne l'arc ID égal à l'élongation de l'étoile, le sinus LD ou la portion CM du rayon exprimera la parallaxe de longitude.

2792. Si l'étoile, au lieu d'être dans le plan même de l'écliptique, est relevée au-dessus du plan, il n'y aura qu'à abaisser de l'étoile une perpendiculaire sur le plan, et choisir le point E (FIG. 227) où tombe la perpendiculaire; on dira du point E la même chose que de l'étoile, et celle-ci sera sujette aux mêmes apparences que le point E, quant à la longitude rapportée sur l'écliptique. Mais si l'on veut considérer l'effet de la parallaxe dans la région de l'étoile, soit O (FIG. 228) le vrai lieu de l'étoile, qu'il faut concevoir relevé au-dessus de la figure ou du plan de l'écliptique, et répondant perpendiculairement sur le point E où tombe la perpendiculaire OE, la distance SE, qui est la même que dans la figure 227, est plus petite que la vraie distance absolue SO de l'étoile, dans le rapport du cosinus de la latitude ou de l'angle ESO au sinus total; ainsi la parallaxe de l'étoile O, prise d'occident en orient, sera plus petite que la parallaxe du point E; mais elle suivra les mêmes proportions dans ses accroissemens (1631): si donc on appelle p la parallaxe absolue de l'étoile située en O, on aura pour la parallaxe en longitude $\frac{p \sin. E}{\cos. L}$. Quand l'étoile paroîtra en quadrature, sin. E sera égal au rayon, et l'on aura la plus grande parallaxe en longitude $\frac{p}{\cos. L}$; ainsi la parallaxe actuelle pour une situation donnée est égale à la plus grande parallaxe multipliée par le sinus de l'élongation.

2793. Au moyen des deux formules précédentes, il est aisé de démontrer que les étoiles paroissent décrire une ellipse par l'effet de la parallaxe. Soit C (FIG. 229) le vrai lieu de l'étoile, vu du centre du Soleil, CO la plus grande parallaxe en latitude $= p$ sin. L qui a lieu dans les syzygies (2790), CH ou CK la plus grande parallaxe en longitude mesurée sur un grand cercle, égale à la parallaxe absolue qui a lieu dans les quadratures; le point H qui est à l'orient répond à la premiere quadrature, puisque trois mois après sa conjonction, la longitude de l'étoile est la plus grande (2791). Dans les autres temps de l'année l'étoile paroîtra en un point F, sa parallaxe de longitude CM étant égale à CK sin. E, et sa parallaxe de latitude FM ou CG $=$ CO cos. E (2790); de là il suit que le point F est sur la circonférence d'une ellipse dont CK est le demi-grand axe, et CO le demi-petit axe; car la propriété de l'ellipse est que les abscisses CM étant le sinus de 15°, 30°, etc. pour le rayon CK, les ordonnées MF sont les cosinus des mêmes arcs pour le rayon CO (3397). Ainsi chaque étoile à raison de la parallaxe annuelle paroît décrire une ellipse en un an autour de son vrai lieu.

2794. Les deux ellipses que l'on voit dans la figure 230, sont celles que Sirius et Arcturus paroîtroient décrire, en supposant que la parallaxe absolue fût égale au demi-axe de l'ellipse; la ligne AB est parallele à l'équateur, et ces ellipses sont disposées de maniere à faire voir, à chaque mois de l'année, marqué au-dedans de l'ellipse, dans quelle proportion ces deux étoiles s'éloignent ou se rapprochent l'une de l'autre, et de combien leur différence d'ascension droite et de déclinaison devroit paroître différente (2803), en différens temps, par les effets que nous avons expliqués de la parallaxe annuelle; nous verrons combien les différences observées sont éloignées de celles-là (2856).

2795. Si une étoile étoit située au pole même de l'écliptique, la parallaxe de latitude seroit toujours égale à la parallaxe absolue, ou à l'angle APS (FIG. 226), et l'ellipse de la parallaxe deviendroit un cercle. Dans ce cas, la longitude apparente de l'étoile seroit toujours égale à la longitude du Soleil: soit P (FIG. 231) le pole de l'écliptique ou le pole du cercle ABCD que la Terre décrit; P*a* ou P*b* la valeur de la parallaxe absolue; la Terre étant en A, verra l'étoile en *a* le plus près du point C de l'écliptique où répond alors le Soleil, puisque la latitude de l'étoile est toujours la plus petite quand elle est en conjonction (2787); de même quand la Terre sera en B l'étoile paroîtra en *b*, répondant toujours au point

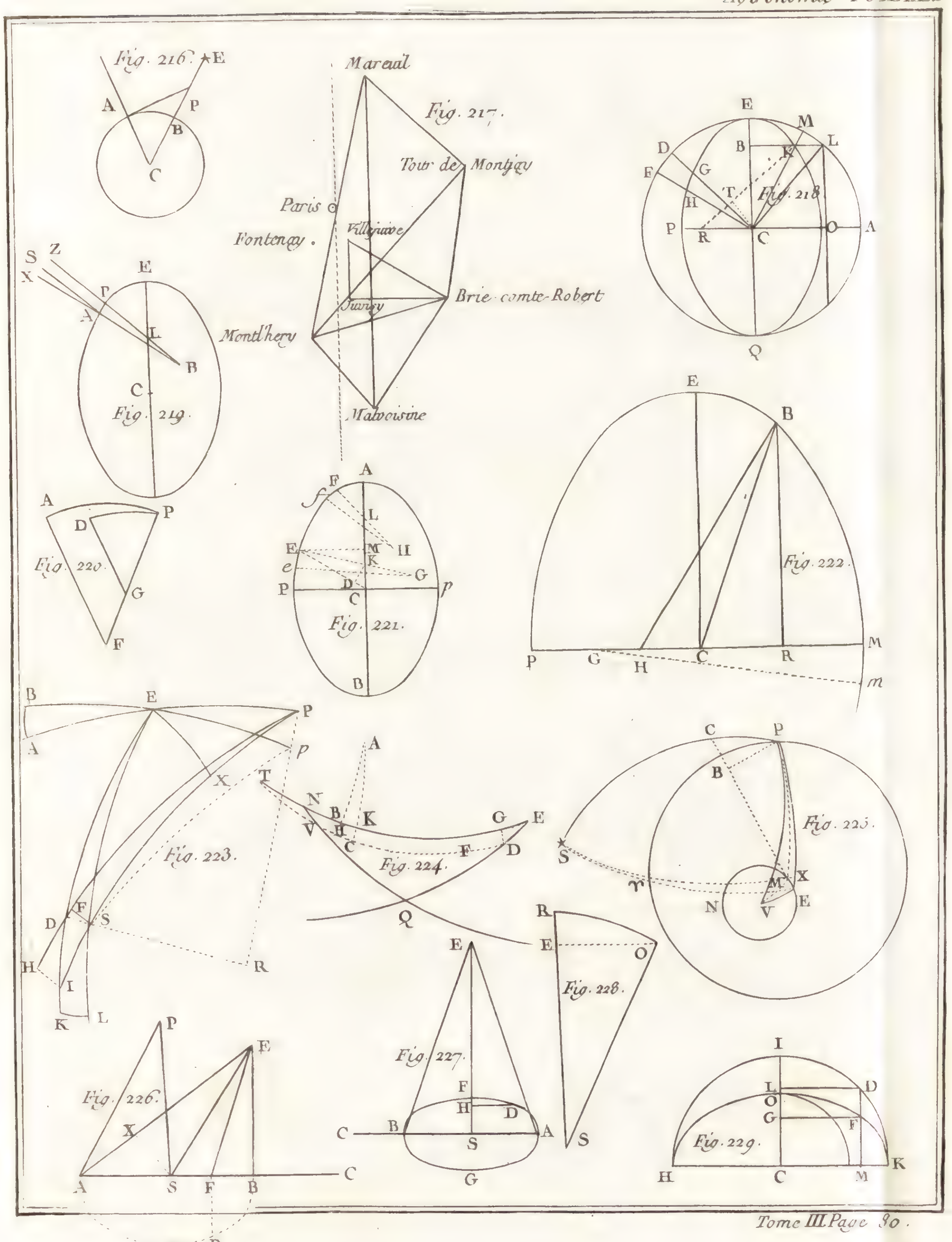
de l'écliptique opposé à celui où est la Terre, et par ce moyen elle paroîtra décrire le petit cercle *abcd* autour du pole de l'écliptique dans l'espace d'un an ; c'est ainsi que les ellipses de la figure 230 s'élargiroient et deviendroient des cercles, si les latitudes de ces étoiles augmentoient jusqu'à devenir de 90°.

2796. Tycho-Brahé observa l'étoile polaire avec soin en divers temps de l'année, et n'y trouva aucune différence sensible (Kép. *Epit. astr.* 493) ; dès lors il étoit prouvé que la parallaxe annuelle de l'étoile polaire n'étoit pas de 30″. Riccioli observa ensuite des hauteurs de Sirius trois mois avant et trois mois après l'opposition, et il n'y remarqua aucune altération (*Almag. II*, 452) ; mais quoiqu'il crût qu'une différence de 10″ devoit être sensible dans ses observations, il paroît qu'elles n'étoient pas aussi exactes qu'il le croyoit; car il y a réellement 26″ de différence entre les hauteurs de Sirius au printemps et en automne (2879).

2797. Picard, dans son voyage d'Uranibourg, *pag.* 18, en rapportant les observations de l'étoile polaire qu'il y fit en 1772, dit que cette étoile, en divers temps de l'année, a des variations que Tycho n'avoit pas remarquées, et *que j'observe,* dit-il, *depuis environ dix ans;* quoique l'étoile polaire s'approche du pole de 20″ chaque année, il arrive néanmoins que, vers le mois d'avril, la hauteur méridienne et inférieure de cette étoile devient moindre de quelques secondes qu'elle n'avoit paru au solstice d'hiver précédent, au lieu qu'elle devroit être plus grande de 5″; qu'ensuite, aux mois d'août et de septembre, sa hauteur méridienne supérieure se trouve à-peu-près telle qu'elle avoit été observée en hiver, et même quelquefois plus grande, quoiqu'elle dût être diminuée de 10 à 15″; mais qu'enfin, vers la fin de l'année, tout se trouve compensé.

2798. Qu'il me soit permis de remarquer ici d'avance, à l'honneur de cet habile astronome, que ces observations sont conformes, autant qu'elles pouvoient l'être, aux phénomenes de l'aberration découverte long-temps après (2879) ; l'étoile polaire doit paroître plus basse de 19″ au commencement d'avril, lorsqu'elle passe au méridien dans la partie inférieure de son cercle, qu'au solstice d'hiver, et la hauteur supérieure de l'étoile polaire doit paroître de 29″ plus grande au commencement de septembre qu'au solstice d'hiver ; ce qui s'accorde avec l'observation de Picard : ainsi il a eu la gloire de faire la premiere découverte de l'astronomie moderne sur les étoiles fixes, et de jeter les fondemens de toutes celles que l'on a faites depuis.

2799. Le docteur HOOKE (504), célebre dans la physique, surtout


Fig. 216.
Fig. 217.
Mareuil
Tour de Montjay
Paris
Fontenay
Villejuive
Brie comte Robert
Juvisy
Montlhery
Malvoisine
Fig. 218.
Fig. 219.
Fig. 220.
Fig. 221.
Fig. 222.
Fig. 223.
Fig. 224.
Fig. 225.
Fig. 226.
Fig. 227.
Fig. 228.
Fig. 229.

tout par ses idées relativement aux instrumens, essaya de déterminer ces variations (*An attempt to prove the motion of the earth from observations made by Robert Hooke, London,* 1674, 4°. 28 *p.*). Il avoit placé au college de Gresham, à Londres, une lunette de 36 pieds, pour observer les distances au zénit de γ du Dragon; il trouva, dit-il, cette étoile d'environ 23″ plus au nord le 6 juillet 1669 que le 21 octobre; Flamsteed en concluoit avec Hooke la parallaxe annuelle de 15″; le mauvais temps et une maladie l'empêcherent de continuer; son objectif fut cassé avant qu'il eût pu compléter ces observations : on voit qu'il n'étoit pas encore satisfait de l'exactitude des instrumens, et c'est bien injustement qu'on l'a soupçonné d'avoir ajusté ses observations sur un systême adopté d'avance.

2800. Picard voulut vérifier ces observations; mais la hauteur méridienne de la Lyre observée dans les deux solstices lui parut la même, ce qui étoit contraire aux observations de Hooke, comme il l'annonça dans l'académie, le 4 juin 1681 (*Hist. célest.*, *p.* 252). On voit en effet, par les loix de l'aberration, que la différence est insensible d'un solstice à l'autre.

2801. Flamsteed ayant observé l'étoile polaire, en 1689, avec son mural (2327, 2591), et dans les années suivantes, trouva que la déclinaison étoit plus petite de 40″ au mois de juillet qu'au mois de décembre; ces observations étoient justes, mais elles ne prouvoient point la parallaxe annuelle, comme le fit voir Cassini (*Mém. acad.* 1699). Au reste, quoique Flamsteed crût reconnoître l'effet de la parallaxe annuelle dans les différences qu'il avoit observées, il avoit quelques doutes sur ses observations, et il souhaitoit que quelqu'un voulût faire construire un instrument de 15 à 20 pieds de rayon sur un fondement inébranlable, pour éclaircir une question qui, sans cela, disoit-il, pourroit être bien long-temps indécise. Cassini crut trouver dans Sirius une parallaxe de 6″ (*Mém. acad.* 1771, *pag.* 265).

2802. Lorsque Rowley voulut placer un objectif dans une des tours de S. Paul de Londres pour observer cette parallaxe annuelle, Newton s'y opposa; il craignit que le bâtiment venant à changer, ne dérangeât la situation de la lunette, et ne fît tirer de fausses conséquences dans une matiere qui étoit aussi délicate; Newton qui, par le moyen de l'attraction, avoit si bien démontré le mouvement de la Terre, ne vouloit pas qu'on répandît des nuages sur une théorie très certaine, en y introduisant des observations équi-

voques. Ce ne fut qu'en 1725 que Molyneux et Bradley reconnurent que cette parallaxe n'avoit pas lieu (2818).

2803. Ce que Cassini le fils avoit dit en réfutant les conclusions de Flamsteed [(a)], ne s'étendoit qu'aux circonstances qu'il avoit eu dessein d'examiner; Manfredi se proposa, en 1720, de donner les loix générales de cette variation; en 1722 il en fit un corps d'ouvrage (2784); il y donne la maniere de calculer la parallaxe annuelle des étoiles en longitude, en latitude, en ascension droite et en déclinaison, et de tracer les ellipses qui servent à la représenter; il rapporte les observations qu'il avoit faites des différences d'ascension droite entre Arcturus et Sirius, et il dit qu'elles ne s'accordent point avec la parallaxe (*pag.* 74).

2804. La découverte de l'aberration a fait voir que les inégalités apperçues dans les étoiles ont une cause toute différente de la parallaxe, et cette nouvelle cause satisfait si bien à toutes les observations, qu'elle exclut absolument la parallaxe. Ainsi la question de la parallaxe annuelle des étoiles fixes est résolue; Bradley pense que si elle eût été seulement de 1″, il l'auroit apperçue dans le grand nombre d'observations qu'il avoit faites, sur-tout de γ du Dragon, observations qui s'accordent en tout temps avec l'aberration, sans tenir compte d'aucune parallaxe.

Lorsque Manfredi eut appris la découverte de l'aberration, il publia des observations qu'il avoit faites avec Zanotti sur les différences d'ascensions droites entre différentes étoiles (*De Bononiensi scientiarum et artium instituto atque academiâ commentarii* 1731, *in*-4°, *pag.* 399, 1748, *pag.* 600). Il avoit observé que la plus grande différence d'ascension droite avoit lieu quand une des étoiles étoit en conjonction, et l'autre en opposition, et la plus petite différence six mois après, ce qui est d'accord avec la théorie de l'aberration (2845). Les observations données par *Horrebow* (*Copernicus triumphans*, *Hafniae*, 1727) y sont contraires, et par là même paroissent défectueuses.

2805. Lorsque les observations de la Caille parurent en 1757, on crut s'appercevoir que les hauteurs méridiennes de Sirius indiquoient une parallaxe annuelle; en effet, on voit que les distances au zénit, observées au Cap avec un secteur de six pieds, étoient plus petites au mois de janvier, et cela d'environ 8″, qu'au mois de juillet (*Astron. fond. pag.* 173, 190); mais ces observations de Sirius

(a) Mémoires de l'académie 1699; dans ceux de 1717, *pag.* 267, il crut trouver dans Sirius une parallaxe de 6″ en six mois.

ne vont que de l'été 1751 à l'hiver suivant; et il peut y avoir eu quelque cause locale qui ait produit dans ces observations des différences de 8″. Aux mois de juin et de juillet 1761, et au mois de janvier 1762, il fit un grand nombre d'observations de Sirius à Paris, et je vois (dans son journal manuscrit légué à l'académie) que la hauteur de Sirius étoit 24° 44′ 15″ en hiver, et 24° 44′ 12″$\frac{1}{2}$ en été; la différence n'est que de 2″$\frac{1}{2}$, et elle est contraire à l'effet de la parallaxe ; aussi la Caille a écrit en marge de ces observations : *Il faudroit que les variations des réfractions fussent plus fortes que de* $\frac{1}{27}$, parcequ'en effet, si l'on suppose que la réfraction ait augmenté en hiver un peu plus que dans la table de la Caille (2239), on trouvera la même hauteur en hiver et en été.

2806. Les observations faites en Angleterre sont également contraires à l'hypothese de la parallaxe annuelle de Sirius ; Bevis me fit voir à Londres, en 1763, une suite de 45 hauteurs méridiennes de Sirius, qui avoient été prises avec le mural de 8 pieds qui est à Greenwich; ces hauteurs ont été réduites par M. Maskelyne au premier janvier 1760; elles ne s'écartent jamais de plus de 3 ou 4″ de la moyenne, et les petites différences qu'on y remarque ne m'ont paru avoir aucun rapport avec la parallaxe annuelle; mais pour sauver les inégalités des réfractions, il faudroit faire ces observations à 16° de latitude sud, où Sirius passe au zénit. Si la plus brillante de toutes les étoiles n'a aucune parallaxe sensible, il n'y a pas apparence qu'on en découvre dans les autres étoiles, qui probablement sont beaucoup plus éloignées de la Terre; mais avec les grands télescopes de M. Herschel, il peut arriver qu'on apperçoive des différences qui nous ont échappé jusqu'ici, et il espere s'en occuper (*Philos. Trans.* 1782, *pag.* 82).

Sur la Distance et de la Grandeur des Etoiles fixes.

2807. La connoissance de la parallaxe annuelle nous conduiroit à celle de la distance des étoiles, si cette parallaxe pouvoit s'observer; mais puisqu'elle est insensible (2804), nous en conclurons au moins par exclusion une des limites de cet éloignement. Si la parallaxe absolue d'une étoile ou l'angle APS (fig. 226) étoit de 1″, le côté PS seroit 206265 fois plus grand que le rayon AS de l'orbe annuel, qui est lui-même de 34357480 lieues (1398, 2662). La distance moyenne du Soleil AS contient 22984 fois le demi-diametre de la Terre, en supposant la parallaxe de 8″6 (1728) : donc si la parallaxe annuelle d'une étoile étoit seulement de 1″, sa distance seroit

7086740 millions de lieues, c'est-à-dire 7 trillions ou 4947 millions de fois plus grande que le rayon de la Terre. Mais il y a lieu de croire que la parallaxe des étoiles n'est pas d'une seconde, même pour les étoiles les plus proches de la Terre; ainsi leur distance doit être encore plus considérable.

2808. Après avoir vu à quelle prodigieuse distance doivent être les étoiles fixes, on ne sera pas étonné de l'extrême petitesse de leur diametre apparent, et de l'impossibilité où nous sommes de déterminer leur grandeur absolue et leur véritable diametre. Albategnius estimoit le diametre apparent des étoiles de la premiere grandeur de 45″; Tycho le croyoit d'une minute, Riccioli de 18″ (*Astron. réform. pag.* 359). Galilée et Képler étoient déja persuadés que les étoiles fixes étoient des Soleils comme le nôtre, mais dans un éloignement prodigieux (Galilei *Dial.* 3 *de mundi syst.*; Kepler, *Diss. cum nuncio syd.*; Jordano Bruno, *Lib. de maximo et immenso*); et que leur diametre apparent étoit d'une extrême petitesse. Galilée avoit observé que la Lyre n'avoit pas plus de 5″ de diametre; et Horoccius avertissoit en 1639, que plus les lunettes étoient parfaites, plus elles faisoient paroître les étoiles petites, et semblables à des points lumineux (*Hevelius, Venus in Sole visa, pag.* 139).

2809. Képler, qui, avant la découverte des lunettes, donnoit 4 minutes de diametre à Sirius (*De stella nova, cap.* 16 et 21), fut persuadé ensuite (*Epit. astron. pag.* 498) que les étoiles n'étoient que comme des points, d'autant plus petits que les lunettes étoient plus parfaites; Gassendi estimoit Sirius de 10″; Huygens trouva, par des expériences très délicates, que les étoiles étoient comme des points; Cassini en 1717 jugeoit le diametre de Sirius de 5″, mais c'étoit avec une lunette fort commune.

Il est prouvé aujourd'hui que 4 étoiles de la premiere grandeur, Regulus, Aldébaran, l'Épi de la Vierge, et Antarès, n'ont pas 1″ de diametre : car lorsque ces étoiles sont éclipsées par la Lune, elles n'emploient pas deux secondes de temps à se plonger sous le disque de la Lune; ce qui arriveroit nécessairement si le diametre de ces étoiles étoit de 1″. En effet, la Lune emploie environ 2″ de temps à avancer d'une seconde de degré; ainsi l'espace de 2″ de temps, on verroit une étoile diminuer de grandeur et disparoître peu-à peu; au contraire, les étoiles disparoissent en un instant; elles reparoissent avec la même promptitude et comme un éclair; donc le diametre n'est pas d'une seconde. *Philos. Trans.* 1718, *p.* 853; *Abr. IV*, 332.

2810. Si l'on voit dans les lunettes une lumiere éparse qui environne les étoiles, qui les amplifie et les fait paroître comme si elles avoient 2″ ou même 6″ de diametre, on doit attribuer cette apparence à la vivacité de leur lumiere, à l'air environnant et illuminé, à l'aberration des verres, à l'impression trop vive qui se fait sur la rétine ; on en a vu la preuve à l'occasion des feux et des signaux (2657).

M. Herschel est parvenu dans un bon télescope à réduire le diametre de la Lyre à moins d'une seconde, et l'on parviendra peut-être à le diminuer encore plus.

2811. Si le diametre d'une étoile étoit d'une seconde, et sa parallaxe annuelle d'une seconde, le diametre réel de l'étoile seroit égal au rayon du grand orbe, c'est-à-dire de 34 millions de lieues ; mais il peut se faire que les parallaxes des étoiles soient plus grandes que leurs diametres apparens, en sorte que le diametre réel soit beaucoup plus petit que 34 millions de lieues ; nous ne pouvons encore rien décider là-dessus.

2812. L'extrême petitesse du diametre apparent des étoiles fixes est probablement la cause du mouvement de scintillation qu'on y remarque ; cette scintillation ne s'apperçoit point dans les planetes, par exemple, dans Jupiter, et très peu dans Vénus, quoique la force de leur lumiere surpasse celle des étoiles fixes, et elle sert souvent à distinguer les planetes des étoiles. Le diametre d'une étoile est si petit que les moindres molécules de matiere qui passent entre elle et nous, par l'agitation de l'atmosphere, suffisent pour nous cacher l'étoile, et nous la montrer alternativement. Si l'on conçoit que ces alternatives soient assez fréquentes et assez courtes pour qu'à peine notre œil puisse les distinguer l'une de l'autre, on comprendra que les étoiles doivent paroître dans une espece de tremblement continuel ; le Cœur du Lion scintille que plus l'Épi de la Vierge, et cependant me paroît un peu moins lumineux, cela vient peut-être aussi de la petitesse de son diametre. L'explication précédente paroît confirmée par l'observation faite dans les pays où l'air est extrêmement pur et tranquille et où l'on voit que la scintillation des étoiles n'a pas lieu ; mais quand il n'y auroit sur la Terre aucun pays dont l'air fût assez calme pour faire cesser le tremblement apparent de la lumiere des étoiles, cela ne suffiroit pas pour détruire l'explication.

2813. Garcin, correspondant de l'académie, étant à Gomron ou Bander-Abassi, port fameux du golfe Persique, écrivoit que ce pays étoit tout-à-fait exempt de vapeurs ; la sécheresse des environs

est telle qu'on n'y apperçoit pas même un brin d'herbe pendant les trois saisons chaudes de l'année, du moins dans les lieux découverts et exposés au Soleil; c'est presque de la cendre, plutôt que de la terre. Aussi dans le printemps, l'été et l'automne, on couche en plein air sur le haut des maisons qui sont en plate-forme, sur des toiles tendues et sans couvertures. Les étoiles y font un spectacle frappant; c'est une lumiere pure, ferme et éclatante, sans nul étincellement; ce n'est qu'au milieu de l'hiver que la scintillation, quoique très foible, s'y fait appercevoir; en conséquence, Garcin ne doutoit pas que la scintillation ne vînt des vapeurs qui s'élevent sans cesse dans l'atmosphere des pays moins secs. La Condamine a remarqué de même, dans la partie du Pérou qui est le long de la côte, où il ne pleut jamais, que la scintillation des étoiles y étoit bien moins sensible que dans nos climats.

2814. M. de Beauchamp m'écrit de Bagdad que les étoiles au-dessus de 45° de hauteur n'ont aucune scintillation, et qu'on ne peut les distinguer des planetes; le tour de l'horizon est moins pur, à cause des eaux du Tygre [a]. La grande pureté du ciel en Arabie fut sans doute autrefois l'occasion des premieres découvertes de l'astronomie (236); on comprend assez quel avantage un ciel toujours pur et serein a dû donner aux Asiatiques sur le reste du monde. La facilité de voir toujours ce spectacle dans toute sa beauté, ou plutôt l'impossibilité de ne le pas voir sans cesse, a fait de tous les habitans de Bander-Abassi et des environs comme autant d'astronomes. Les interruptions de sommeil qui doivent y être fréquentes, deviennent pour eux une occasion d'observations curieuses et faciles, que nous préparons en Europe avec des soins pénibles, et qu'un ciel ingrat nous enleve : aussi les gens du peuple savent connoître, quand ils s'éveillent, quelle heure il est, par les étoiles. Si les talens se développent, dit Mairan, à mesure qu'il se présente plus d'occasions de les exercer, et s'ils sont assez également répandus sur la totalité du genre humain, combien de semblables pays, la Caldée, l'Egypte et l'Arabie, n'ont-ils pas dû produire d'astronomes, lorsque les sciences, et l'astronomie sur-tout, y étoient en honneur! (*Hist. acad.* 1743).

(a) M. de Saussure étant sur le Mont-Blanc à 2000 toises de hauteur, en 1787, voyoit le fond du ciel presque noir, sans doute par la grande pureté de l'air : cependant il y avoit encore une scintillation sensible; mais il l'attribue au vent qui produisoit dans l'air des condensations et des réfractions alternatives.

LIVRE DIX-SEPTIEME.

DE L'ABERRATION ET DE LA NUTATION.

Les mouvemens apparens des étoiles fixes causés par la précession et par d'autres causes particulieres, ayant été expliqués dans le XVIe Livre, je passe à l'explication des deux mouvemens apparens, découverts par Bradley depuis l'année 1728, et qui sont connus sous le nom d'*aberration* et de *nutation*.

2815. L'aberration est un mouvement apparent observé dans les étoiles, par lequel elles semblent décrire des ellipses de 40″ de diametre ; il est causé par le mouvement de la lumiere (2929), combiné avec le mouvement annuel de la Terre (2827). La définition de la nutation se trouvera ci-après (2888); l'histoire de la découverte de ces deux mouvemens exige que l'on se rappelle ce qui a été dit à l'occasion de la parallaxe annuelle (2799).

2816. Flamsteed avoit cru, non seulement d'après les observations du docteur Hook, mais encore d'après les inégalités qu'il avoit observées dans les hauteurs des étoiles, qu'il y avoit une parallaxe annuelle; cependant la quantité et la loi de ces inégalités n'étoient pas bien connues (2801). *Samuel Molyneux*, Irlandois, entreprit, vers l'an 1725, de vérifier ce qu'on avoit dit là-dessus, et de déterminer enfin les circonstances de ces mouvemens (*Philos. Trans. n°.* 485); c'est au projet de Molyneux que nous sommes redevables de toutes les connoissances qui vont faire la matiere de ce XVIIe Livre; mais Bradley eut la gloire d'exécuter ce que Molyneux n'avoit fait qu'entreprendre.

2817. Molyneux fit construire un instrument dans le même goût, et choisit les mêmes étoiles que Hook. *Georges Graham*, horloger célebre dans les arts, autant par son génie que par son zele, contribua plus que tout autre à ce travail; il fit construire pour Molyneux un secteur de 24 pieds, dont l'exactitude surpassoit de beaucoup tout ce qui avoit jamais été fait pour parvenir à mesurer dans le ciel de petits arcs (2380).

Ce secteur fut placé à Kew, près de Londres, et le 3 décembre 1725 Molyneux observa au méridien l'étoile γ à la tête du Dragon;

il marqua exactement sa distance au zénit ; il répéta cette observation le 5, le 11, le 12 du même mois ; il ne trouva pas de grandes différences : et comme on étoit dans un temps de l'année où la parallaxe annuelle de cette étoile ne devoit pas varier (2790), il crut qu'il étoit inutile de continuer pour lors les mêmes observations.

2818. Bradley se trouva pour lors à Kew ; il eut la curiosité d'observer aussi la même étoile le 17 décembre 1725, et ayant disposé l'instrument avec soin, il vit que l'étoile passoit un peu plus au sud que dans les premiers jours du mois. D'abord les deux astronomes ne firent pas grande attention à cette différence ; elle pouvoit venir des erreurs d'observation : cependant le 20 décembre l'étoile avoit encore avancé vers le sud, et elle continua les jours suivans, sans qu'on pût attribuer ce progrès au défaut des observations.

Cette différence paroissoit d'autant plus surprenante, qu'elle étoit dans un sens contraire à l'effet que devoit avoir la parallaxe ; et comme on ne concevoit aucune autre cause qui pût produire un pareil changement, on craignit qu'elle ne vînt de quelque altération dans les parties de l'instrument, et il fallut s'assurer par diverses expériences de son exactitude. Cependant l'étoile alloit toujours vers le sud : on ne songea donc plus qu'à mesurer exactement ce progrès, pour tâcher d'en découvrir les circonstances et la cause. Au commencement du mois de mars 1726, l'étoile se trouva parvenue à 20″ du lieu où on l'avoit observée trois mois auparavant ; alors elle fut pendant quelques jours stationnaire ; vers le milieu d'avril elle commença de remonter vers le nord ; et, au commencement de juin, elle passa à la même distance du zénit que dans la premiere observation faite six mois auparavant ; sa déclinaison changeoit alors de 1″ en trois jours, d'où il étoit naturel de conclure qu'elle alloit continuer d'avancer vers le nord : cela arriva comme on l'avoit conjecturé ; l'étoile se trouva au mois de septembre de 20″ plus au nord qu'au mois de juin, et 39″ plus qu'au mois de mars ; de là l'étoile retourna vers le sud, et, au mois de décembre 1726, elle fut observée à la même distance du zénit que l'année précédente, c'est-à-dire avec la seule différence que la précession des équinoxes devoit produire.

2819. Par là il étoit bien prouvé que le défaut de l'instrument n'étoit pas la cause des différences observées ; d'un autre côté, l'effet étoit trop régulier pour pouvoir être attribué à une fluctuation irréguliere de la matiere éthérée, comme Manfredi l'avoit soupçonné dans un temps où l'on n'avoit que de mauvaises observations ; mais la difficulté étoit de trouver une explication suffisante,

2820

2820. La premiere idée fut d'examiner si cela ne provenoit point de quelque nutation dans l'axe de la Terre, produite par l'action du Soleil ou de la Lune, à cause de l'aplatissement de la Terre, ainsi que cela devoit avoir lieu par l'attraction (2889). Mais d'autres étoiles, observées en même temps, ne permettoient pas d'adopter cette hypothese : une petite étoile, qui étoit à même distance du pole, et opposée en ascension droite à γ du Dragon, auroit dû avoir, par l'effet de cette nutation, le même changement en déclinaison; cependant elle n'en avoit eu qu'environ la moitié, comme on le vit en comparant jour par jour les variations de l'une et de l'autre, observées en même temps; c'étoit la 35[e] étoile de la Giraffe dans le catalogue britannique.

2821. En comparant les observations, il paroissoit que la différence apparente de déclinaison par rapport à la moyenne, en différens temps de l'année, étoit à-peu-près proportionnelle au cosinus de la longitude du Soleil, ou que, par rapport à la plus grande, le changement étoit comme le sinus verse de la distance du Soleil aux points équinoxiaux. C'étoit une raison de penser que la cause avoit quelque rapport avec la distance du Soleil à ces points; mais Bradley n'avoit pas encore assez d'observations pour entreprendre de chercher l'hypothese qui pouvoit satisfaire aux observations; Molyneux, ayant été nommé lord de l'amirauté, n'eut plus le temps de s'en occuper; Bradley voulut donc suivre lui-même ces recherches.

2822. Pour cela il eut encore recours à Graham; il fit construire un autre secteur, dont l'arc, beaucoup plus grand, s'étendoit à $6°\frac{1}{4}$ de chaque côté du zénit, et pouvoit comprendre non seulement *la Chevre*, étoile de la premiere grandeur, mais plus de 200 étoiles du catalogue britannique, dont douze étoient assez brillantes pour pouvoir être vues lors même qu'elles passoient au méridien à midi; au lieu que celui de Molyneux ne pouvoit donner en tout que 7′ ou 8′, et comprenoit par conséquent très peu d'étoiles assez brillantes pour pouvoir être observées en tout temps.

Bradley ne put donner que 12 pieds $\frac{1}{2}$ à son secteur, à cause de la situation des lieux qu'il habitoit; mais il a toujours jugé cette longueur suffisante; car, lorsque l'instrument étoit bien rectifié, on pouvoit être assuré de la distance au zénit à une demi-seconde près. Bradley demeuroit à Wansted, où Pound, son oncle, étoit curé; le secteur y fut placé le 19 août 1727, et Bradley commença d'examiner soigneusement quelles étoient les variations des étoiles, suivant leur différente situation.

2823. Il vit alors que la regle qu'il avoit cru appercevoir (2821)

n'avoit lieu que pour les étoiles situées près du colure des solstices, comme γ du Dragon. Ces étoiles étoient les seules qui fussent le plus au nord ou le plus au sud dans le temps des équinoxes. Mais une regle plus générale, qui ne pouvoit guere lui échapper, étoit que chaque étoile paroissoit stationnaire, ou dans son plus grand éloignement vers le nord, ou vers le sud, lorsqu'elle passoit au méridien vers six heures du soir ou du matin, que toutes avançoient vers le sud lorsqu'elles passoient le matin, et vers le nord lorsqu'elles passoient le soir, et que le plus grand changement étoit toujours comme le sinus de la latitude de chacune. Enfin, lorsqu'au bout d'une année il eut vu toutes les étoiles reparoître, chacune au même lieu où elle avoit d'abord paru, Bradley, muni d'un assez grand nombre d'observations, s'occupa à trouver la cause de ces variations.

Il s'étoit déja convaincu que la nutation supposée dans l'axe de la Terre ne suffisoit pas pour expliquer l'aberration de deux étoiles opposées (2819), et qu'elle étoit contraire à la parallaxe; un changement dans le fil-à-plomb, ou dans la réfraction, ne donnoit rien de satisfaisant; il falloit une cause annuelle et constante, égale pour les étoiles foibles et pour les plus brillantes, dont le plus grand effet du nord au sud fût comme le sinus de la latitude, c'est-à-dire nul pour les étoiles situées dans l'écliptique: transportons-nous à sa place, et raisonnons à-peu-près comme il dut faire.

2824. Puisque cette aberration étoit nulle en latitude pour les étoiles situées dans l'écliptique, elle devoit donc, pour ces étoiles-là, se faire tout entiere dans le plan de l'écliptique, comme la parallaxe annuelle; avec cette différence, que quand l'étoile auroit dû avoir la plus grande aberration en longitude suivant la parallaxe (2791), elle se trouvoit au contraire, suivant l'observation, être dans sa situation moyenne, et que dans les temps où la parallaxe auroit dû être nulle, on observoit la plus grande aberration. En partant de cette différence entre la parallaxe et l'aberration, que Bradley ne pouvoit manquer d'appercevoir, il s'ensuivoit que la plus grande aberration en longitude arrivoit lorsque l'étoile étoit ou en conjonction, ou en opposition.

Ainsi l'étoile E (FIG. 232) devoit paroître 40″ plus à l'orient, la Terre étant au point G de son orbite GHK, que six mois après, la Terre étant en K, Bradley apperçut heureusement que cette différence de 40″ étoit précisément le chemin que la Terre parcourt dans son orbite en 16′ de temps; il se rappella que la lumiere employoit le même temps à parcourir le diametre GK de l'orbite de la Terre,

suivant la découverte faite par Romer en 1675 (2929). On auroit pu d'abord imaginer que l'on voyoit les étoiles 16′ plus tard, à cause de leur éloignement, quand elles étoient en conjonction que lorsqu'elles étoient en opposition, et que par là on les voyoit de 40″ moins avancées; mais, suivant ce raisonnement, il n'y auroit point eu d'aberration pour l'étoile située au pole de l'écliptique, dont la distance est toujours la même.

2825. Cependant l'étoile γ du Dragon avoit une aberration de 20″ au nord et au sud, qui croissoit comme les sinus des distances au point où elle étoit nulle, de la même façon que les parallaxes annuelles (2791); il y avoit donc apparence que cette étoile décrivoit un cercle semblable à celui qui auroit lieu par une parallaxe de 20″, mais qu'elle le décrivoit de maniere à être toujours avancée de 20″ du côté où va la Terre, puisque l'étoile étoit plus à l'occident quand elle étoit en opposition. Soit ABCD (FIG. 235) le cercle ou l'orbite annuelle de la Terre, E une étoile située au pole de ce cercle, et qu'il faut imaginer relevée à une distance prodigieuse au-dessus du plan de la figure; lorsque la Terre est en A, l'étoile, au lieu de paroître en E, paroît en *a*, plus avancée de 20″ du côté où va la Terre; lorsque la Terre est en B, l'étoile paroît en *b*, etc. Tel est le phénomene qui étoit indiqué par les observations de Bradley; nous en parlerons plus au long (2842). Il restoit donc à chercher un moyen d'expliquer comment l'étoile paroissoit toujours du côté où alloit la Terre.

2826. Enfin Bradley eut l'idée heureuse de combiner le mouvement de la lumiere avec celui de la Terre, suivant les loix de la décomposition des forces (2829): il essaya cette hypothese; et voyant qu'elle s'accordoit parfaitement avec toutes les observations, il rendit compte de sa découverte au mois de décembre 1728 (*Philos. Trans.* n°. 406).

Pour faire voir combien son hypothese s'accordoit avec ses observations, il disposa dans une Table 15 observations de γ du Dragon, faites dans tous les mois de l'année; on y voit combien à chaque jour cette étoile devoit être plus méridionale, suivant le calcul rigoureux fait d'après les principes que nous allons indiquer, et combien elle avoit paru l'être par l'observation; la différence ne va jamais au-delà de $1''\frac{1}{2}$.

Le même accord que l'on voyoit dans cette Table de γ du Dragon, parut sur toutes les autres étoiles, dont l'aberration fut observée et calculée, quelle que fût leur distance aux colures. Bradley assure que cet accord lui parut surprenant, et que dans plus de 70 obser-

vations qu'il avoit faites de γ du Dragon pendant une année, il n'y en avoit qu'une qui différât de l'hypothese de plus de 2″, et elle étoit marquée comme très douteuse, à cause des nuages qu'il y avoit ce jour-là. Ainsi il dut regarder cet accord des observations comme une démonstration de son hypothese, ou plutôt il dut cesser de regarder comme hypothese une théorie qui s'accordoit si bien, et avec le mouvement des étoiles, et avec celui de la lumiere, déja connu par les éclipses des satellites (2929).

2827. Je passe donc à l'explication de la cause que Bradley assigna aux phénomenes qu'il avoit observés (2823); et comme on a, dans les commencemens, quelque peine à la bien concevoir, je vais tâcher de la mettre hors de doute, et d'en rendre le principe aussi évident que doit l'être une proposition de pure géométrie : je vais donc le présenter sous différentes formes; toutes supposent néanmoins que l'on ait une idée de la décomposition des forces dans les parallélogrammes (1232). Soit E une étoile (FIG. 233) qui lance vers nous un rayon de lumiere, considéré comme un corpuscule qui va de E en B; soit AB une petite portion de l'orbite de la Terre, de 20″, par exemple (l'on verra art. 2839 pourquoi nous choisissons ce nombre 20″), et CB l'espace que le rayon a parcouru en 8 minutes, pendant que la Terre décrivoit AB; ainsi le corpuscule de lumiere B étoit en C lorsque la Terre étoit en A, et arrive au point B en même temps que la Terre; par ce moyen, CB et AB expriment les vîtesses de la lumiere et de la Terre en 8′ de temps (2835).

Je tire la ligne CD parallele et égale à AB, et je termine le parallélogramme DBA : suivant le principe si connu de la composition et décomposition des forces, on peut regarder la vîtesse CB de la lumiere comme résultante de deux vîtesses suivant les directions CD et CA. La vîtesse CD étant du même sens et de la même quantité que la vîtesse AB de la Terre, ne sauroit être apperçue; elle est détruite pour nous; l'œil ne sauroit voir en vertu d'un rayon qui seroit poussé du même sens et avec la même vîtesse que l'œil. Ainsi la seule partie CA de la vîtesse de la lumiere subsistera pour nous; le rayon parviendra à notre œil sous la direction CA, et nous appercevrons l'étoile dans la ligne AC, ou suivant BD qui lui est parallele; l'angle CBD est ce que nous appellons l'ABERRATION; c'est la quantité dont une étoile paroît éloignée de sa véritable place, ou de la ligne BCE, par l'effet du mouvement de la Terre et de celui de la lumiere. (D'*Alembert*, dans l'Encyclopédie, au mot *Aberration*).

2828. L'on peut encore se représenter le même effet sous une autre forme; le corpuscule de lumiere B vient frapper notre œil avec

la vîtesse CB ; mais puisque l'œil avance en même temps de A en B avec la vîtesse AB, il vient aussi frapper le rayon ; en sorte qu'il y a un double choc tout à la fois, celui de la lumiere qui vient contre l'œil avec la vîtesse CB, celui de l'œil qui va contre la lumiere avec la vîtesse AB. A la place de ce dernier choc, on peut imaginer (sans rien changer à l'effet qui en résultera) que le corpuscule soit venu de F en B frapper l'œil avec une vîtesse FB égale à AB ; ainsi l'œil reçoit une impression suivant CB, et une suivant FB : de ces deux impressions, faites suivant les côtés CB et FB du parallélogramme CF, il en résulte une impression unique et composée, qui se fait sentir suivant la diagonale DB ; donc l'on appercevra l'étoile dans la direction BD, et non dans la direction BCE.

2829. Enfin il y a une autre maniere de démontrer encore la vérité de cette proposition ; c'est celle de Bradley et de tous les auteurs qui en ont parlé d'après lui : elle ne paroît pas d'abord satisfaisante, comme Manfredi l'a remarqué ; mais nous allons tâcher de la rendre palpable. Supposons le corpuscule lumineux en M (FIG. 234), lorsque l'œil étoit en N, et qu'ils arrivent ensemble en O ; on sent que lorsque l'œil a passé en G le corpuscule de lumiere étoit en H, en tirant GH parallele à MN ; car OG : OH :: ON : OM. Il en seroit de même de tous les autres points que la Terre parcourt sur la ligne NO ; l'on peut donc imaginer que MN soit un tube qui avance parallèlement à lui-même, et parcoure toutes les situations comme GH ; le corpuscule de lumiere se trouvera par ce moyen n'avoir jamais quitté le tube MN, et par conséquent sera parvenu à l'œil en décrivant une ligne qui se trouve être l'axe du tube parvenu en PO, ainsi nous avons reçu le corpuscule suivant la direction PO : or nous voyons un objet dans la direction suivant laquelle le rayon vient à nous ; donc l'étoile nous paroîtra sur une ligne PO parallele à MN.

2830. Un exemple familier fera peut-être encore mieux comprendre le mécanisme de ces impressions composées. Soit un vaisseau GCFA (FIG. 236), qui va de droite à gauche ; que d'un angle C de ce vaisseau on ait jeté une pierre à l'autre angle A, et que, dans le temps où elle a parcouru CA, le vaisseau ait avancé de la quantité CD ou AB ; celui qui est dans le vaisseau en A se trouvera alors parvenu au point B, et sera frappé de la même maniere que si le vaisseau n'avoit eu aucun mouvement ; la pierre lui paroîtra venir de l'angle D, suivant DB, comme elle lui auroit paru venir de C, suivant CA, si le vaisseau eût été immobile ; l'impression sera la même, puisque la relation du point C au point A, leur

situation, leur distance, ne dépendent en aucune façon du mouvement de ce vaisseau ; ce mouvement est commun à la pierre et au vaisseau, et il est nul par rapport au choc. Néanmoins dans l'espace absolu cette pierre est venue de C en B ; ainsi elle a fait le même chemin réel qu'auroit fait une pierre qui, du rivage R, eût été jetée directement en B. Voilà donc deux pierres, l'une qui vient du rivage R et qui a parcouru la ligne CB, l'autre qui est partie du point C, angle du vaisseau, et qui a de même parcouru la ligne CB, à cause du mouvement de ce vaisseau de A en B : or celle-ci s'est fait sentir suivant la direction DB ; donc celle qui auroit été jetée du rivage R, se seroit fait sentir réellement aussi dans la direction CA ou DB à celui qui étant à l'angle A du vaisseau, se seroit trouvé transporté de A en B, tandis que la pierre venoit de C en B.

2831. On peut appliquer à ce mécanisme la remarque des chasseurs, qui tirent toujours en avant d'un oiseau qui vole, et non pas dans l'endroit même où ils le voient quand le coup part (*Maupertuis, Elémens de géographie*).

D'autres exemples familiers feront encore mieux sentir ces effets à ceux pour qui les notions de mécanique ne sont pas familieres. Je suppose que, dans un temps calme, la pluie tombe perpendiculairement, et qu'on soit dans une voiture ouverte sur le devant; si la voiture est en repos, on ne reçoit pas la moindre goutte de pluie ; si la voiture avance avec rapidité, la pluie entre sensiblement, comme si elle avoit pris une direction oblique ; c'est une chose que chacun peut éprouver, et dont la raison est évidente : le mouvement par lequel nous allons contre la pluie, fait que nous recevons celle qui est en l'air avant qu'elle soit tombée, et cela revient au même, que si la pluie avoit pris une direction oblique en suivant la diagonale d'un parallélogramme, dont les côtés seroient la vîtesse de la pluie de haut en bas, et la vîtesse de la voiture horizontalement ou en avant. Nous avons parlé (art. 1081) du petit chariot qui montre aussi la décomposition du mouvement, et qui peut s'appliquer à l'aberration.

2832. Après avoir expliqué le mécanisme de l'impression composée qui produit l'aberration, voyons quelle en est exactement la quantité. En examinant les observations d'un grand nombre d'étoiles, Bradley jugea que le *maximum* de l'aberration étoit de $20''\frac{1}{4}$; par exemple, la plus grande variation de γ du Dragon en déclinaison est de $39''$; d'où l'on conclut, par le rapport des sinus des latitudes (2853), que si cette étoile étoit située exactement au pole de l'écliptique, elle décriroit un cercle dont le diametre seroit $40''4$;

la 35ᵉ étoile de la Giraffe a 19″ d'aberration, d'où Bradley conclut 40″2 pour la plus grande aberration ; la derniere de la queue de la grande Ourse η est 36″ plus au sud vers le mois de janvier qu'au mois de juillet, ce qui donne 40″4 ; la Chevre environ 16″ plus au nord en février qu'en août, ce qui suppose 40″ ; toutes les étoiles que Bradley a comparées donnent 40″ ou 41″; mais après le plus ample examen, il a choisi 40″ (*Phil. Trans. n°.* 485).

2833. L'aberration seroit moindre si la vîtesse de la lumiere étoit plus grande, et l'on pourroit s'en assurer avec une lunette dont le tube seroit plein d'eau. M. Boscovich, qui m'avoit communiqué cette idée dès 1766, a traité cet objet en détail dans le second volume de ses Œuvres, *pag.* 286.

2834. Si pour les étoiles très éloignées la vîtesse de la lumiere étoit ralentie, l'aberration seroit plus grande, comme M. Fuss le remarquoit pour expliquer les variations observées par le P. Mayer dans les petites étoiles qui sont voisines des grosses. Mais la lumiere du Soleil emploie à-peu-près le même temps que celle des étoiles à parcourir le même espace, et les belles étoiles ont la même aberration que les petites; ainsi cette hypothese n'est pas vraisemblable.

2835. La quantité de 20″ répond à 8′ $7''\frac{1}{3}$ dans la Table des mouvemens du Soleil ; ainsi l'on est assuré, à moins de 5″ près, qu'il faut 8′ 7″ à la lumiere du Soleil pour arriver jusqu'à nous dans ses moyennes distances (2929); d'où il suit que la vîtesse de la lumiere est 10313 fois plus grande que la vîtesse moyenne de la Terre ; par là l'on trouve la véritable quantité de l'équation de la lumiere, dont on fait usage dans les Tables des satellites de Jupiter. C'est ainsi que les éclipses de ces satellites ayant servi à découvrir l'aberration, celle-ci sert aujourd'hui à perfectionner leur théorie, en déterminant exactement la valeur d'une équation, que l'on ne pouvoit pas espérer de connoître avec la même précision par le moyen de ces éclipses (2932). *Plus exactement M. De Lambre détermine l'aberration par … de 20,″255, et … lumiere de 8′ [illegible] tables des satellites de Lambre, jointes … de cette Astron. Voy. aussi le Sup[illegible] fin de ce Tome.*

2836. Avant que d'entrer dans l'explication détaillée des phénomenes de l'aberration, je dois avertir que le plan ECBA (FIG. 233), qui joint l'étoile E et la ligne AB décrite par la Terre E, s'appelle *plan d'aberration*, parceque c'est dans ce plan que l'aberration se fait ; le lieu apparent de l'étoile, son lieu vrai, l'œil de l'observateur et l'espace qu'il décrit en 8′ de temps, se trouvent tous ensemble dans ce plan, en sorte que l'aberration ne peut faire paroître l'étoile dans un autre plan. On appelle aussi *triangle d'aberration* le triangle CBA formé par le chemin de la lumiere avec celui de la Terre, et dont le petit angle C mesure l'aberration. Voyons ce

qui arrive quand le triangle d'aberration est rectangle ou obtus-angle.

2837. On doit être convaincu, par les démonstrations précédentes (2827), qu'une étoile nous paroît toujours plus avancée du côté où nous marchons, et cela de la quantité de l'angle BCA (FIG. 233); la valeur de cet angle dépend du rapport de la vîtesse AB de la Terre à la vîtesse CB de la lumiere; ce rapport est celui de 1 à 10313 (2835), ce qui donne un angle de 20″ dans le cas où CB est perpendiculaire à AB; ainsi l'aberration sera toujours de 20″ quand la route de l'œil sera perpendiculaire au rayon de l'étoile: mais lorsque le rayon CA (FIG. 237) est incliné sur la route AB de l'œil, l'angle ACB d'aberration devient moindre; et parceque CB est à AB comme le sinus de l'angle A est au sinus de l'angle C, il suit que le sinus de l'arc d'aberration, ou l'aberration même, est comme le sinus de l'inclinaison du rayon CA sur la route de l'œil, qui est toujours un petit arc de l'orbite terrestre, c'est-à-dire qu'il est égal à 20″ multipliées par le sinus de l'angle que fait la route de l'œil avec le rayon de lumiere; enfin, si la ligne CA s'inclinoit jusqu'à se confondre avec la ligne ABD, l'angle C s'évanouiroit, et il n'y auroit plus d'aberration; ce qui d'ailleurs est évident, puisqu'alors le rayon de lumiere arriveroit toujours à nous sous la même direction.

2838. Supposons maintenant que l'œil, au lieu d'avancer de A en B, avance de B en A, en sorte que le rayon arrive en A en même temps que l'œil; si l'on décompose la vîtesse CA (2827) suivant CE et CB, on verra aisément que la vîtesse CE est détruite par la vîtesse BA de la Terre, et qu'il ne reste que CB ou sa parallele EA; ainsi, dans ce cas, l'étoile paroîtra s'élever au-dessus de la ligne que l'œil décrit, au lieu qu'elle paroissoit s'abaisser dans le cas précédent; elle paroîtra en E au lieu de paroître en C: toujours l'aberration porte une étoile du côté où va la Terre. Quand la Terre est au point G de son orbite GHD (FIG. 232), et ensuite au point K, elle paroît aller en deux sens opposés: dans le premier cas l'étoile est en opposition, et paroît à gauche du lieu moyen E; dans le second cas, la Terre allant de D en K, l'étoile est en conjonction avec le Soleil, et paroît à droite, c'est-à-dire à l'occident du point E sur une ligne DS, inclinée de 20″.

2839. Ainsi cette aberration de 20″ est relative seulement à la grandeur de l'orbite que décrit la Terre, c'est la seule dont cette orbite puisse nous faire appercevoir; elle seroit plus grande si la Terre avoit plus de vîtesse. Mais si la Terre étoit plus éloignée du Soleil,

sa vîtesse diminueroit, et l'aberration seroit plus petite; elle ne doit être que de 6″ dans Saturne. La lumiere doit être plus de trois années à venir des étoiles jusqu'à nous, à raison de leur distance (2807); mais parceque cette durée est toujours la même à 8′ près, nous ne nous appercevons que de la variation que ces 8′ produisent en plus ou en moins. Comme la Terre fait 20″ pendant ces 8′, cette différence de 20″, qui est tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, quelquefois nulle pour une même étoile, et qui affecte différemment les diverses étoiles suivant leurs situations, produit les inégalités de l'aberration.

2840. Cette même quantité de 20″, qui est l'aberration absolue prise dans la région de l'étoile, peut devenir beaucoup plus grande quand on la rapporte à l'écliptique ou à l'équateur; ainsi l'aberration de l'étoile polaire en ascension droite va jusqu'à 8′ 38″ (en 1750): il suffit, pour le comprendre, de recourir à l'art. 3879.

2841. Nous n'avons eu égard, dans tout ce qui précede, qu'au mouvement annuel de la Terre, et non point au mouvement diurne, parcequ'il est trop lent pour qu'il puisse avoir un effet sensible: en effet, la vîtesse du mouvement diurne est à celle du mouvement annuel comme $\frac{366,26}{22984}$ est à 1, c'est-à-dire en raison inverse des temps, et en raison directe des distances; l'une est de 7 lieues par seconde, l'autre n'est que de 239 toises: celle-ci n'est donc que $\frac{1}{63}$ de la vîtesse du mouvement annuel: cela fait une différence de deux tiers de seconde dans l'espace de 12 heures; on la néglige entièrement.

2842. L'effet de l'aberration sur une étoile qui seroit située au pole même de l'écliptique, est le plus simple de tous, et nous commençerons par celui-là: on a déja vu que l'étoile paroîtroit décrire un cercle de 40″ de diametre (2825). Le cercle ABCD (FIG. 235) représente l'écliptique ou l'orbite de la Terre, que l'on suppose circulaire, parceque la différence de ses diametres est ici négligeable: E exprime le pole de cette orbite, il faut le concevoir élevé perpendiculairement au-dessus du plan de la figure; autour du pole E l'on décrit un petit cercle, dont le diametre est de 40″ (2832). Lorsque la Terre est en A, et va de A vers B, l'étoile située au pole de l'écliptique paroîtra 20″ plus avancée du même côté, c'est-à-dire en *a* (2827); ensuite en *b;* de là en *c, d;* et elle aura parcouru, dans l'espace d'un an, le petit cercle *abcd*, décrit autour du pole de l'écliptique, toujours plus avancée

de 90° dans son petit cercle, que la Terre ne l'est dans le sien, et ayant toujours 20″ de moins en latitude qu'elle n'auroit dans son vrai lieu.

2843. Pour une étoile qui est dans le plan même de l'écliptique, soit G (FIG. 232), le point où est la Terre quand l'étoile E est en opposition : la Terre allant de B en G, ou d'occident vers l'orient, l'étoile paroîtra plus avancée de 20″ vers l'orient, c'est-à-dire que sa longitude sera augmentée de 20″ ; mais, dans la conjonction, la Terre allant dans un sens contraire par rapport à l'étoile, c'est-à-dire de D vers K, la longitude de l'étoile sera diminuée de 20″.

2844. Dans les quadratures Q et H l'aberration sera nulle, parce-que le rayon HI qui se dirige à l'étoile, et qui est parallele à SE à cause de la grande distance des étoiles (2807), devenant la tangente de l'orbite ou de la route de l'œil, et se confondant avec elle en H, il n'y a plus d'aberration (2837).

2845. De là il suit que, pour connoître quel est le lieu du Soleil au temps où l'aberration d'une étoile en longitude est la plus grande, et soustractive de la longitude moyenne, il suffit de prendre la longitude même de l'étoile ; par exemple, Sirius a 3ˢ 10° de longitude ; le Soleil a la même longitude le 1ᵉʳ de juillet : alors Sirius est en conjonction avec le Soleil, la Terre étant en K, et l'aberration fait paroître la longitude trop petite ; en sorte qu'il faut alors soustraire l'aberration de la longitude moyenne de l'étoile, pour avoir sa longitude apparente.

2846. L'ARGUMENT ANNUEL de l'aberration, en général, est le chemin qu'a fait le Soleil depuis que l'étoile paroissoit la moins avancée, ou la longitude du Soleil au temps où l'aberration est la plus grande, et en même temps soustractive, dont on a ôté le lieu du Soleil pour le jour donné. Si l'on prend la longitude même de l'étoile, on aura le lieu du Soleil au temps où la longitude apparente de cette étoile est la plus petite qu'elle puisse être dans le cours de l'année (2843), et l'on s'en sert pour avoir l'argument annuel de l'aberration en longitude.

Pour trouver l'aberration en longitude dans les autres temps, soit FL le petit espace de 20″, parcouru en 8′ de temps par la Terre, en un point de son orbite qui est éloigné du point G de l'opposition de la quantité GL : soit ML le chemin de la lumiere pendant le même temps, FML l'angle d'aberration ; le rayon ML de l'étoile étant parallele à la ligne EGK, l'angle MLF, égal à SLV, a pour mesure l'arc LH ; ainsi l'angle d'aberration (2837) est égal à 20″

sin. NLF, ou 20″ sin. LH, ou 20″ cos. LG ; donc l'*aberration en longitude est proportionnelle au sinus de la distance à la quadrature*, ou de la distance au point où elle est nulle, ou proportionnelle au *cosinus de l'argument* d'aberration : il faut l'ajouter à la longitude moyenne, depuis la quadrature qui précede l'opposition, jusqu'à celle qui suit l'opposition, ou lorsque la longitude de l'étoile, moins celle du Soleil, qui est l'argument d'aberration en longitude, se trouve de 3, 4, 5, 6, 7, 8 signes; il faut l'ôter de la longitude moyenne, si c'est du côté de la conjonction, c'est-à-dire si l'argument est 9, 10, 11, 0, 1, 2 signes. En effet, tant que la Terre va de Q en G, supposant qu'on compte les longitudes du point Q, la longitude du Soleil est entre 6 et 9; et l'ôtant de celle de l'étoile E, qui est de 3ˢ, la différence est entre 9 et 6 : l'aberration est alors additive.

2847. Ce que nous avons démontré pour l'aberration en longitude d'une étoile située dans le plan de l'écliptique, a lieu pour une étoile située au-dessus ou au-dessous de l'écliptique, à quelque latitude que ce soit. En effet, que l'on conçoive le point M du triangle d'aberration MFN, élevé au-dessus du plan de la figure, et dirigé en haut vers une étoile, la base FN demeurant toujours dans le plan de notre figure, l'angle d'aberration M ne changera pas de grandeur; car il aura toujours pour base FN, qui est dans le plan de l'écliptique. Si cet angle a été de 10″ dans le temps que les lignes LM, FM, étoient couchées dans le plan de la figure, il sera encore de 10″, et l'on pourra toujours dire que l'étoile paroît éloignée de 10″ du plan qui passe sur ECK. Ce plan, que l'on concevra tiré perpendiculairement à l'écliptique, et passant par l'étoile E, est le cercle de latitude où paroît l'étoile, et qui marque sa longitude dans le ciel, et celle de la Terre quand l'étoile est en opposition.

Lorsque l'étoile étoit dans le plan même de l'écliptique, l'aberration la faisoit paroître plus loin de la ligne EGK, qui est aussi dans le plan de l'écliptique; si l'étoile est plus relevée, l'aberration s'éloignera de quelque autre ligne plus élevée que GK, placée à la même hauteur que l'étoile, et dans le plan du même cercle de latitude qui passe sur ECK.

2848. L'aberration en longitude que nous venons de déterminer, est mesurée dans la région où se trouve l'étoile, parallèlement à l'écliptique, sur un arc de grand cercle; mais si on la rapporte à l'écliptique au moyen de deux cercles de latitude, tirés du pole de l'écliptique par le lieu apparent et par le lieu moyen de l'étoile, elle deviendra plus grande (3879), et il faudra la diviser par le

cosinus de la latitude, pour avoir l'aberration en longitude dans l'écliptique même. Ainsi la plus grande aberration en longitude est égale à $\frac{20''}{\text{cos. latit.}}$, et l'aberration pour un temps donné $\frac{20''\text{cos. argum.}}{\text{cos. lat.}}$, c'est-à-dire 20″ divisées par le cosinus de la latitude de l'étoile, et multipliées par le cosinus de l'élongation trouvée pour ce même temps, ou de l'argument de l'aberration (2846); elle est soustractive dans les trois premiers signes de l'argument, et dans les trois derniers.

2849. Il est aisé de former une table de la plus grande aberration en longitude, telle qu'on la trouve dans le recueil de Tables que j'ai donné en 1759 (*pag.* 183). Une étoile située à 60° de latitude a sa plus grande aberration de 40″, parceque $\frac{20''}{\text{cos. }60^\circ} = 40''$, et l'aberration de *Sirius*, qui a 39° 33′ de latitude, est 25″9. La longitude de Sirius, en 1750, étoit 3ˢ 10° 38′ : je suppose qu'on veuille avoir son aberration en longitude le 1ᵉʳ mai 1750 à midi; on calculera la longitude du Soleil pour ce jour-là, ou bien on la prendra dans une Éphéméride : je la suppose 1ˢ 10° 55′; on la retranchera de celle de Sirius : la différence 59° 43′ est l'argument annuel de l'aberration en longitude (2846), dont le cosinus, multiplié par 25″9, donnera 13″1, aberration de Sirius en longitude le 1ᵉʳ mai 1750; elle est soustractive, parceque c'est dans le premier quart de l'argument, ou du côté de la conjonction (2846).

2850. J'ai considéré jusqu'ici l'effet de l'aberration parallèlement à l'écliptique : il est temps de voir ce qui en résulte du nord au sud, c'est-à-dire perpendiculairement à l'écliptique. Lorsque la Terre est située vers le point A de son orbite (FIG. 235), à égale distance des syzygies B et D, la portion AM de son orbite, qu'elle décrit alors, est parallele à la ligne des syzygies BD; ainsi l'effet de l'aberration ne peut point rapprocher l'étoile de cette ligne, et par conséquent ne peut changer sa longitude. Le parallélogramme d'aberration CSAM est parallele au plan du cercle de latitude élevé perpendiculairement sur B et D; concevons le plan de ce parallélogramme relevé perpendiculairement sur le plan de la figure, au lieu d'être couché sur le côté, comme on est obligé de l'exprimer dans la figure; soit S l'étoile qu'il faut concevoir perpendiculairement au-dessus du point N, en sorte que sa latitude soit égale à l'angle SAN; l'étoile, au lieu de paroître sur le rayon MS, paroîtra sur le rayon AS ou MC (2837); et l'aberration ASM ou CMS sera mesurée par MF = AM sin. MAF (2837), c'est-à-dire 20″ sin. lat. C'est ainsi que l'on a

construit la Table de la plus grande aberration en latitude (*Tab. astron.* 1759, *pag.* 183).

Dans le cas où la Terre étant en A, l'étoile paroît en quadrature, tout l'effet de l'aberration se porte de haut en bas, c'est-à-dire que l'aberration est toute en latitude; et quand la Terre se rapproche de l'étoile en allant de A en M, l'étoile est aussi rapprochée de l'écliptique, ou du plan dans lequel se meut la Terre : car alors la latitude apparente, ou l'angle CMN, est moindre que l'angle SMN, latitude moyenne (2881), qui auroit lieu sans l'aberration. Si la Terre s'éloignoit de l'étoile en allant de M en A, le contraire arriveroit, et l'étoile paroîtroit éloignée de l'écliptique par l'effet de l'aberration. C'est ce qui arrive dans la seconde quadrature, après l'opposition, lorsque la Terre est en C.

2851. Telle est l'aberration en latitude au temps des quadratures, c'est-à-dire lorsqu'elle est la plus grande : cette aberration en latitude est nulle dans la conjonction et dans l'opposition; car alors le chemin BG de la Terre (FIG. 232) est perpendiculaire au rayon CG de l'etoile; le triangle d'aberration CBG s'étend de droite à gauche, ou d'occident en orient, c'est-à-dire en longitude, quoique son sommet C soit élevé au-dessus du plan de l'écliptique, et ne peut rien changer à la position de l'étoile du haut en bas, c'est-à-dire en latitude : la Terre ne se rapproche point alors du rayon CB de l'étoile, du moins dans la direction du cercle de latitude, en sorte qu'il n'y a point d'aberration en latitude; car celle-ci vient de la quantité dont la Terre se rapproche du rayon de l'étoile du nord au sud, ou le long du cercle de latitude, comme l'aberration en longitude vient de la quantité dont la Terre se rapproche du rayon de l'étoile dans le sens de l'écliptique, ou d'occident en orient.

2852. Pour trouver l'aberration en latitude dans les positions de la Terre intermédiaires entre l'opposition et la quadrature, il ne faut qu'examiner de combien la Terre s'éloigne ou se rapproche du rayon de l'étoile, c'est-à-dire la quantité LN ou FP qui prend la place de QR. Lorsque LN s'évanouit, ce qui arrive en G, l'aberration en latitude s'évanouit avec elle, comme nous venons de l'expliquer.

On comprendra mieux pourquoi l'aberration en latitude dépend de la quantité FN, à l'aide des réflexions suivantes. Le triangle d'aberration a pour base RQ lorsque la Terre est en R, et BG lorsque la Terre est en G, et FL lorsque la Terre et en L; mais ce triangle n'étant point situé dans l'écliptique, a une partie de son effet de droite à gauche, qui est mesurée par FN, et une partie de haut en

bas, qui est mesurée par LN : en effet, supposons que la Terre, au lieu d'aller directement de F en L, eût été de F en N et de N en L; elle n'auroit éprouvé aucune aberration en latitude en allant de F en N, puisque le triangle d'aberration ayant alors pour base la ligne FN, les lignes MF, MN, ont la même latitude, et font le même angle avec le plan de l'écliptique; mais en allant de N en L, toute l'aberration est en latitude, comme quand la Terre alloit de A en M dans la fig. 235, et directement à l'étoile : ainsi LN est la mesure de l'aberration en latitude : c'est la même chose, quant à l'aberration, que la Terre ait décrit FNL, ou FL seulement. On voit assez, par tout ce qui précede, que FL ne produit d'aberration en longitude qu'à raison de ce que le point L est plus loin de la ligne des syzygies EGK que le point F : par la même raison, la ligne FL ne produit d'aberration en latitude, que parceque le point F est plus éloigné de la ligne des quadratures HS que le point L; donc les mêmes aberrations auroient eu lieu, quand même la Terre auroit décrit séparément et successivement les lignes FN et NL.

2853. La ligne LN est donc la mesure de l'aberration en latitude; et comme elle est plus petite que FL, qui, multipliée par le sinus de la latitude, donneroit la plus grande aberration (2850), l'on aura aussi une aberration plus petite : le petit triangle FNL est semblable au triangle SLV (3446), et les côtés homologues sont proportionnels; donc SL : VL :: LF : LN, c'est-à-dire que le rayon est au sinus de la distance à l'opposition, comme la plus grande aberration en latitude est à l'aberration actuelle en latitude.

Donc, pour avoir l'aberration en latitude à un jour donné, il faut multiplier la plus grande aberration, ou 20'' sin. lat. par le sin. de l'élongation de l'étoile : la latitude (australe ou boréale) en sera ~~diminuée~~ augmentée avant l'opposition, ou vers la premiere quadrature, et diminuée ~~augmentée~~ après l'opposition. (V. l'argument de l'elong. = longit. ✱ — longit. du ☉. No. 2446.)

2854. Pour trouver l'argument d'aberration en latitude, on prendra la longitude du Soleil au temps où l'aberration en latitude est la plus grande, et en même temps soustractive, ainsi que nous l'avons fait pour l'aberration en longitude (2846) : il suffira d'ajouter trois signes à la longitude de l'étoile; car, dans la premiere quadrature, la Terre étant en Q, le Soleil est évidemment plus avancé de trois signes que le lieu de l'étoile. Ainsi, de la longitude de l'étoile augmentée de trois signes, on ôtera la longitude du Soleil à un temps donné, et l'on aura la distance de la Terre au point Q, ou l'argument de l'aberration en latitude, dont le cosinus, multiplié par la plus grande aberration donnera l'aberration en latitude : car le

cosinus de la distance de la Terre au point Q est la même chose que le sin. de sa distance au point G, ou de l'élongation de l'étoile. Cette aberration sera soustractive de la latitude moyenne dans les signes 0, 1, 2, 9, 10, 11; mais elle sera additive dans le second et le troisieme quart de l'argument (si l'argument est pris = (longit. de l'étoile + 3^{s}) –

2855. Par le moyen des expressions de l'aberration en longitude (2848), et en latitude (2853), il est aisé de démontrer que les étoiles paroissent décrire des ellipses, ainsi que par l'effet de la parallaxe (2793).

Soit E (FIG. 238) le lieu moyen de l'étoile, celui où elle paroîtroit sans les inégalités de l'aberration; la ligne LEK parallele à l'écliptique, et supposée de 40$''$, l'étoile sera en K la plus occidentale qu'elle puisse être, ayant la moindre longitude possible au temps de sa conjonction au Soleil (2843); elle sera en L la plus orientale, et ayant sa plus grande longitude au temps de l'opposition. L'aberration en longitude sera nulle, et l'étoile répondra au point E dans le temps des quadratures; si l'on décrit un demi-cercle LCK, et qu'on prenne l'arc CD égal à la distance de l'étoile à sa quadrature, ou LD égal à son élongation, en abaissant la perpendiculaire DV, l'on sera sûr que EV est l'aberration en longitude; car EV = EL sin. CD = 20$''$ cos. élong. : c'est la valeur de l'aberration en longitude (2848).

Ayant pris de même sur le cercle de latitude une quantité EA égale à la plus grande aberration en latitude au temps des quadratures, on décrira le cercle ABF; et ayant pris l'arc BT égal à l'élongation, on tirera PTS parallele à EL. Cette ligne rencontrera VD au point S; alors RT ou SV sera l'aberration en latitude; car TR = EA sin. élong. = 20$''$ sin. latit. sin. élong., ce qui est l'expression de l'aberration en latitude (2853). L'étoile paroîtra donc en S; or le point S appartient évidemment à une ellipse, car EV est le sinus de l'arc CD dans le grand cercle, et VS est le cosinus de AT dans le petit cercle, ce qui détermine une ellipse (3397).

2856. Ainsi chaque étoile, par l'effet de l'aberration, décrit une ellipse ALFK, dont le grand axe est parallele à l'écliptique, et a 40$''$ de longueur. Le point L, qui est le plus à gauche ou à l'orient, est le lieu où paroît l'étoile lorsqu'elle est en opposition (2843); le point K est celui de la conjonction, le point A, si c'est une étoile australe, ou le point F, si c'est une étoile boréale; c'est-à-dire le point de l'ellipse qui est le plus près de l'écliptique, marque le lieu apparent de l'étoile trois mois après la conjonction. L'aberration en longitude étant toujours le cosinus de l'élongation de l'étoile dans le

cercle KCDLH, si l'on marque en K le lieu du Soleil qui est égal à la longitude de l'étoile, et qu'on divise le cercle en 360°, les perpendiculaires abaissées de chaque degré de longitude sur le grand axe LEK, marqueront sur l'ellipse tous les points où l'étoile doit paroître aux mêmes temps : je suppose que cette ellipse soit celle que paroît décrire *Arcturus*, dont la longitude est de 6^s 21°; on marquera en K 6^s 21°; c'est le lieu du Soleil au temps où Arcturus paroît en K le 13 octobre; en H le lieu du Soleil trois mois après; le point D tombera sur 1^s 26° de longitude; abaissant donc la perpendiculaire DSV, elle marquera en S le lieu apparent de l'étoile sur son ellipse, lorsque le Soleil a 1^s 26° de longitude, c'est-à-dire le 16 mai. L'on peut aussi diviser le cercle LDCKH en 365 jours, en partant du point K où sera le jour de la conjonction; et abaissant une perpendiculaire DV du jour marqué en D sur le grand axe, elle déterminera le lieu S où doit paroître l'étoile au jour donné. C'est ainsi que j'ai marqué, dans la fig. 230, les situations d'Arcturus et de Sirius sur leurs ellipses d'aberrations: Arcturus est à l'extrémité occidentale du grand axe de son ellipse à droite, le 13 octobre, jour de sa conjonction; il est à l'extrémité inférieure ou méridionale du petit axe, le 11 janvier, jour de la premiere quadrature; au contraire, Sirius est à l'extrémité supérieure ou boréale du petit axe de son ellipse, le 3 octobre, jour de sa premiere quadrature, parceque les étoiles paroissent toujours le plus près de l'écliptique trois mois après la conjonction; les étoiles boréales sont alors au midi, et les étoiles australes sont au nord. L'ellipse d'Arcturus est inclinée par rapport à la ligne horizontale AB, que je suppose parallele à l'équateur, de la quantité de l'angle de position (1047). Les mois que j'ai marqués au-dedans de l'ellipse sont pour l'effet de la parallaxe (2794), qui faisoit paroître l'étoile au même point de l'ellipse trois mois plutôt que ne fait l'aberration.

2857. M. Boscovich, dans sa dissertation *De annuis fixarum aberrationibus*, imprimée à Rome en 1742, fait voir qu'une parallaxe combinée avec l'aberration produiroit encore une ellipse de même ellipticité, pour la trace apparente des étoiles; avec cette différence que le lieu de l'étoile seroit éloigné du lieu où elle paroît, en vertu de l'aberration toute seule, vers l'endroit où la feroit paroître la parallaxe, d'un arc dont la tangente est au rayon comme la parallaxe est à l'aberration.

2858. L'aberration en longitude EV (FIG. 238), que nous venons de déterminer sur le parallele de l'étoile (2855), en supposant EL de 20″, doit être réduite à l'écliptique pour les usages astronomiques, c'est-à-dire

c'est-à-dire qu'il faut la diviser par le cosinus de la latitude de l'étoile (3879); de là vient que l'aberration en longitude, qui n'excede jamais 20″ de grand cercle si on la prend sur le parallele d'une étoile, devient très grande pour les étoiles voisines du pole de l'écliptique, si on la mesure sur l'écliptique.

2859. L'ellipse d'aberration devient d'autant plus ouverte, que les étoiles s'éloignent plus de l'écliptique; elle forme un cercle de 40″ de diametre pour une étoile située au pole même de l'écliptique (2842); ensuite le demi petit axe diminue comme le sinus de la latitude; enfin cette ellipse devient infiniment étroite, et se réduit à la ligne droite KEL pour les étoiles situées exactement dans l'écliptique. Mais dans le cas de la ligne droite, on assigneroit également le lieu apparent de l'étoile sur cette ligne, en divisant le cercle KCDH en 365 jours, et abaissant de chaque jour des perpendiculaires DV sur le grand axe : ces perpendiculaires marqueroient sur la ligne droite LEK la situation apparente de l'étoile pour chaque jour de l'année, et ses distances au point E du milieu seroient toujours les cosinus de l'élongation de l'étoile.

2860. Au moyen de l'ellipse d'aberration, l'on peut trouver l'aberration en déclinaison et en ascension droite, comme l'a fait Clairaut (*Mém. acad.* 1737)[a]; on peut voir aussi le travail d'Euler, dans les Mémoires de Pétersbourg, *Tom. XI*, et de Berlin, 1746; Simpson (*Essays on several subjects*, 1740); le *Traité sur l'aberration*, par Fontaine des Crutes, *in*-8°, 1744; la Caille, dans ses leçons d'astronomie; Boscovich, dans le 5e volume de ses OEuvres, 1785, *pag.* 417; M. Cagnoli, dans sa Trigonométrie. Je vais en donner aussi le détail, parceque les astronomes font un usage perpétuel des aberrations en ascension droite et en déclinaison. La Caille en a donné des Tables (*Astron. fundam.* 1757), qui se trouvent aussi dans le recueil (2729), et sont augmentées dans le 7e volume de mes Éphémérides.

2861. La premiere chose que nous ferons sera de chercher le temps de l'année auquel l'aberration en déclinaison est nulle, ou le lieu du Soleil qui répond à ce temps. Soit E le lieu moyen d'une étoile (FIG. 239), PEG le cercle de latitude qui passe par l'étoile E, REe le cercle de déclinaison, PER l'angle de position (1050),

(a) Il seroit plus court de se passer de cette ellipse, comme l'a fait M. Cagnoli, ainsi que M. de Lambre, dans son Mémoire où il a renfermé en trois pages et demie toutes les regles de l'aberration : mais l'ellipse donne une idée naturelle et satisfaisante du phénomene de l'aberration, et des résultats fort simples; ce qui fait que je la conserve ici.

ANKGM l'ellipse que l'étoile paroît décrire chaque année par l'effet de l'aberration, et dont le grand axe LK est nécessairement perpendiculaire à PEG (2856); ayant tiré MN perpendiculaire au cercle de déclinaison RE*e*, l'on voit que lorsque l'étoile sera en M et en N, l'aberration en déclinaison sera nulle. Supposons autour de l'ellipse d'aberration un cercle circonscrit LFYK, divisé en signes et en degrés; marquons au point K la longitude même de l'étoile : les points B et Y du cercle circonscrit, déterminés par les ordonnées BC et YW, représenteront les lieux du Soleil au temps où l'étoile paroît en M et en N (2856). Pour connoître la situation du point Y, ou l'angle YEW, on observera que, par la propriété de l'ellipse, WN est à WY comme le petit axe de l'ellipse est au grand (3387), ou comme le sinus de la latitude de l'étoile est au rayon (2856); mais aussi WN est à WY comme la tangente de WEN est à la tangente WEY, et WEN est égal à PER ou à l'angle de position : donc *le sinus de la latitude de l'étoile est au rayon comme la tangente de l'angle de position est à la tangente d'un angle,* qui est la distance entre le lieu de l'étoile, qu'on suppose marqué en K, et le lieu du Soleil quand l'aberration en déclinaison est nulle.

2862. Il faut trouver aussi le lieu du Soleil, lorsque l'aberration en déclinaison est la plus grande : supposons à l'ellipse une tangente QI parallele à MN; le point de contact Q marque le point où l'aberration en déclinaison QH, ou IE, est la plus grande; EQ se trouve, par cette construction, être un demi-diametre conjugué au demi-diametre EM, puisque la tangente QI est parallele à MN (3388). Ayant tiré l'ordonnée DQF au cercle, le point F est le lieu du Soleil au temps où l'aberration en déclinaison est la plus grande; si l'on tire le rayon EF du cercle, l'angle FEB sera un angle droit (3393): ce qui prouve que le lieu du Soleil, au temps de la plus grande aberration en déclinaison, ou le point F, est éloigné de 3 signes du lieu du Soleil B au temps où l'aberration en déclinaison est nulle (2861). Je donnerai ci-après une autre méthode (2867).

2863. Pour trouver la valeur de la plus grande aberration en déclinaison QH, on a, par la propriété de l'ellipse, $QH \times EM = EG \times EL$ (3394); $\frac{QH}{EL} = \frac{EG}{EM} = \frac{EG.\ BE}{EM.\ BE} = \frac{CM.\ BE}{EM.\ BC}$ (en mettant $\frac{CM}{BC}$ à la place de $\frac{EG}{}$) (3387); mais $\frac{CM.\ BE}{EM.\ BC}$ est égal à $\frac{CM}{EM}$ divisé par $\frac{BC}{BE}$, c'est-à-dire au sin. de l'angle MEC divisé par le sinus de l'angle BEC (3801); donc QH : EL :: sin. MEC : sin. BEC, et sin. BEC ou cos. FEL : sin. MEC ou PER :: EL ou 20″ : QH; donc le cosinus de l élonga-

tion de l'étoile au temps de la plus grande aberration en déclinaison est au sinus de l'angle de position comme 20″ sont à la plus grande aberration en déclinaison. On en verra ci-après une autre expression (2870) : on en trouvera une Table dans le recueil cité.

2864. L'aberration en déclinaison, en tout autre temps de l'année, est comme le sinus de la distance du Soleil aux points B ou Y dans lesquels elle étoit nulle. Soit S le lieu apparent de l'étoile pour un temps donné, X le lieu du Soleil qui y répond, ST l'aberration en déclinaison ; que l'on mene une ordonnée SV au diametre MN : ST sera toujours à SV en raison constante, puisque toutes les ordonnées telles que SV font le même angle avec le diametre MN, et avec les lignes telles que ST, qui lui sont perpendiculaires. De plus, la ligne SV, ordonnée au diametre NEM de l'ellipse, a un rapport constant avec XZ, perpendiculaire à EY, et sinus de l'arc XY : en effet, on n'a qu'à considérer l'ellipse ANK comme projection du cercle circonscrit (3388), en concevant que ce cercle est relevé et tourne autour de l'axe LK suffisamment pour que le point Y réponde perpendiculairement en N, le diametre EN de l'ellipse sera la projection du rayon EY du cercle ; le demi-diametre EQ sera la projection de EF : toute ligne parallele à EF, telle que XZ, aura sa projection SV parallele à EQ ; car deux lignes paralleles projetées perpendiculairement sur un plan ne peuvent former que des projections paralleles [a] ; donc SV, projection de XZ, a un rapport constant avec XZ : mais SV a encore un rapport constant avec ST ; donc XZ aura aussi un rapport constant avec ST. Or la ligne XZ est le sinus de l'arc XY, distance entre le lieu Y du Soleil lorsque l'aberration étoit nulle, et le lieu actuel X du Soleil ; donc l'aberration en déclinaison ST est comme le sinus de cette distance.

2865. Ainsi, connoissant le lieu du Soleil au temps de la plus grande aberration en déclinaison (2862), et ôtant le lieu actuel du Soleil, on aura l'argument annuel d'aberration (2846), dont le cosinus, multiplié par la plus grande aberration, donne l'aberration actuelle en déclinaison.

2866. Il nous reste à donner des regles générales et faciles pour l'aberration en déclinaison, qui dispensent de chercher l'angle de position, et d'examiner la situation respective des cercles de latitude et de déclinaison. La Caille avoit donné des regles générales pour

(a) On peut prouver encore autrement que SV est la projection de XZ, en achevant de tirer les doubles ordonnées XZO et SV*s*, l'une au cercle, l'autre à l'ellipse ; on voit alors d'une maniere évidente que le point X a sa projection en S, le point O en *s*, et que SV*s* est la projection de XZO.

cet effet, et je les avois démontrées dans la seconde édition de mon Astronomie ; mais elles étoient trop compliquées. M. de Lambre en a trouvé de très simples, qui sont énoncées dans la Connoissance des temps de 1788, et dont je vais rapporter les démonstrations d'après M. Cagnoli, articles 790 et 791 de sa Trigonométrie.

2867. Soit P le pole du monde (FIG. 240), O le pole de l'écliptique, EQ l'équateur, EC l'écliptique, S le lieu d'une étoile, PSAM le cercle de déclinaison, OSL le cercle de latitude. Le point L ayant la même longitude que l'étoile, marque le lieu du Soleil au temps où l'aberration en latitude est nulle (2850) : ayant tiré le cercle STR perpendiculaire au cercle de déclinaison PSA, le point T marquera le lieu du Soleil lorsque l'aberration en déclinaison est la plus grande ; puisque dans le triangle sphérique STL on a cette proportion (3882), sin. SL : R :: cotang. TSL : cot. TL, ce qui revient à la proportion démontrée pour l'aberration (2861).

2868. Connoissant le point A de l'équateur qui marque l'ascension droite de l'étoile S, on trouvera sa déclinaison et l'angle SMT formé par l'écliptique et le cercle de déclinaison (895) ; on prendra la somme de AM et de la déclinaison AS de l'étoile, ou leur différence, et l'on aura SM. Dans le triangle MST rectangle en S, on a cos. M : R :: tang. MS : tang. MT, ce qui fera connoître le lieu T. Il suffit pour cela d'ajouter MT à la longitude du point M, à moins que l'étoile ne soit entre l'écliptique et l'équateur ; l'arc MT sera plus grand que 90°, si l'angle M et le côté MS sont de différente espece : c'est dans le 2ᵉ et 3ᵉ quart d'ascension droite pour les étoiles boréales, dans le 1ᵉʳ et le 4ᵉ pour les étoiles australes.

La plus grande aberration en déclinaison, qui arrive quand le Soleil est en T, est $\frac{20'' \text{sin. MSL}}{\text{cos. LT}}$ (2863) ; mais dans le triangle SLT rectangle en L, cos. TSL ou sin. MSL = sin. LTS cos. LT (3885) ; donc l'expression précédente est 20″ sin. LTS.

Le triangle MST donne sin. LTS ou MTS $= \frac{\text{sin. MS}}{\text{sin. MT}}$ (3873) ; ainsi l'on a encore $\frac{20'' \text{sin. MS}}{\text{sin. MT}}$ pour la grande aberration en déclinaison. Si pour sin. LTS ou ETR on met sa valeur $\frac{\text{sin. ER sin. ERT}}{\text{sin. ET}}$, on aura une troisieme expression de la plus grande aberration en déclinaison, 20″ cos. asc. dr. sin. déclin. divisés par le sinus de la longitude du Soleil au temps de la plus grande aberration soustractive, parceque l'angle R a pour mesure l'arc SA, et que RA est de 90°.

2869. Pour avoir des expressions qui ne renferment que l'ascension droite et la déclinaison de l'étoile, nous nommerons A l'ascension droite de l'étoile, D sa déclinaison, O l'obliquité de l'écliptique. Le triangle ETR donne (3960) cot. ET $= \frac{\text{cot. ERT sin. E}}{\text{sin. ER}} +$ cos. E cot. ER $= \frac{\text{cot. D. sin. O}}{\text{cos. A}} -$ cos. O tang. A; car cot. ER $= -$ tang. A, puisque ER est égale à l'ascension droite augmentée de 90 degrés.

Il suffit ici d'observer les changemens de signe pour cos. tang. asc. dr. et cot. déclin., et l'on saura si la cot. de ET ou de la longitude du Soleil appartient à un angle aigu ou obtus : cependant, comme dans chaque moitié du cercle il y a une cotang. positive et une négative, on pourroit se tromper de 180°; mais il suffit d'ajouter 6 sig. au lieu trouvé, lorsque l'étoile est dans le second ou troisieme quart d'ascension droite. *V.* M. Cagnoli, art. 791.

2870. Si l'on nomme L le lieu du Soleil au temps de la plus grande aberration soustractive en déclinaison, et S le lieu actuel du Soleil, l'aberration actuelle sera $\frac{-20'' \text{cos. A. sin. D. cos. (L} - \text{S)}}{\text{sin. L}}$ (2865) $= \frac{-20'' \text{cos. A. sin. D. (cos. L cos. S} + \text{sin. L sin. S)}}{\text{sin. L}}$ (3812) $= - 20''$ cos. A sin. D cot. L cos. S $- 20''$ cos. A sin. D sin. S; substituant la valeur précédente de cot. ET ou cot. L, on trouve $- 20''$ sin. D cos. S cot. D sin. O $+ 20''$ cos. A sin. D cos. S cos. O tang. A $- 20''$ cos. A sin. D sin. S $= - 20''$ sin. O cos. D cos. S $+ 20''$ cos. O sin. A sin. D cos. S $- 20''$ cos. A sin. D sin. S $= - 20''$ sin. O cos. D cos. S $- 20''$ (cos. A sin. S $-$ cos. O sin. A cos. S) sin. D : c'est l'aberration actuelle en déclinaison; il en faut changer le signe pour les déclin. australes. M. de Lambre s'est servi de cette formule pour calculer de grandes Tables d'aberration en déclinaison, mais elles sont encore manuscrites. M. Cagnoli donne la même formule dans sa Trigonométrie, art 791.

2871. Pour trouver le lieu du Soleil au temps de la plus grande aberration en ascension droite, et la quantité de cette plus grande aberration, je commencerai encore par la considération des diametres de l'ellipse, et je me servirai ensuite des cercles de la sphere. Soit OHE (fig. 241) le cercle de latitude qui passe par le lieu moyen E de l'étoile, AEB le cercle de déclinaison; les points A et B de l'ellipse seront ceux où l'aberration en ascension droite est nulle; si l'on tire par le point A une ordonnée DAV, elle déterminera le point V où est le Soleil lorsque l'aberration en ascension droite est nulle (2856). Les lignes DV et DA sont comme les tangentes des

angles DEV, DEA, et comme le grand axe de l'ellipse est au petit, c'est-à-dire, comme le rayon est au sinus de la latitude de l'étoile (2850); donc *le sinus de la latitude de l'étoile est au rayon comme la cotangente de l'angle à l'étoile est à la tangente de l'angle DEV ou de l'arc LV ou KV; c'est la distance entre le lieu de l'étoile marqué en K* (2861), et le lieu du Soleil pour le temps où l'aberration en ascension droite est nulle.

2872. Si l'on tire au diametre AB un diametre conjugué MN, les points M et N seront ceux où l'aberration en ascension droite est la plus grande; car la tangente en N est parallele à AB : le point N de l'ellipse est donc de tous les points de cette courbe le plus éloigné de la ligne AB, ou du cercle de déclinaison qui passe par le lieu moyen E de l'étoile; ayant tiré l'ordonnée CNF, le point C désigne le lieu du Soleil lorsque l'aberration en asc. dr. est la plus grande; et comme, par la propriété de l'ellipse, l'angle VEC est droit (3393), il s'ensuit que le lieu C du Soleil, au temps de la plus grande aberration en asc. dr., est éloigné de 90° du point V, qui est le lieu du Soleil au temps où elle étoit nulle. (*Voyez* la regle 2878.)

2873. La perpendiculaire NG, tirée du point N sur la ligne AG, est la plus grande aberration en ascension droite, mesurée dans la région de l'étoile; $NG \times AE = LE \times EH$ (3394); ou AE : LE ou EV :: EH : NG; donc $\frac{AD}{EV} : \frac{AD}{AE}$ :: EH : NG; mais AD : EH :: DV : EO; donc $\frac{DV}{EV} : \frac{AD}{AE}$ :: EO : NG; c'est-à-dire, le sinus de l'arc LV est au cosinus de l'angle de position OEA, comme 20″ sont à la plus grande aberration en ascension droite, qu'il faudra ensuite diviser par le cosinus de la déclinaison. L'arc OV est la distance entre le point O, où l'aberration en longitude est nulle, et le point V, où est le Soleil quand l'aberration en ascension droite est nulle. (*Voyez* aussi 2878.)

2874. Si l'étoile est dans un autre point de son ellipse, tel que S, la ligne SP, perpendiculaire sur AEB, sera l'aberration d'ascension droite. Pour la trouver, on tirera une ordonnée SR au diametre AB, qui soit parallele à MN; le rapport de SR à SP est constant, et l'ordonnée SR de l'ellipse est la projection d'une ordonnée QT au cercle (2864); donc SR ayant un rapport constant avec SP et avec QT, il y aura aussi un rapport constant entre SP et QT, qui est le sinus de l'arc QV : donc l'aberration actuelle en ascension droite SP est comme le sinus de la distance QV du Soleil au lieu où il étoit lorsque l'aberration en ascension droite étoit nulle.

2875. On peut avoir la quantité de la plus grande aberration en ascension droite sous une forme plus simple, en employant l'angle M (FIG. 240) de l'écliptique et du méridien qui passe par l'étoile. Le point M est le lieu où se trouve le Soleil lorsque l'aberration en ascension droite est la plus grande; car dans le triangle SLM rectangle en L, on a cette proportion : R : sin. SL :: tang. MSL : tang. ML (3882), ce qui revient à la proportion de l'art. 2871. L est le lieu du Soleil lorsque l'étoile est en conjonction, et que l'aberration en longitude est la plus grande; ainsi ML est égale à la différence des points où ces deux aberrations sont nulles : on trouvera donc la plus grande aberration en ascension droite (2873) $= \frac{20'' \cos. MSL}{\cos. ML}$ dans la région de l'étoile, et $\frac{20'' \cos. MSL}{\cos. ML \cos. SA}$ sur l'équateur (3879) ; mais dans le triangle MSL rectangle en L, on a cos. MSL = sin. M cos. ML (3885); donc substituant cette valeur, on a $\frac{20'' \sin. M}{\cos. SA}$ pour la plus grande aberration en ascension droite. L'angle M est facile à trouver, car, dans beaucoup de tables astronomiques, on a l'angle de l'écliptique avec le méridien pour chaque point M de l'écliptique. Cette expression revient aussi à $\frac{20'' \cos. E}{\cos. SA \cos. AM}$, en mettant $\frac{\cos. E}{\cos. AM}$ au lieu de sin. M (3885).

2876. Pour n'employer que l'ascension droite et la déclinaison de l'étoile, on suivra les dénominations de l'art. 2869. On aura d'abord l'aberration actuelle $- \frac{20'' \sin. M \cos. (L-S)}{\cos. SA} = \frac{20'' \sin. M}{\cos. D}$ (cos. L cos. S + sin. L sin. S). Le triangle AME donne cot. ME = cos. E cot. AE, ou cot. L = cos. O cot. A; c'est le lieu du Soleil au temps de la plus grande aberration en ascension droite.

De plus, $\sin. M = \frac{\sin. AE}{\sin. ME} = \frac{\sin. A}{\sin. L}$; ainsi la plus grande aberration $\frac{20'' \sin. M}{\cos. D} = \frac{20'' \sin. AE}{\cos. D \sin. ME} = \frac{20'' \sin. A}{\cos. D \sin. L}$, et l'aberration actuelle en asc. dr. $\frac{-20'' \sin. A}{\cos. D \sin. L}(\cos. L \cos. S + \sin. L \sin. S) = \frac{-20'' \sin. A \cot. L \cos. S - 20'' \sin. A \sin. S}{\cos. D}$ $= \frac{20'' \sin. A \cos. S \cos. O \cot. A - 20'' \sin. A \sin. S}{\cos. D} = \frac{-20'' \cos. O \cos. A \cos. S - 20'' \sin. A \sin. S}{\cos. D}$. Le numérateur de cette fraction donne aussi le coëf. de sin. D dans l'aberration en déclinaison (2870), en ajoutant 3 signes à l'argument. Cette formule a servi à M. de Lambre pour ses grandes Tables d'aberration (2870); mais il a fait aussi de petites tables ingénieuses et commodes qui servent pour toutes les aberrations, au moyen de deux multiplications; je vais les rapporter ici.

Tables générales d'aberration pour les étoiles.

Table I. Argument A—S					Table II. Argument A+S				
Degrés.	0. VI. − + *Sec.*	I. VII. − + *Sec.*	II. VIII. − + *Sec.*		*Degrés.*	0. VI. + − *Sec.*	I. VII. + − *Sec.*	II. VIII. + − *Sec.*	
0.	19,17	16,66	9,59	30.	0.	0,83	0,72	0,41	30.
1.	19,17	16,43	9,30	29.	1.	0,83	0,71	0,40	29.
2.	19,16	16,26	9,00	28.	2.	0,82	0,70	0,39	28.
3.	19,15	16,08	8,70	27.	3.	0,82	0,69	0,38	27.
4.	19,13	15,89	8,40	26.	4.	0,82	0,68	0,37	26.
5.	19,10	15,71	8,10	25.	5.	0,82	0,67	0,35	25.
6.	19,07	15,51	7,80	24.	6.	0,82	0,67	0,33	24.
7.	19,03	15,31	7,49	23.	7.	0,82	0,66	0,32	23.
8.	18,99	15,11	7,19	22.	8.	0,82	0,65	0,30	22.
9.	18,94	14,90	6,87	21.	9.	0,82	0,64	0,29	21.
10.	18,88	14,69	6,56	20.	10.	0,82	0,63	0,28	20.
11.	18,82	14,47	6,24	19.	11.	0,82	0,62	0,27	19.
12.	18,75	14,25	5,93	18.	12.	0,82	0,61	0,25	18.
13.	18,68	14,02	5,61	17.	13.	0,81	0,61	0,24	17.
14.	18,60	13,79	5,28	16.	14.	0,81	0,60	0,23	16.
15.	18,52	13,56	4,96	15.	15.	0,80	0,58	0,22	15.
16.	18,43	13,32	4,64	14.	16.	0,80	0,57	0,20	14.
17.	18,33	13,08	4,31	13.	17.	0,80	0,56	0,19	13.
18.	18,23	12,83	3,99	12.	18.	0,79	0,55	0,17	12.
19.	18,13	12,58	3,66	11.	19.	0,78	0,54	0,15	11.
20.	18,02	12,32	3,33	10.	20.	0,78	0,53	0,14	10.
21.	17,90	12,07	3,00	9.	21.	0,77	0,52	0,12	9.
22.	17,78	11,80	2,67	8.	22.	0,76	0,51	0,11	8.
23.	17,65	11,54	2,34	7.	23.	0,76	0,50	0,10	7.
24.	17,52	11,27	2,00	6.	24.	0,75	0,49	0,09	6.
25.	17,38	11,00	1,67	5.	25.	0,75	0,49	0,07	5.
26.	17,23	10,72	1,34	4.	26.	0,75	0,46	0,06	4.
27.	17,08	10,44	1,00	3.	27.	0,74	0,45	0,05	3.
28.	16,93	10,16	0,67	2.	28.	0,73	0,44	0,03	2.
29.	16,77	9,87	0,33	1.	29.	0,72	0,43	0,02	1.
30.	16,60	9,59	0,00	0.	30.	0,72	0,41	0,00	0.
	− + XI. V.	− + X. IV.	− + IX. III.	*Deg.*		+ − XI. V.	+ − X. IV.	+ − IX. III.	*Deg.*

TABLES GÉNÉRALES d'aberration pour les étoiles.

TABLE III. Argument S+D et S—D

Degrés.	O. VI. — + Sec.	I. VII. — + Sec.	II. VIII. — + Sec.	
0.	3,98	3,45	1,99	30.
1.	3,98	3,42	1,93	29.
2.	3,98	3,38	1,87	28.
3.	3,98	3,34	1,81	27.
4.	3,97	3,30	1,75	26.
5.	3.97	3,26	1,68	25.
6.	3,96	3,22	1,62	24.
7.	3,95	3,18	1,56	23.
8.	3,94	3,14	1,49	22.
9.	3,93	3,10	1,43	21.
10.	3,92	3,05	1,36	20.
11.	3,91	3,01	1,30	19.
12.	3,90	2,97	1,23	18.
13.	3,89	2,92	1,17	17.
14.	3,87	2,87	1,10	16.
15.	3,85	2,82	1,03	15.
16.	3,83	2,77	0,97	14.
17.	3,81	2,72	0,90	13.
18.	3,79	2,67	0,83	12.
19.	3,77	2,62	0,76	11.
20.	3,74	2,56	0,69	10.
21.	3,72	2,51	0,63	9.
22.	3,70	2,46	0,56	8.
23.	3,67	2,40	0,49	7.
24.	3,64	2,34	0,42	6.
25.	3,61	2,28	0,35	5.
26.	3,58	2,23	0,28	4.
27.	3,55	2,17	0,21	3.
28.	3,52	2,11	0,14	2.
29.	3.49	2,05	0,07	1.
30.	3,45	1,99	0,00	0.
	— + XI. V.	— + X. IV.	— + IX. III.	Deg.

Usage de ces Tables.

A = Asc. dr. } de l'étoile boréale.
D = Déclin. }
S = Longitude du Soleil.

Entrez dans la Table premiere avec l'argument A — S, et dans la seconde avec l'argument A + S; la somme des deux nombres que vous y prendrez, multipliée par sécante D, ou divisée par le cosinus, sera l'aberration en ascension droite.

Entrez dans la Table premiere avec l'argument A — S + 3ˢ, et dans la seconde avec A + S + 3ˢ, la somme des deux nombres que vous y prendrez, multipliée par sin. D, sera la premiere partie de l'aberration en déclinaison.

Entrez dans la Table III, d'abord avec l'argument S + D, et puis avec S — D; vous aurez les deux autres parties de l'aberration en déclinaison.

Si l'étoile étoit australe, on ajouteroit VIˢ à chacun des argumens S + D et S — D.

EXEMPLE.

On demande l'aberration pour α de l'Aigle, le 30 août 1780, à 9 heures du soir.

$A = 9^s\ 25^d\ 1'$.
$S = 5.\ 8.\ 33.$

$A - S = 4.\ 16.\ 28.$ Table I.	+	13″,90.
$A + S = 3.\ 3.\ 34.$ Table II.	—	0, 06.
Somme.	+	13, 84.
Multipliez par sécante $D = 8^d\ 18'$.		1, 011.
		13, 84.
		1384.
		138.
Aberration en ascension droite	+	13, 99.
$A - S + 3^s = 7^s\ 16^d\ 28'$ Table I.	+	13″,20.
$A + S + 3. = 6.\ 3.\ 34.$ Table II.	—	0, 82.
Somme.	+	12, 38.
Multipliez par sin. $D = 8^d\ 18'$		0, 144.
		1, 238.
$S = 5^s\ 8.\ 33.$		4952.
		495.
	+	1, 7827.
$S + D = 5^s\ 16^d\ 51'$ Table III	+	3, 89.
$S - D = 5.\ 0.\ 15.$ Table III	+	3, 46.
Aberration en déclinaison.	+	9, 13.

Si l'étoile eût été australe, on auroit eu

$S + D + VI^s = XI^s\ 16^d\ 51'$ Table III	—	3″,89.
$S - D + VI. = 0.\ 3.\ 34.$ Table III	—	3, 46.
Premiere partie.	+	1, 78.
Aberration en déclinaison.	—	5, 57.

2877. Pour former ces Tables, il suffit de substituer dans les formules (2870, 2876) au lieu de cos. A sin. S, sin. A cos. S, cos. A cos. S, sin. A sin. S, et cos. L cos. D, leurs valeurs (3813, 3816), et l'on aura les expressions suivantes. *Conn. des T.* 1788, *pag.* 229.

Soit O l'obliquité de l'écliptique, A l'ascension droite de l'étoile, D sa déclinaison, S la longitude du Soleil pour le jour donné; l'ab. en asc. dr. sera $= - \frac{10''(1+\cos. O)\cos.(A-S) - 10''(1-\cos. O)\cos.(A+S)}{\cos. D}$,

l'aberration en déclin. $= + 10''(1+\cos. O)\sin.(A-S)\sin. D$
$- 10''(1-\cos. O)\sin.(A+S)\sin. D$
$- 10''\sin. O\cos.(S-D)$
$- 10''\sin. O\cos.(S+D)$.

Les deux derniers termes changent de signe pour les déclinaisons australes.

2878. Le lieu du Soleil au temps de la plus grande aberration en ascension droite (2871) se peut aussi trouver sans calcul par la Table qui donne la réduction de l'écliptique à l'équateur, ou la différence entre la longitude et l'ascension droite du Soleil. En effet le point A marque l'ascension droite de l'étoile S, le point M désigne le lieu de l'écliptique où se trouve le Soleil quand l'aberration en ascension droite est la plus grande; ainsi, pour avoir ce point M, il ne faut que prendre dans mes anciennes Tables la différence de la longit. à l'asc. droite : c'est la différence entre EA et EM; on l'ajoute à l'ascension droite dans le 1er et le 3e quart d'ascension droite; on la retranche dans le 2e et le 4e quart; on a la longitude du point M où est le Soleil, quand l'aberration en ascension droite est la plus grande. Cette quantité, qu'il faut ajouter à l'ascension droite de l'étoile, ne va jamais au-delà de 2° 28′ 25″. Comme cette Table est pour les degrés de longitude, si l'on veut avoir à chaque degré d'ascension droite la réduction de l'équateur à l'écliptique, on prend pour argument l'ascension droite, augmentée de 3 signes.

2879. Pour servir d'exemple aux regles précédentes, je mettrai ici une Table où l'on verra, pour dix étoiles principales du ciel, les plus grandes aberrations en 1800, avec les lieux du Soleil au temps où les aberrations sont nulles, et sur le point de devenir additives. En ôtant 3 signes, on auroit les lieux où les aberrations soustractives sont les plus grandes; en ôtant du lieu actuel du Soleil celui qui est dans cette Table, on aura le nombre dont le sinus, multiplié par la plus grande aberration, donne l'aberration actuelle additive dans les six premiers signes. On trouvera dans les différens

volumes de la Connoissance des Temps, depuis 1760, des Tables d'aberrations plus détaillées et fort utiles ; celles des principales étoiles ont été réimprimées plusieurs fois : toutes celles que j'avois publiées ont été rassemblées dans la Connoissance des Temps de 1781 ; mais elles n'y sont que de 15 en 15 degrés. On en trouve 352 dans le Livre de Mezger, *Tabulae aberrationis, etc. Mannhemii* 1778 ; et elles y sont de dix en dix degrés de longitude du Soleil. On en a mis 500 dans les Éphémérides de Vienne, 1784 et 1785 ; mais il y en a beaucoup de défectueuses. M. de Lambre en a calculé 252 dans la Connoissance des Temps de 1789, 1790 et 1791 ; il y a donné l'errata pour celles de Mezger.

2880. Pour l'étoile polaire, la plus grande aberration en ascension droite est de 9′ 36″7 en 1788, et de 9′ 47″9 en 1793 ; elle change rapidement par l'inégalité du cosinus de la déclinaison ; c'est pourquoi je ne l'ai pas mise dans la Table suivante.

NOMS DES ÉTOILES.	Lieu du Sol. au temps où l'aber. en asc. dr. est nulle pour 1800.	La plus grande aberration en asc. dr.	Lieu du Soleil au temps où l'aberration en déclin. est nulle.	La plus grande aberr. en déclinaison.
Aldébaran,	5ˢ 7° 53′	20″5	4ˢ 6° 49′	3″8
La Chevre,	5 16 38	28,5	8 3 23	8,0
Épaule orient. d'Orion,	5 26 25	20,2	3 1 48	5,6
Sirius,	6 8 21	20,8	9 4 0	12,8
Régulus,	7 27 13	19,3	1 25 47	6,9
L'épi de la Vierge,	9 20 13	18,8	9 26 2	7,6
Arcturus,	10 3 54	20,0	2 1 25	12,3
Antarès,	11 6 10	21,9	0 1 12	3,8
La Lyre,	0 6 55	25,6	3 5 17	17,7
L'Aigle,	0 23 24	19,9	3 6 52	10,4

On trouve une Table pareille, pour 280 étoiles, dans les Éphémérides de Berlin, année 1776, et pour 483 étoiles, dans celles de Vienne, année 1773.

2881. Je dois avertir ici que la Caille, dans tous ses ouvrages, a appellé ascension droite *vraie*, déclinaison *vraie*, etc. celles qui auroient lieu s'il n'y avoit dans les étoiles ni aberration, ni nutation ; je les ai appellées *moyennes* pour éviter l'équivoque, et pour me rapprocher de l'usage, qui a fait nommer temps moyen, celui qui auroit lieu s'il n'y avoit point d'inégalité dans le Soleil (973).

2882. L'ABERRATION a lieu dans les planetes aussi bien que dans les étoiles fixes; mais elle est plus facile à calculer, quand on connoît leur mouvement géocentrique et leur distance à la Terre.

L'ABERRATION d'une planete est toujours égale au mouvement vu de la Terre, pendant le temps que la lumiere emploie à venir depuis la planete jusqu'à la Terre. Soit C le lieu de la planete (FIG. 233), que je suppose immobile pendant que la Terre va de A en B, en donnant à la Terre la somme de deux mouvemens ou leur différence; en sorte que le mouvement de la planete, vu de la Terre, qui est le résultat des deux mouvemens, soit égal à l'angle ACB pendant que la lumiere est parvenue de C en B; le mouvement est rétrograde dans ce cas-là. Suivant nos principes (2828), l'œil arrivant en B reçoit deux impressions, l'une suivant CB, l'autre suivant la ligne FB; ainsi il n'éprouvera qu'une impression composée, suivant la diagonale DB, et la planete lui paroîtra en D, au lieu de paroître en C; la différence est l'angle CBD égal à l'angle ACB, c'est-à-dire au mouvement de la planete vu de la Terre, mais à gauche, tandis que la planete va à droite. Ainsi l'aberration la fait paroître à l'endroit où elle étoit lorsque le rayon est parti de la planete. On verroit la même chose par le raisonnement de l'article 2828, en supposant l'étoile au point C. Il y a des formules et des méthodes particulieres de Clairaut, à ce sujet, dans les Mémoires de l'académie pour 1746; celles d'Euler sont dans les Mémoires de Pétersbourg pour 1739, *Tome XI*, et dans ceux de Berlin pour 1746, *Tome II;* celles de M. de Lambre dans le 8e volume de mes Éphémérides.

2883. EXEMPLE. La lumiere emploie 8′ 8″ à venir du Soleil jusqu'à nous (2835): le mouvement du Soleil pendant ces 8′ est de 20″, d'où il suit que le Soleil a 20″ d'aberration en longitude, en tout temps : on n'a pas besoin d'y avoir égard, quand il ne s'agit que de connoître le lieu du Soleil; mais il faut en tenir compte quand on calcule par les Tables la longitude d'une planete; car, comme on a le lieu vrai de la planete, il faut employer aussi le lieu vrai du Soleil. M. MASKELYNE, M. Slop, M. de Lambre en ont compris la nécessité. Il faut donc, pour calculer le lieu géocentrique d'une planete, ajouter 20″ au lieu tabulaire et apparent du Soleil, afin d'avoir son lieu vrai; l'erreur qui résulteroit de ces 20″ négligées, pourroit aller à 1′ 12″ pour Vénus, 37″ pour Mars, 33″ pour Mercure; elle seroit moindre pour les autres planetes, à raison de leur grande distance.

2884. L'aberration fait paroître la planete du côté où va la Terre, c'est-à-dire de A en B, et c'est le côté opposé à celui où la planete

paroît aller; il s'ensuit que si la longitude est croissante, l'aberration la diminue, et il faudra l'ôter de la longitude calculée, pour avoir la longitude apparente. Il en sera de même de la latitude, de l'ascension droite, de la déclin. d'une planete, pourvu qu'on prenne le mouvement géocentrique en latit., en asc. dr., en déclin. pendant le temps que la lumiere emploie à venir de la planete jusqu'à nous.

2885. Si l'on nomme *m* le mouvement diurne vu de la Terre, *d* la distance de la planete ou de la comete à la Terre, l'aberration sera $\frac{m.\ d.\ 8'}{24^h}$ ou $\frac{m.\ d.\ 20''}{59'\ 8''}$. En ajoutant le log. constant 9,5292 avec ceux du mouvement diurne géocentrique de la planete exprimé en minutes, et de sa distance à la Terre, en supposant celle du Soleil égale à l'unité, on aura le log. de l'aber. en secondes. Le log. constant est 7,75105 quand on emploie le mouvement calculé en secondes.

2886. Dans le passage de Mercure en 1782, l'aberration retardoit les phases de 6′ 34″, comme on le trouve en augmentant sa longitude de 18″8, et diminuant celle du Soleil de 20″. Cette quantité mérite d'être employée dans les calculs des observations pour les passages de Mercure, et sur-tout pour ceux de Vénus (2154); j'en ai averti dans la Table des observations, *Tome II, pag.* 132 et 134. J'ai dit qu'il falloit ajouter 29″ au lieu du Soleil pris dans les Tables, en conservant le temps de la conjonction apparente; mais si l'on veut avoir la conjonction vraie, il faut ôter 6′ du temps, et ajouter seulement 5″ au lieu du Soleil, on aura le lieu vrai de la conjonction vraie. Quand Mercure est en conjonction supérieure, les deux aberrations sont du même sens; mais elles peuvent différer de 39″½: ainsi cette considération est encore plus importante.

2887. On trouvera une Table générale d'aberration à la p. 200 du Recueil que j'ai cité, et elle sert pour les planetes et les cometes, mais elle exige le calcul de la dist. et du mouv., calcul qui est assez long.

Voici des Tables pour les six planetes, avec lesquelles on peut se passer de ce calcul; mais ces Tables supposent les orbites circulaires, excepté pour Mercure. Il y a des Tables plus étendues et plus exactes dans le 8e vol. de mes Éphémérides; elles sont de M. de Lambre; il les a calculées sous deux formes différentes; elles sont exactes et commodes pour la pratique, et ce sont celles de la page cj dont je me sers dans mes calculs les plus rigoureux. On observe, dans les Tables suivantes, que la somme ou la différence du premier et du dernier nombre est toujours de 40″; M. de Lambre en a donné la raison dans les Éphémérides, *pag.* xlviij. L'aberration de la Lune n'étant pas de 1″, on n'en a pas tenu compte dans ces Tables.

Aberration des six Planetes principales, pour convertir la longitude moyenne en apparente.

Élongat. ou distance au Soleil.			Mars.	Jupiter.	Saturne.	Herschel.	Élongat.	Vénus.
Sig.		*D.*	*S.*	*S.*	*S.*	*S.*	*D.*	*S.*
O conjonc.		0	— 36	— 29	— 26	— 25	conj. supér.	— 43½
		15	— 35	— 28	— 26	— 24	15	— 41
I	XI	0	— 32	— 26	— 24	— 22	30	— 34
		15	— 28	— 23	— 21	— 19	45	— 19
II	X	0	— 23	— 19	— 16	— 15	la plus gr.	
		15	— 18	— 14	— 12	— 10	digression.	— 14
III	IX	0	— 12	— 9	— 6	— 5	45	— 9
		15	— 7	— 4	— 1	— 0	30	0
IV	VIII	0	— 3	+ 1	+ 4	+ 5	15	+ 3
		15	0	+ 5	+ 8	+ 9	conj. inlér.	+ 3½
V	VII	0	+ 2	+ 9	+ 11	+ 13		
		15	+ 3	+ 10	+ 12	+ 15		
VI oppos.		0	+ 4	+ 11	+ 13	+ 15		

Élongation.	Mercure.		
	Aphélie.	Dist. moy.	Perihélie.
Deg.	*Sec.*	*Sec.*	*Sec.*
conjonction supérieure.	— 46	— 51½	— 59½
5	— 45	— 51	58
10	— 44	— 48	52
15	— 41	— 43	41
20	— 36	— 33	
25	— 29		
la plus gr. digres.	— 18	— 18	— 19
25	— 7		
20	— 1	— 4	
15	+ 2	+ 4	+ 2
10	+ 4	+ 8	+ 13
5	+ 6	+ 11	+ 18
conjonction inférieure.	+ 6	+ 11½	+ 19½

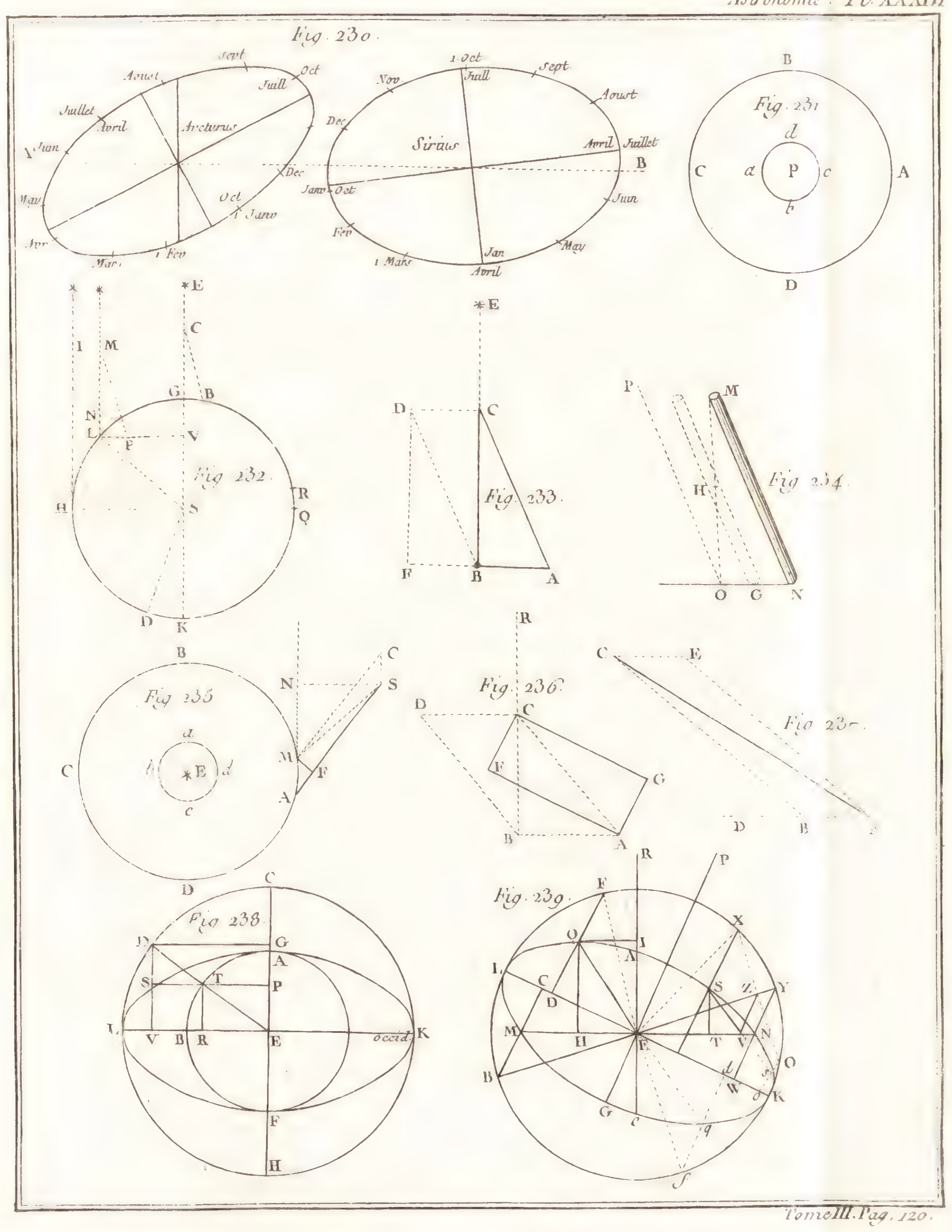
De la Nutation.

2888. La nutation ou *déviation* est un mouvement apparent de 9″ observé dans les étoiles; sa période est de 18 ans; il est causé par l'attraction de la Lune sur le sphéroïde de la Terre. La précession des équinoxes, qui est de 50″ par an, est produite par l'action du Soleil et de la Lune sur la partie de la Terre que l'on conçoit relevée vers l'équateur du sphéroïde (3692). De ces 50″ il y en a au moins 36 qui sont produites par l'action seule de la Lune; or, la Lune ne peut pas produire ces 36″ de précession d'une maniere uniforme, puisque ses nœuds changent continuellement de place, et que son inclinaison par rapport à l'équateur, d'où son effet dépend, varie de dix degrés; il en doit résulter non seulement une inégalité dans la précession annuelle des équinoxes à différentes années, mais aussi un balancement ou une nutation dans l'axe de la Terre (3735). Par l'effet de cette nutation les étoiles doivent paroître se rapprocher et s'éloigner de l'équateur, puisque l'équateur répond à différentes étoiles.

2889. Nous voyons que Flamsteed avoit espéré, vers l'an 1690, au moyen des étoiles voisines du zénit, de déterminer la quantité de cette nutation qui devoit suivre de la théorie de Newton; mais il abandonna ce projet, parceque, dit-il, si cet effet existe, il doit être insensible, jusqu'à ce qu'on ait des instrumens bien plus longs que 7 pieds, plus solides et mieux fixés que les miens. (*Hist. cél. Tom. III*, *pag.* 113).

On voit dans les manuscrits de Romer, cités par Horrebow, qu'il soupçonnoit déja une nutation dans l'axe de la Terre, et espéroit d'en donner la théorie : *Sed de altitudinibus non perinde certus reddebar, tam ob refractionum varietatem quàm ob aliam nondum liquidò perspectam causam; scilicet per hos duos annos, quemadmodum et aliàs, expertus sum esse quandam in declinationibus varietatem, quae nec refractionibus nec parallaxibus tribui potest, sine dubio ad vacillationem aliquam poli terrestris referendam, cujus me verisimilem dare posse theoriam, observationibus munitam, spero.* (*Basis astronomiae* 1735, *pag.* 66).

Ces idées de nutation devoient se présenter naturellement à tous ceux qui avoient apperçu dans les étoiles des changemens de déclinaisons, et nous avons vu que les premiers soupçons de Bradley, en 1727, furent qu'il y avoit quelque nutation de l'axe de la Terre


Fig. 230.
Sept
Oct
Aoust
Juill
Juillet
Avril
Arcturus
Juin
May
Avr
Mars
1 Fev
Oct
1 Janv
Dec
1 Oct
Juill
Sept
Nov
Aoust
Dec
Sirius
Avril
Juillet
B
Janv
Oct
Juin
Fev
1 Mars
Jan
Avril
May
Fig. 231
B
d
C
a
P
c
A
b
D
E
C
I
M
G
B
N
L
V
P
Fig. 232.
R
H
S
Q
D
K
E
D
C
Fig. 233.
F
B
A
P
M
H
Fig. 234.
O
G
N
R
B
C
N
S
Fig. 235
Fig. 236.
D
C
C
E
d
E
M
F
A
c
D
F
G
B
A
D
B
C
Fig. 238
D
G
A
S
T
P
L
V
B
R
E
occid.
K
F
H
R
P
Fig. 239.
F
X
O
I
A
L
C
D
S
Z
Y
M
H
E
T
V
N
O
B
G
c
q
W
K
f

Terre qui faisoit paroître l'étoile γ du Dragon plus ou moins près du pole (2820) : mais la suite des observations l'obligea de chercher une autre cause pour les variations annuelles; et ce ne fut qu'au bout de quelques années qu'il reconnut la nutation ou le second mouvement dont il s'agit actuellement.

2890. Pour bien expliquer la découverte de la nutation, il faut remonter au temps où Bradley observoit les étoiles pour découvrir l'aberration ; il vit, en 1728, que le changement annuel de déclinaison dans les étoiles voisines du colure des équinoxes étoit plus grand qu'il ne devoit résulter de la précession des équinoxes supposée de 50″, et calculée à la maniere ordinaire (2732); l'étoile η de la grande Ourse se trouva, au mois de septembre 1728, 20″ plus au sud que l'année précédente, quoiqu'il ne dût y avoir que 18″ : il en résultoit que la précession des équinoxes avoit dû être de 55″ ½ au lieu de 50″, sans que cette différence pût être attribuée à l'instrument, parceque les étoiles voisines du colure des solstices ne donnoient point la même différence. (*Philos. Trans.* 1728, *n°*. 406.

2891. En général les étoiles situées vers le colure des équinoxes avoient changé de déclinaison d'environ 2″ plus qu'elles n'auroient fait par la précession moyenne des équinoxes, qui est très bien connue, et les étoiles voisines du colure des solstices moins qu'elles n'auroient dû faire; mais, ajoute Bradley, « soit « que ces petites variations viennent d'une cause réguliere, ou « qu'elles soient occasionnées par quelque changement dans le « secteur, je ne suis pas encore en état de les déterminer ». Bradley n'en fut que plus ardent à continuer ses observations, pour déterminer la période et la loi de ces variations; il demeura presque toujours à Wansted jusqu'en 1732, qu'il fut obligé d'aller à Oxford, pour remplacer Halley; il continua d'observer avec la même exactitude toutes les circonstances des changemens de déclinaison sur un grand nombre d'étoiles. Chaque année il voyoit les périodes de l'aberration se rétablir suivant les regles que l'on a vues ci-dessus (2855) : mais d'une année à l'autre il y avoit d'autres différences; les étoiles situées entre l'équinoxe du printemps et le solstice d'hiver se trouvoient être plus près du pole boréal, et les étoiles opposées s'en étoient éloignées; il commença de soupçonner que l'action de la Lune sur l'équateur, c'est-à-dire sur la partie la plus relevée de la Terre, pouvoit causer une variation ou un balancement dans l'axe de la Terre. Son secteur étant demeuré fixe à Wansted, il continua d'y venir observer sou-

vent; en 1736, à la fin d'une demi-révolution des nœuds, il reconnut la nutation, et dès lors il en instruisit les astronomes qui alloient en Laponie (*Mém. de l'acad.* 1745, *pag.* 513, 519; *Inst. astr.* 1746, *pag.* xlvij). Enfin, en 1747, il se trouva en état de prononcer sur la cause et les circonstances de ce phénomene. Nous allons rendre compte de cette nouvelle découverte, d'après la lettre que Bradley lui-même fit imprimer en 1747, et d'après ses Mémoires. (*Phil. Trans. janv.* 1748, *n°* 485.)

2892. En 1727, le nœud ascendant de la Lune concouroit avec l'équinoxe du printemps, de sorte que la Lune s'écartoit de l'équateur dans ses plus grandes latitudes de $28°\frac{1}{2}$; en 1736, le nœud ascendant s'étant trouvé dans l'équinoxe de la Balance, la Lune ne pouvoit plus s'écarter de l'équateur que de $18°\frac{1}{2}$, de sorte que son orbite étoit plus éloignée de l'équateur de 10° en 1727, qu'en 1736 : or, c'est en s'écartant de l'équateur que l'attraction oblique et latérale devient plus sensible.

Bradley observa, en 1727, par le changement de déclinaison des étoiles voisines du colure des équinoxes, que la précession des équinoxes étoit plus grande que la moyenne (2890), et cependant les étoiles situées proche le colure des solstices paroissoient se mouvoir d'une maniere contraire aux effets de cette augmentation; les étoiles opposées en ascension droite étoient affectées de la même maniere; γ du Dragon, et la 35[e] étoile de la Giraffe (2820) avoient éprouvé le même changement en déclinaison, l'une vers le nord, l'autre vers le sud : cela s'accordoit très bien avec une nutation de l'axe de la Terre qui doit évidemment produire la même différence sur les étoiles opposées en ascension droite.

2893. En 1732, le nœud de la Lune avoit rétrogradé jusqu'au solstice d'hiver; alors les étoiles situées proche le colure des équinoxes parurent changer leur déclinaison suivant la précession de 50″. Dans les années suivantes, ce changement diminua jusqu'en 1736, que le nœud parvint à l'équinoxe de la Balance.

Les étoiles situées vers le colure des solstices changerent leur déclinaison, depuis 1727 jusqu'en 1736, de 18″ moins que n'exigeoit la précession; de sorte que le pole du monde ou l'axe de la Terre avoit éprouvé une nutation de 18″ pendant une demi-révolution des nœuds de la Lune, ce qui devoit changer d'autant l'obliquité de l'écliptique. En 1745, au bout de 18 ans, les nœuds étant revenus à leur premiere situation, les étoiles reparurent toutes aux mêmes points, sauf la précession; on vit les mêmes phé-

nomenes qu'en 1727, et Bradley ne douta plus que la nutation de l'axe terrestre n'en fût la véritable cause.

Machin, secrétaire de la société royale, à qui il envoya ses conjectures, vit bientôt qu'il suffisoit, pour expliquer et la nutation et le changement de la précession, de supposer que le pole de la Terre décrivoit un petit cercle : on a vu de semblables hypotheses (357, 1443, 1493, 2727), et Copernic avoit même supposé ce mouvement du pole dans un cercle, pour expliquer le changement qu'il croyoit avoir lieu dans la précession des équinoxes en même temps que dans l'obliquité de l'écliptique. (*Riccioli II*, 171.) Bradley donna 18″ au diametre du cercle, et supposa qu'il étoit décrit par le pole dans l'espace d'une révolution des nœuds de la Lune par un mouvement rétrograde, comme dans l'article 1353. L'on expliquoit par là et le changement de la précession, que les étoiles voisines du colure des équinoxes avoient indiqué, et la nutation de l'axe de la Terre indiquée par les étoiles voisines du colure des solstices.

2894. Pour montrer l'accord de sa théorie avec l'observation, Bradley rapporte un grand nombre d'observations faites depuis 1727 jusqu'en 1747, sur γ et β du Dragon, α de Cassiopée, τ de Persée, α de Persée, η de la grande Ourse, et la 35e de la Giraffe, qui sont à l'égard des colures dans des positions très différentes. Après les réductions nécessaires pour rapporter toutes les observations à une même époque, par les principes de l'aberration et de la nutation, il trouve toujours à 2 ou 3″ près le même résultat, tandis qu'on eût trouvé jusqu'à 56″ ½ d'inégalité pour γ du Dragon, si l'on n'avoit pas employé les nouvelles théories. De plus de 300 observations qu'il avoit faites de celle-ci, il ne s'en est trouvé que onze qui différassent de la moyenne de 2″.

2895. Les observations faites sur les étoiles un peu plus éloignées du zénit s'accordent un peu moins entre elles, et il y a apparence que cela vient de l'inconstance des réfractions; mais Bradley ne se servoit de ces étoiles qu'au défaut de celles qui étoient plus proche du zénit; l'expérience lui avoit appris depuis long-temps que celles-ci s'accordoient toujours mieux.

Par les observations de 1740 et de 1741, l'étoile η de la grande Ourse parut de 3″ plus éloignée du pole qu'elle ne devoit être suivant les observations des autres années; Bradley crut que cette différence venoit de quelque cause particuliere; nous verrons bientôt une de ces causes, qui venoit du défaut de l'hypothese circulaire (2908); il soupçonna aussi que la situation de l'apogée de

la Lune pourroit influer sur la nutation ; il invita les géometres à discuter tous ces effets de l'attraction, et les astronomes à continuer d'observer les positions des plus petites étoiles, et celles des plus brillantes, pour découvrir les dérangemens physiques qu'elles peuvent éprouver, et que l'on observe dans quelques unes (2772).

2896. Voici donc l'hypothese que Bradley adopta pour expliquer les observations. Soit E le pole de l'écliptique (FIG. 243, *n*°. 1), P le pole de l'équateur qui en est éloigné de $23°\frac{1}{2}$, et autour du point P un petit cercle dont le rayon PB soit de 9″. Au lieu du point P qui est le lieu moyen du pole, on suppose que le vrai pole soit en A lorsque le nœud ascendant est dans l'équinoxe du printemps sur le colure des équinoxes P ♈, et qu'il continue de se mouvoir de A en B de la même maniere que le nœud ; en sorte que quand le pole est en O, l'arc AO soit égal à la longitude du nœud de la Lune ou à ce qui lui manque pour faire 360° : le lieu du vrai pole sera toujours plus avancé de 3 signes en ascension droite dans le cercle ABC, que le lieu du nœud de la Lune dans l'écliptique, et le pole sera en D lorsque le nœud sera en ♋. Puisque le pole rétrograde de A en B, il doit se rapprocher des étoiles qui sont dans le colure PB ♈ des équinoxes ; de sorte que la précession paroîtra plus grande, en occasionnant dans les étoiles qui sont sur le colure des équinoxes un changement de déclinaison plus grand de 9″ qu'il ne devoit être, et cela dans l'espace de 4 ans et 8 mois que le nœud emploiera à venir du Belier au Capricorne, et le pole à venir de A en B ; en même temps le pole paroîtra s'être approché des étoiles qui sont vers le solstice d'hiver ou du côté de E ; telles sont en effet les circonstances que Bradley avoit observées (2893).

2897. Le premier effet général de la nutation, celui qui est le plus facile à appercevoir, est le changement de l'obliquité de l'écliptique : cet angle augmente de 9″ quand le nœud est dans le Belier ; alors le pole est en A, la distance des poles EA devient plus grande de 9″ que quand le nœud est dans le Capricorne ou le Cancer, et elle est plus grande de 18″ que quand le nœud est dans la Balance, et le pole en C. L'obliquité de l'écliptique étoit, en 1774, de 23° 27′ 57″, en 1784, 2° 28′ 10″ ; non seulement elle n'a pas diminué de 5″ comme elle auroit dû faire (2766), mais elle a augmenté de 13″, ce qui fait 18″ de plus pour le seul effet de la nutation, qui est égal à AC ; et cet effet est très sensible sur la méridienne de S. Sulpice (2286).

Quand le pole de la Terre est en O, l'obliquité de l'écliptique est EO ou EH, et la nutation se trouve égale à PH ; l'arc AO ou l'angle APO est égal à la longitude du nœud, et PH en est le cosinus : or PH = 9″ sin. OD (3801) ou 9″ cos. AO ; donc la nutation PH = + 9″ cos. nœud, ou 9″ multipliées par le cosinus de la longitude du nœud de la Lune. C'est le changement que Bradley avoit remarqué par la variation en déclinaison que les étoiles situées près du colure des solstices avoient eue pendant les 19 ans. Cette nutation doit se retrancher de l'obliquité moyenne ou uniforme, tant que le nœud de la Lune est entre 3 et 9 signes ; elle s'ajoute dans le premier et le quatrieme quart de la longitude du nœud. Par le moyen de cette équation et de la diminution séculaire (2748), on a fait une table de l'obliquité apparente pour les différentes années, Tables du Soleil, *p.* 115 *et suiv.*, et l'on trouvera, Table XIII, la quantité de cette équation que l'on prend avec l'argument VI ou le supplément du nœud exprimé en milliemes du cercle.

2898. La nutation change également les longitudes, les ascensions droites et les déclinaisons des astres ; il n'y a que les latitudes qu'elle n'affecte point, puisque l'écliptique est immobile dans la théorie de la nutation. Nous allons expliquer le calcul de toutes ces variations.

2899. LA NUTATION EN LONGITUDE vient du déplacement des colures : quand le pole du monde est en O, le colure des solstices est sur le cercle EO, puisqu'il n'y a que la situation des deux poles E et O qui le détermine. Mais le colure des solstices ne peut se déplacer sans que le cercle de latitude EM, qui du pole de l'écliptique va au point équinoxial, ne prenne la position EL pour être toujours perpendiculaire au colure EO. D'ailleurs on peut compter les longitudes aussi bien du solstice que de l'équinoxe, en les diminuant de 3 signes ; ainsi ce que nous disons des longitudes des astres rapportées au colure des solstices, a lieu également par rapport au cercle EM qui va vers l'équinoxe et d'où l'on a coutume de compter les longitudes. Une étoile S dont la longitude moyenne comptée du solstice étoit égale à l'angle PES lorsque le colure étoit sur EPA, aura pour longitude actuelle et apparente l'angle OES, qui differe du premier de la quantité AEO ou MEL. Cet angle est donc le déplacement du point équinoxial, ou la quantité dont la nutation diminue les longitudes, tant que le pole est dans le demi-cercle AODC, ou le nœud dans les six premiers signes de longitude, comme dans la FIG. 243.

La valeur de l'angle HEO est HO divisée par le sinus de HE ou de l'obliquité de l'écliptique : appellant N la longitude du nœud, on a NO égale à OP sin. AO, ou 9″ sin. N; donc (3879) la nutation en longitude est égale à $\frac{9'' \text{ sin. N}}{\text{sin. } 23^\circ}$, ou 22″ sin. N. V. y. 2910.

La nutation affecte les points équinoxiaux d'où se comptent les longitudes ; ainsi elle doit être employée dans les calculs de toutes les planetes, dans les cas où l'on veut avoir les longitudes apparentes : M. le Monnier et M. de la Caille en comprirent la nécessité dès le temps où Bradley découvrit la nutation. On en trouvera une table parmi celles du Soleil, Table XI, disposée sur le supplément de la longitude du nœud, afin que l'argument aille toujours en croissant, et calculée dans l'ellipse dont nous parlerons bientôt (2908) : voilà pourquoi elle n'est que de 16″ 8; Mayer la faisoit de 18″, parcequ'il supposoit la nutation de 9″ 6.

Au reste il est plus commode et plus simple de n'employer cette équation des points équinoxiaux ni pour le Soleil, ni pour les planetes; mais il faut en avertir expressément, car l'usage est de calculer les lieux apparens des planetes pour les comparer à ceux que l'on observe. Nous en avons parlé dans l'explication des Tables, page 10.

2900. LA NUTATION EN DÉCLINAISON est la différence entre la distance d'un astre S au pole moyen P, et sa distance au pole vrai O : car l'équateur étant toujours à 90° du pole, une étoile qui est entre deux, ne peut être plus près du pole sans être plus loin de l'équateur.

On abaissera la perpendiculaire OK sur le cercle de déclinaison PS qui passe par l'étoile; alors PK sera la quantité dont les points K et O sont plus près de l'étoile S, et la distance au pole plus petite, par l'effet de la nutation; ainsi PK est la nutation en déclinaison.

La valeur de PK est PO cosin. OPK, ou OF. Cet arc est la différence entre l'arc BFAO égal à la longitude du nœud augmentée de 3 signes, et l'arc BF ou l'angle ♈PS qui est l'ascension droite de l'étoile; cette différence est le complément de l'ascension droite A dont on a retranché la longitude N du nœud ; car OF ou BO — BF = 90° + N — A = 90° — (A — N). Ainsi PK = 9″ sin. (A — N) ; c'est-à-dire que la nutation en déclinaison est égale à 9″ multipliées par le sinus de l'ascension droite de l'étoile moins le lieu du nœud. Elle s'ajoute aux déclinaisons boréales moyennes, pour les étoiles boréales, dans les six premiers signes de l'argument A — N.

2901. L'angle de position S, formé par le cercle de latitude ES et le cercle de déclinaison PS, change de la quantité PSO $= \frac{OK}{\text{sin. PS}}$ (3879). Mais OK $= 9''$ sin. OF, ou $9''$ cos. (A—N), PS est le complément de la déclinaison D; donc l'angle PSO $= \frac{9'' \text{cos.} (A - N)}{\text{cos. D}}$.

2902. La nutation en ascension droite exige deux considérations, et renferme deux parties; nous allons les expliquer, en considérant la position que prend l'équateur par le mouvement du pole expliqué ci-dessus. Soit MLS (fig. 243, n°. 2) l'écliptique immobile, MRZ l'équateur, M le point équinoxial, S le point solstitial, SZ l'obliquité de l'écliptique, E une étoile dont l'ascension droite est MT, et la déclinaison ET, LNI la position de l'équateur déplacé par le mouvement du pole, en sorte que le point équinoxial soit en L, et le point solstitial en I; le nœud étant supposé dans les trois premiers signes, la nutation en longitude ML est soustractive de toutes les longitudes, et égale à $\frac{9'' \text{sin. N}}{\text{sin. } 23^\circ}$, et l'obliquité de l'écliptique, augmentée d'une quantité ZI, $= 9''$ cos. N (2897).

Ayant abaissé la perpendiculaire LR, on voit que MR est la quantité dont l'équinoxe L s'est rapproché du cercle de déclinaison ET de l'étoile, et l'ascension droite est diminuée d'autant; or, MR $=$ ML cos. M $=$ ML cos. $23^\circ = \frac{9'' \text{sin. N. cos. } 23^\circ}{\text{sin. } 23^\circ} = 9''$ cot. 23° sin. N. Cette premiere partie de la nutation en ascension droite est commune à tous les astres, puisqu'elle affecte le lieu même d'où se comptent toutes les ascensions droites, c'est-à-dire le point équinoxial. La table de la nutation en longitude peut servir pour les ascensions droites, en multipliant les nombres de la table par 0,917, ou les diminuant d'un douzieme; nous l'avons donnée séparément Table XII, pour servir dans le calcul de l'équation du temps.

2903. Mais indépendamment de ce changement du point équinoxial, il faut encore avoir égard à l'inclinaison de l'équateur LVX, qui fait que l'étoile E répond perpendiculairement en un point V du nouvel équateur, au lieu de répondre en T; et la différence est sensiblement égale à VX, quantité dont l'ascension droite est encore diminuée, mais plus ou moins, suivant que l'étoile sera plus ou moins près du point N, où l'inclinaison est la plus sensible; car, à 90° de là, le nouvel équateur est parallele à l'équateur primitif; et cette différence VX seroit nulle.

Pour trouver la valeur de VX, ou E sin. EV, on pourroit se servir

de la méthode employée (2723); mais il sera plus facile d'employer le changement de l'angle de position, qui est $\frac{9'' \cos. (A-N)}{\cos. D.}$ (2901); c'est la valeur de l'angle E: il faut donc le multiplier par sin. EV, ou sin. D, et l'on aura 9″ cos. (A—N); c'est la seconde partie de la nutation en ascens. dr., soustractive pour une étoile boréale dans les trois premiers signes de l'argument (A—N). Nous en avons donné une petite table pour le Soleil (au bas de la table xxj, pag. 35).

2904. L'angle XNT de l'équateur moyen et de l'équateur mobile est toujours de 9″, puisque les deux poles sont toujours éloignés de 9″. Le point d'intersection N de l'équateur moyen et de l'équateur mobile a toujours une ascension droite égale à la longitude du nœud de la Lune, car on a vu (1352) que quand le pole d'un cercle tourne autour du pole d'un autre, l'intersection est toujours à 90° du lieu du pole ou du colure des deux cercles; or, dans la nutation le pole est à 3 signes du nœud, donc l'intersection N des deux cercles est aussi éloignée que le nœud.

D'ailleurs la nutation de l'obliquité de l'écliptique est 9″ cos. long. N : or IZ=ZNI sin. NZ; donc NZ est le complément de la longitude du nœud.

On voit aussi dans cette figure que la nutation en déclinaison TX, ou XNT sin. NX, est égale à 9″ multipliées par le sinus de la différence entre la longitude du nœud et l'ascension droite de l'étoile, comme dans l'art. 2900.

2905. La nutation en asc. dr. peut se démontrer égalemnet par le petit cercle de Bradley (FIG. 243). Soit S une étoile dont l'ascension droite moyenne est SPE, comptée du colure des solstices PE, et l'ascension droite apparente SOE; celle-ci est composée de deux portions, toutes deux variables, parcequ'elle est formée par deux cercles qui changent l'un et l'autre de position. Nous rapporterons chacun de ces cercles à des cercles fixes: nous chercherons les deux variations séparément; leur somme ou leur différence donnera la différence entre l'angle SOE et l'angle SPE. Les deux portions variables sont l'angle POE et l'angle POS; la premiere partie POE ou GOE, qui vient du changement du colure EO, ne dépend que de la situation du nœud ou de celle du pole O; parceque le point E est fixe, et la seconde SOG dépend de la situation de l'étoile S, c'est-à-dire de l'angle SPG ou SPO, qui est la différence entre l'ascension droite de l'étoile et le lieu du pole O. En considérant le cercle de latitude EGS, on aura un triangle sphérique EPG qui se change en EOG, le côté EG et l'angle G

étan

étant les mêmes, le reste variable : alors on trouve que la petite variation PO du côté adjacent à l'angle constant G, est à la petite variation de l'angle EPG opposé au côté constant EG, comme la tangente du côté EP opposé à l'angle constant est au sinus de l'angle EPG (4001); ainsi l'on dira, tang. 23° $\frac{1}{2}$: sin. EPO ou sin. long. du nœud : : 9″ : x; ce sera la différence entre l'angle GOE et l'angle GPE qui est formé au pole moyen. Tel est le changement que la nutation PO a produit sur l'angle GPE, ou la premiere partie de la nutation (2902).

2906. Le changement que la nutation produit sur l'autre partie de l'ascension droite SPE, c'est-à-dire, sur l'angle SPG, qui devient SOG par l'effet de la nutation, est une petite variation qui se calculera par la même analogie, au moyen du triangle SOG, dont l'angle G est constant, aussi bien que le côté SG, tandis que GP se change en GO; l'on dira donc (4001), tang. SP : sin. SPG : : 9″ : ☊SPG, c'est-à-dire, la tangente du complément de la déclinaison est au cosinus de la distance entre l'étoile et le lieu du nœud (2905), comme 9″ sont à la quantité dont l'angle SPG doit varier pour devenir l'angle SOG : c'est la variation du second angle SPG, lequel, avec le précédent, forme l'ascension droite moyenne SPE, comptée du colure des solstices; cette variation est donc la seconde partie de la nutation en ascension droite (2903).

2907. Cette partie affecte les retours du Soleil au méridien, et l'on est obligé d'en tenir compte dans le calcul de l'équation du temps (970). La premiere partie de la nutation n'y entre point, parceque celle-ci ne change que le lieu de l'équinoxe; elle ne change pas le point de l'équateur auquel un astre répond, et par conséquent ne change rien à la durée de ses retours au méridien; c'est la seconde partie de la nutation qui seule affecte ces retours, en faisant que l'astre réponde à un point physique de l'équateur tel que V, *fig.* 243, n°. 2, différent du point T, auquel il répondoit, de la quantité VX : c'est pour cela que j'ai mis cette partie de la nutation à la pag. 35 des tables de cet ouvrage.

2908. Il y a aussi une inégalité annuelle dans la précession, qui est — 1″3 sin. 2 long. du Soleil (3726); ainsi il faut ajouter 1″3 aux longitudes des étoiles calculées par la précession uniforme de 50″$\frac{1}{4}$, si c'est au commencement de février et d'août, et les ôter au commencement de mai et de novembre. C'est à-peu-près la même chose pour les ascensions droites : cela mérite d'être employé dans les observations délicates.

2909. Tous les calculs de nutation que nous venons d'expliquer

supposent, comme dans l'hypothese de Bradley, que le pole décrit un cercle; cependant il avoit remarqué lui-même que quelques observations différoient un peu de sa théorie, et que les observations de α de Cassiopée et de η de la grande Ourse se trouvoient un peu plus d'accord, en supposant, au lieu du petit cercle décrit par le pole, une ellipse qui n'eût que 16″ de diametre de D en B dans le sens du colure des équinoxes, et qui en eût 18 dans le sens du colure des solstices; mais comme cela n'étoit pas suffisant pour faire disparoître entièrement les inégalités, Bradley renvoyoit à la théorie la détermination de cet élément.

En effet d'Alembert, dans ses *Recherches sur la précession des équinoxes,* fit voir que le pole devoit décrire une ellipse encore plus étroite; le petit axe doit être au grand comme le cosinus de $23°\frac{1}{2}$ est au cosinus du double (3740), ou comme 6″7 est à 9; et telle est l'hypothese qu'on a coutume d'employer pour les calculs de la nutation.

Soit E (FIG. 242) le pole de l'écliptique, P le lieu moyen du pole de l'équateur, M le lieu vrai du pole dans l'ellipse RQV, O son lieu dans le cercle; on démontre que le lieu M dans l'ellipse est sur la perpendiculaire NMO; alors NO est à NM dans le même rapport que les axes, ou comme 9″ à 6″7, comme la tangente de NPO ou de la longitude du nœud est à la tangente de NPM; ainsi il faudroit employer dans les formules précédentes la longitude du nœud corrigée de la quantité MPO. Il faudroit aussi substituer la distance PM à la distance PO, en disant: la sécante de l'angle NPO est à la sécante de NPM comme PO est à PM; ou, ce qui est plus commode, cos. NPM : cos. NPO :: PO : PM; car les sécantes sont en raison inverse des cosinus. Ainsi le lieu vrai du pole en M est déterminé par l'angle RPM, qu'il faut employer à la place de l'angle RPO, et par la longueur PM, qui doit servir de base aux calculs des équations précédentes dans lesquels nous avions employé PO = 9″. J'avois calculé en effet des tables de la valeur de PM et de la correction NPO, et M. Maskelyne en a donné d'autres; mais M. Lambert ayant publié des tables d'une forme plus commode, je vais les démontrer.

2910. La nutation en longitude dans l'hypothese circulaire a été trouvée $\frac{-9'' \text{ sin. N}}{\text{sin. } 23°}$ (2898); mais PQ, qui est la mesure exacte de l'angle E, n'est que de 6″7, et NM est plus petite que NO dans la même proportion; ainsi la nutation en longitude sera $\frac{6''7 \text{ sin. N}}{\text{sin. obliq.}}$; elle n'exige aucune correction pour le nœud.

2911. Pour calculer la nutation en ascension droite, décomposons

le changement PM du pole (FIG. 242) en deux parties PN et NM, pour les calculer séparément, ce qui reviendra absolument au même; l'une est 9'' cos. N (2897), l'autre est 6''7 sin. N, en sorte que l'angle NEM $= \frac{6''7 \text{ sin. N}}{\text{sin. } 23^\circ}$. Si l'étoile est en S, l'angle EPS deviendra l'angle EMS, et il faut avoir la différence, qui sera la nutation en ascension droite.

Dans le triangle EPS, où ES et E sont constans, le changement du côté EP, c'est-à-dire PN seul, donne celui de l'angle EPS (4001) $= \frac{\text{PN sin. P}}{\text{tang. SP}} =$ PN sin. P cot. SP, et le changement de SP $=$ PN cos. P (3998). Si l'on prend ensuite comme constant le côté EN du triangle ENS avec le côté ES, en supposant que le pole ait avancé de N en M, le changement de l'angle E, qui est $\frac{\text{NM}}{\text{sin. EP}}$, donnera la variation de l'angle N, qui revient au même que celui de l'angle P, $\frac{\text{MN}}{\text{sin. EP}}$(cos. EP — sin. EP cos. P cot. SP) (4017). L'on aura aussi, pour la variation de SN ou de SP, la valeur $\frac{\text{MN}}{\text{sin. EP}}$ sin. EP sin. P (4018). Si l'on prend la somme des deux variations de l'angle P, l'on aura la nutation entiere en ascension droite $=$ PN sin. P cot. SP $+ \frac{\text{NM}}{\text{sin. EP}}$ (cos. EP — sin. EP cos. P cot. SP). La partie $\frac{\text{NM cos. EP}}{\text{sin. EP}}$ est $\frac{6''7 \text{ sin. N cos. obliq.}}{\text{sin. obliq.}}$ $= -$ 15''4 sin. N; c'est la premiere partie de la nutation en ascension droite.

Les deux autres termes font (9'' cos. N cos. A $+$ 6''7 sin. N sin. A) tang. déclin.; et développant les produits de sinus et de cosinus (3814, 3815), on trouvera 4''5 cos. (A$+$N) $+$ 4''5 cos. (A—N) — 3''3 cos. (A$+$N) $+$ 3''3 cos. (A—N) $= -$ 7''8 cos. (A—N) — 1''2 cos. (A$+$N), le tout multiplié par la tangente de la déclinaison. Nous avons mis le signe négatif, parceque, dans le premier quart de la longitude du nœud, le pole O (FIG. 243) est placé de maniere à diminuer les ascensions droites des étoiles qui sont dans le premier quart d'ascension droite, soit à raison de OH, soit à raison de PH.

2912. On prendra de même la somme des deux variations du côté PS (FIG. 242), et l'on aura pour la nutation en déclinaison PN cos. P $+$ MN sin. P $=$ 9'' cos. N sin. A $+$ 6''7 sin. N cos. A $=$ 4''5 sin. (A$+$N) — 4''5 sin. (A—N) $+$ 3''3 sin. (A$+$N) — 3''3 sin. (A—N) $=$ 7''8 sin. (A—N) $+$ 1''2 sin. (A$+$N). Les signes changent quand la declinaison est australe (M. Cagnoli, *pag.* 398).

C'est sur ce principe que sont faites les tables de Lambert, qui sont dans le Recueil de Berlin et dans la Connoissance des Temps de 1788; elles contiennent pour chaque degré, ce qui provient de la demi-somme et de la demi-différence de 9″ et de 6″7, par le moyen desquelles on trouve facilement la nutation.

2913. Exemple. Le 19 février 1780, la longitude moyenne du nœud de la Lune étant de $1^s\ 27^\circ\ 56'$, on demande la nutation d'Aldebaran, dont l'ascension droite étoit de $65^\circ\ 49'\ 50''$, et la déclinaison de $16^\circ\ 3'$. La différence entre l'ascension droite et le nœud est $8^\circ\ 24'$; leur somme $4^s\ 3^\circ\ 16'$, dont le supplément est $56^\circ\ 44'$. Pour l'ascension droite, au logarithme constant de 6″7 cot. $23^d\ \frac{1}{2}$, qui est 1,18846, j'ajoute celui du sinus de $57^\circ\ 56'$, et j'ai celui de 13″01, premiere partie de la nutation en ascension droite, qui est négative parceque le nœud est dans les six premiers signes.

Au log. de 7″85, qui est la demi-somme de 9″ et 6″7, j'ajoute celui du cosinus de $8^\circ\ 24'$, et celui de la tangente de la déclinaison, j'ai le log. de 2″23, premier membre de la seconde partie, négatif parceque l'ascension droite moins le nœud est moindre que 3 signes.

Au log. de 1″15, demi-différence de 9″ et de 6″7, j'ajoute le log. cos. $56^\circ\ 44'$, et celui de la tang. de la déclin.; j'ai celui de 0″18, second membre, positif parceque la somme de l'ascension droite et du nœud est dans le second quart. Rassemblant ces 3 nombres — 13″01, — 2″23, + 0″18, on a — 15″06, nutation totale en ascension droite dans l'ellipse.

Pour la déclinaison, au log. de 7″85, j'ajoute celui du sinus de $8^\circ\ 24'$, et j'ai celui de 1″15, premiere partie de la nutation en déclin. avec le signe +, parceque l'argument est moindre que 6 signes, et que l'étoile est boréale.

Au log. de 1″15, j'ajoute celui du sinus de $56^\circ\ 44'$, j'ai le log. de 0″96, seconde partie de la nutation en déclinaison, qui est positive parceque la somme $4^s\ 3^\circ$ est dans les six premiers signes, et que l'étoile est boréale.

La somme de ces deux parties est + 2″11, nutation totale en déclinaison d'Aldebaran dans l'ellipse pour le 19 février 1780; elle est additive à la déclinaison moyenne, parceque l'argument $8^\circ\ 24'$ est entre 0 et 6 signes, et que l'étoile est boréale.

2914. C'est ainsi que l'aberration et la nutation ont mis dans les calculs de l'astronomie moderne une perfection nouvelle; on diminue le travail par le secours des tables, dont les astronomes ne sauroient se dispenser de faire usage, et que j'ai citées avec celles d'aberration (2879).

LIVRE DIX-HUITIEME.

ASTRONOMIE DES SATELLITES.

Les satellites de Jupiter sont quatre petites planetes qui tournent autour de Jupiter, comme nous l'avons indiqué dans la figure 47 ; Galilée les appelloit *Medicea Sidera;* Hévélius les nommoit *Circulatores Jovis, Jovis Comites;* Ozanam les appelle *Gardes* ou *Satellites.* Ils servent continuellement aux astronomes pour déterminer les différences de longitudes entre les différens pays de la terre (2493); il importoit donc beaucoup d'avoir une théorie sûre et exacte de leurs mouvemens, et plusieurs astronomes y ont travaillé avec la plus grande assiduité; c'est ce qui m'engage à en parler ici fort au long.

2915. Les quatre satellites de Jupiter furent apperçus par Galilée le 7 janvier 1610 [a], peu après la découverte des lunettes d'approche (2287); il regardoit les astres avec une bonne lunette qu'il venoit de finir; il vit avec surprise auprès de Jupiter comme trois petites étoiles fort brillantes dans une même ligne parallele à l'écliptique, deux à l'orient, et une à l'occident : il ne s'arrêta point à examiner leurs distances; ce fut le lendemain qu'ayant encore, par hasard, examiné Jupiter, il vit les trois étoiles à l'occident; il falloit pour cela que Jupiter fût direct, quoique, suivant le calcul, il dût être rétrograde : il attendit donc le 9 avec impatience; mais le ciel fut couvert. Le 10, il ne vit que deux étoiles à l'orient, cela ne pouvoit plus s'expliquer par le mouvement de Jupiter; il comprit que le changement venoit des prétendues étoiles, et le 11 il ne douta plus qu'il n'y eût trois planetes tournant autour de Jupiter. Ce ne fut que le 13 qu'il en vit quatre.

Simon Marius (444), mathématicien du marquis de Brandebourg, assura les avoir vues dès le mois de novembre précédent [b]; il publia même des tables de leurs mouvemens; mais elles se trouverent très

(a) *Sidereus nuncius, Florentiæ*, 1610. *Il Saggiatore,* 1613.

(b) *Mundus Jovialis, anno 1609 detectus, inventore et autore Simone Mario, Norimb.* 1614. Ricciolli, *Almag. I*, 488.

défectueuses : M. Zach assure que Harriot les observoit le 16 janvier (*Eph. de Berlin*, 1788). Gassendi, dans la vie de Peiresc, nous dit que celui-ci fut un des premiers, après Galilée et Reineri, son éleve, à travailler conjointement avec Morin, etc. pour réduire en tables les mouvemens de ces 4 satellites; mais alors on connoissoit encore bien peu leurs révolutions : dans l'Almageste de Riccioli, publié en 1651, il y a $1^h 7'$ de trop pour la révolution du 4e. Hodierna ayant observé leurs éclipses vers 1652, publia, en 1656, des tables qui, fondées sur un trop petit nombre d'observations, se trouverent fort imparfaites. On n'eut de tables un peu exactes des mouvemens des satellites qu'en 1668, par Domin. Cassini; il en publia d'autres encore en 1693; Pound en donna aussi en 1719, dans les Transactions philosophiques, *n*°. 361. Les tables de Bradley, remises à Halley en 1718, n'ont été publiées qu'en 1749 (538). Jacques-Phil. Maraldi s'occupoit à en faire de nouvelles, lorsqu'il mourut en 1729; son neveu Jean-Dominique Maraldi, mort en 1788, s'en est occupé toute sa vie.

2916. Les tables dont nous nous sommes servis depuis bien des années pour calculer les éclipses des satellites de Jupiter, sont de Wargentin; il en avoit donné une premiere édition en 1746 (*Acta societ. upsaliensis ad an.* 1741); je les fis réimprimer en 1759, considérablement augmentées par l'auteur, à la suite des tables de Halley; j'en donnai une troisieme édition dans mes tables en 1771, d'après un nouveau manuscrit de Wargentin, et il n'a corrigé que celles du 2e dans le Nautical Almanac de 1779. Nous aurons bientôt de nouvelles tables d'après les travaux de M. de la Place et de M. de Lambre; je me bornerai, quant à présent, à donner la construction de celles dont on s'est servi jusqu'ici, et cela suffira pour l'intelligence de la théorie des satellites.

2917. La premiere chose qu'on doit faire pour construire les tables, est de déterminer les temps des révolutions; pour cela on pourroit observer plusieurs fois le moment où chaque satellite paroîtroit en conjonction avec Jupiter; mais afin que les conjonctions observées de la Terre soient les mêmes que les conjonctions vues du Soleil, il faudroit choisir, pour déterminer les révolutions, les conjonctions des satellites qui arrivent quand Jupiter est en opposition; car alors si le satellite passe au-dessus ou au-dessous du disque de Jupiter (et il en est de même des satellites de Saturne), le moment où il répond au centre de Jupiter est celui de la conjonction vue du Soleil et vue de la Terre.

On a encore, d'une maniere plus facile et plus commode, les

conjonctions vues du Soleil, par le moyen des éclipses (3034); car lorsqu'un satellite est au milieu de l'ombre que Jupiter répand derriere lui, il est évident que le satellite est en conjonction avec Jupiter, puisqu'il est sur la ligne menée du Soleil à Jupiter, sauf la petite latitude qui a lieu à cause de son inclinaison. L'intervalle d'une éclipse à l'autre sera la durée d'une RÉVOLUTION SYNODIQUE (1173), c'est-à-dire d'une révolution par rapport au Soleil. On a soin de comparer entre elles des conjonctions très éloignées, pour mieux compenser les inégalités des satellites, celles de Jupiter, et les erreurs inévitables dans les observations, et de déduire les inégalités, autant qu'il est possible, de chaque observation. On trouvera ces révolutions calculées avec le plus grand soin à l'art. 3026, et dans la seconde ligne de la table de l'art. 3025, telles que Wargentin les avoit déduites des observations les plus récentes.

2918. LA RÉVOLUTION PÉRIODIQUE est le retour d'un satellite au même point de son orbe, ou au même point du ciel vu de Jupiter, après avoir fait 360°. Cette révolution périodique est un peu plus courte que la révolution synodique; la premiere ne le rameneroit pas jusqu'à l'ombre de Jupiter, qui pendant ce temps-là s'est avancé lui-même d'une certaine quantité dans son orbite, ainsi que nous l'avons expliqué pour la Lune (1418). Nous ne parlerons guere que des révolutions synodiques; ce sont les seules que nous puissions immédiatement observer, et celles dont dépendent les éclipses, qui sont aujourd'hui les seules choses que l'on observe; cependant on trouvera dans la table des élémens (3025) les révolutions périodiques des quatre satellites par rapport aux équinoxes. Pour avoir les révolutions périodiques par le moyen des révolutions synodiques observées, il faut faire la proportion suivante : 360° plus le mouvement de Jupiter, pendant une révolution synodique, sont à la durée de cette révolution synodique observée, comme 360° seulement sont à la durée de la révolution périodique.

2919. Connoissant les révolutions des satellites, il faut aussi connoître leurs distances par rapport au centre de Jupiter, en les mesurant, dans le temps de leur plus grande élongation ou digression, avec un micrometre : il suffit même de mesurer la distance d'un seul; les autres distances se calculent aisément par le rapport constant qu'il y a entre les carrés des temps et les cubes des distances (2921).

C'est ainsi qu'on a trouvé les distances ou les élongations telles que je les rapporterai dans la table (3025), d'après Newton; celle du 4e satellite fut trouvée par Pound de 8′ 16″, avec un micrometre appliqué à une lunette de 15 pieds, et celle du 3e satellite de 4′ 42″

avec une lunette de 123 pieds. Les deux autres ont été conclues par le calcul, de 2′ 56″ 47‴, et 1′ 51″ 6‴. (Newton, L. III.)

Il est plus commode d'exprimer ces distances en demi-diametres ou rayons de Jupiter, et en centiemes de ce même rayon; c'est aussi la forme que l'on emploie; on trouvera ces distances dans la table des élémens (3025), telles qu'elles furent déterminées par Cassini (*Elém. d'astr., pag.* 633); par exemple, la distance du premier satellite est de 5, 67, c'est-à-dire 5 demi-diametres de Jupiter, et 67 centiemes, ou deux tiers. Par là on trouveroit aisément leurs distances réelles; car le diametre de Jupiter est environ onze fois plus grand que celui de la Terre (1398). Il suffiroit donc de multiplier par 11 les distances que nous donnons en demi-diametres de Jupiter, pour les avoir en demi-diametres de la Terre, ou par 15559 pour les avoir en lieues.

2920. Le diametre de Jupiter, vu du centre du Soleil dans ses moyennes distances au Soleil, ou vu de la Terre dans ses moyennes distances à la Terre, est de $37''\frac{1}{4}$ (1393); son demi-diametre est donc $18''\frac{5}{8}$. Si l'on multiplie cette quantité par les distances exprimées en demi-diametres de Jupiter, on aura ces mêmes distances en minutes et en secondes, telles qu'on les observe quand Jupiter est dans ses moyennes distances à la Terre; mais elles peuvent augmenter ensuite ou diminuer d'un cinquieme à cause de la distance de Jupiter, plus ou moins grande par rapport à la Terre.

Les distances des satellites en minutes et en secondes peuvent servir à comparer les distances de ces satellites avec celles des planetes au Soleil. Supposons, par exemple, qu'on veuille prendre la distance de Vénus au Soleil pour unité, ou pour échelle commune, et qu'on demande la distance du quatrieme satellite par rapport au centre de Jupiter, on fera cette proportion, la distance de Vénus au Soleil 723 (art. 1222), est à celle de Jupiter au Soleil comme 1 est à 7, 1903; on dira ensuite, le rayon est au sinus de 8′ 16″, élongation du satellite, comme 7, 1903 est à 0, 01729, distance du satellite, en parties de celle de Vénus: nous en ferons usage (3559).

2921. C'est d'après le diametre supposé de $37''\frac{1}{4}$, que Newton nous donne les distances en demi diametres de Jupiter, 5, 965; 9, 494; 15, 141; 26, 63 (Newton, *page* 390, *édit.* 1726). Wendélinus, en comparant les distances des satellites avec les durées de leurs révolutions périodiques, remarqua que la loi de Képler (1224) y étoit observée, aussi bien que dans les planetes (*Astr. réf.* 371); en effet, si l'on prend le carré de $1^j\ 18^h\ 28'$, et celui de 16^j $16^h\ 32'$, ou plus exactement ceux des temps périodiques du premier et

et du 4e satellite par rapport aux étoiles fixes; et si l'on prend aussi les cubes de leurs distances observées 5,96 et 26,63, l'on aura des nombres qui forment une proportion géométrique.

2922. Les révolutions synodiques des satellites (2917) étant additionnées successivement jusqu'à ce qu'elles forment des nombres semblables ou à-peu-près égaux, on trouve les périodes suivantes :

247	révolutions du I.	font 437^j	3^h	$44'$
123	révolutions du II.	font 437	3	41
61	révolutions du III.	font 437	3	35
26	révolutions du IV.	font 435	14	13

Ainsi, dans l'intervalle de 437 jours, les 3 premiers satellites reviennent à une même situation entre eux, et par rapport à Jupiter, à $9'$ près. Cette période nous servira quand nous parlerons des attractions réciproques des satellites (2936, 3018), et des inégalités qui en résultent, sur-tout dans les trois premiers.

Inégalités des Satellites.

2923. La première et la plus grande inégalité qu'on ait remarquée dans les révolutions des satellites, par rapport au disque de Jupiter, est celle qui est produite par la parallaxe annuelle (1140). Soit S le Soleil (fig. 244), I le centre de Jupiter, B un satellite en conjonction sur la ligne des centres ou sur l'axe de l'ombre, T le lieu de la Terre, TIG le rayon mené de la Terre par le centre de Jupiter; l'angle TIS, égal à l'angle BIG, est la parallaxe annuelle de Jupiter, qui peut aller à 12°; il faut alors que le satellite arrive de B en G, et parcoure 12° de son orbite pour nous paroître en conjonction sur la ligne TIG, quoique sa véritable conjonction, vue du Soleil, soit arrivée au point B; ces 12° font $1^h\ 25'$ de temps pour le premier satellite, $2^h\ 50'$, $5^h\ 44'$ et $13^h\ 24'$ pour les autres. Telle est l'inégalité qu'on trouve entre les révolutions des satellites, ou leurs retours observés de la Terre, quand on les compare au disque apparent de Jupiter, et qu'on observe les passages des satellites sur ce disque : mais quand on se sert des éclipses pour connoître les révolutions, on n'est point exposé à cette inégalité; nous en parlerons cependant quand il s'agira des observations (3058), parceque la situation apparente des satellites pour nous dépend de cette différence.

2924. Je passe aux inégalités qui ont lieu par rapport à la ligne des centres SIB, et qui affectent les retours des satellites à leurs

conjonctions, et les intervalles des éclipses. Nous avons supposé, dans la recherche des périodes (2917), qu'on avoit pris un intervalle de temps assez long pour que les inégalités fussent fondues et compensées, ou qu'on avoit tenu compte de ces inégalités. Si, dans la recherche des révolutions ou des moyens mouvemens, on ne prenoit que l'intervalle d'une seule révolution du satellite, le résultat seroit affecté des inégalités de Jupiter et de celles du satellite: mais si l'on compare des observations éloignées d'une période entiere de Jupiter, ou de plusieurs, c'est-à-dire de 12, de 24 ans, etc., tout sera compensé, et l'on aura exactement le mouvement moyen, abstraction faite de l'inégalité des retours. On parvient ensuite à connoître ces inégalités, en comparant entre eux les intervalles des différentes éclipses; intervalles qui devroient être toujours égaux, si le mouvement n'étoit pas altéré par des variations considérables.

2925. La plus grande inégalité dans les retours des conjonctions et des éclipses, est celle qui vient de l'inégalité du mouvement de Jupiter [a]; car la différence entre le retour d'une conjonction et une révolution périodique complete du satellite, dépend du mouvement de Jupiter, vu du Soleil, dans cet intervalle de temps, comme nous l'avons fait voir pour la Lune (1418): or celui de Jupiter est irrégulier; donc les éclipses, par cela seul, ne reviendront point dans des intervalles de temps égaux. L'intervalle entre deux éclipses est égal à une révolution du satellite, plus le temps qu'il lui faut pour atteindre l'ombre de Jupiter, qui s'est avancée autant que Jupiter lui-même, mais inégalement; or l'équation de Jupiter (1274) étant supposée de 5° 34′ dans les tables des satellites que Wargentin a données, et cette équation étant tantôt additive, tantôt soustractive, la somme de tous les petits intervalles, dont chaque révolution synodique vraie excede chaque révolution synodique moyenne en plus ou en moins, peut monter à 11° 8′ de chaque orbite.

2926. Soit ABP (FIG. 245) l'orbite de Jupiter, S le Soleil, F le foyer supérieur de l'ellipse autour duquel le mouvement de Jupiter est sensiblement uniforme (1253); supposons un satellite qui, dans

(a) Cassini remarquoit, en 1676, que la grande erreur des hypotheses de Galilée sur le temps des éclipses venoit de ce que Galilée, et les autres astronomes, ne séparoient pas du mouvement propre des satellites les apparences qui leur arrivent par celui de Jupiter autour du Soleil. Ils avoient donc pris pour mouvement simple et égal un mouvement composé d'un égal et d'un inégal; l'erreur des moyens mouvemens s'étoit augmentée de telle sorte, que les configurations tirées de leurs hypotheses pour le temps où Cassini écrivoit, n'avoient presque point de rapport à celles qui s'observoient (*Journ. des Sav.*, 14 sept. 1676).

une période de Jupiter, fasse un nombre complet de révolutions synodiques; lorsque Jupiter a fait le quart de sa révolution en temps, c'est-à-dire que l'angle AFB, qui exprime l'anomalie moyenne, est de 90°, le satellite doit aussi avoir achevé le quart des révolutions synodiques moyennes qu'il peut faire pendant une période de Jupiter, et être parvenu au point H, qui répond dans le ciel au même point que le lieu moyen de Jupiter; mais le satellite qui va de K en H arrivera en K, où se fait la conjonction avec Jupiter, et y sera éclipsé long-temps avant que d'être arrivé en H; la différence KH est la mesure de l'angle KBH, égal à l'angle FBS, qui est l'équation de Jupiter, c'est-à-dire 5° 34′. Le premier satellite emploie $0^h\,39'\,25''$ à parcourir 5° 34′ de son orbite; ainsi les éclipses que l'on observe devront avancer de 39′ 25″ au bout de 3 ans; six ans après, lorsque Jupiter sera dans la partie opposée de son orbite, elles retarderont d'autant.

2927. Pour trouver la quantité de cette équation en temps dans chaque orbite des satellites, on fait cette proportion : 360° sont à la durée de la révolution synodique, comme 5° 34′ 1″ sont à un quatrieme terme : on les trouvera calculées exactement dans la table de l'art. 3025; elles sont de 39′ 22″, $1^h\,19'\,13''$, $2^h\,39'\,42''$, et $6^h\,12'\,59''$. Tel est le fondement de la plus grande inégalité des conjonctions et des éclipses des satellites dans les tables; elle a pour argument un nombre appellé A, qui est l'anomalie moyenne de Jupiter, calculée en dixiemes de degré; elle est égale à l'équation même de Jupiter, convertie en temps à raison de la révolution synodique du satellite; mais l'équation de Jupiter étant variable (1275), on est obligé de changer la valeur de cette équation, comme nous le remarquerons dans l'usage des tables. On devroit encore faire à ces nombres une correction qui dépend de l'excentricité et de l'inégalité du mouvement des satellites; mais on l'a négligée jusqu'à présent.

L'inégalité qui dépend de l'excentricité de Jupiter, et que je viens d'expliquer, fut la premiere que Cassini employa dans le calcul des éclipses; mais il remarqua bientôt qu'elle ne suffisoit pas pour expliquer toutes les différences qui s'observoient entre les retours de ces éclipses. Il employa d'abord dans ses Éphémérides certaines équations empiriques, c'est-à-dire que l'observation lui indiquoit, sans en connoître la loi ni le principe, et l'on en a encore employé de semblables jusqu'à présent (novembre 1789), du moins pour le 3ᵉ satellite, dont les observations se concilioient difficilement avec la théorie (2944).

2928. La seconde inégalité dont on ait apperçu la véritable cause,

est celle qui vient de la propagation successive de la lumiere. Soit S (FIG. 245) le Soleil, ABP l'orbite de Jupiter, TVR l'orbite de la Terre, dont le diametre TR est de 69 millions de lieues; la lumiere que Jupiter nous réfléchit est un corps dont l'impression doit arriver jusqu'à nous, pour nous faire appercevoir Jupiter et ses satellites; le mouvement de ce corps ne sauroit être d'une vîtesse infinie; il lui faut un certain temps pour arriver de T en R; ainsi, quand la Terre est en T, Jupiter étant en opposition, sa lumiere arrive plutôt à nos yeux que quand la Terre est en R, et que Jupiter approche de sa conjonction; on observa en effet que les éclipses des satellites arrivoient environ un quart d'heure plus tard quand la Terre étoit vers R, que quand elle étoit en T.

2929. Nous voyons que, le 22 août 1675, Cassini publia un petit écrit pour annoncer les configurations des satellites, et qu'il y parloit de la propagation successive de la lumiere, sur laquelle Romer lut sa dissertation à l'académie le 22 novembre suivant (*Duhamel, Hist. acad., pag.* 145).

« Romer expliqua très ingénieusement (dit Cassini) une de ces « inégalités qu'il avoit observées pendant quelques années dans le « premier satellite, par le mouvement successif de la lumiere, qui « demande plus de temps à venir de Jupiter à la Terre lorsqu'il en « est plus éloigné, que quand il en est plus près; mais il n'examina « pas si cette hypothese s'accommodoit aux autres satellites qui de- « manderoient la même inégalité de temps : il m'est arrivé souvent « qu'ayant établi les époques des satellites dans les oppositions avec « le Soleil, où les inégalités synodiques doivent cesser, et les ayant « comparées ensemble pour avoir le moyen mouvement, lorsque je « calculois sur ces époques et sur ce moyen mouvement les éclipses « arrivées près de l'une et de l'autre quadrature de Jupiter avec le « Soleil, le moyen mouvement calculé au temps de ces quadratures « s'est trouvé différer d'un degré entier, ou un peu plus, du vrai « mouvement trouvé par les observations intermédiates; de sorte « que les satellites, dans les quadratures, avoient environ un degré « d'équation soustractive à l'égard du mouvement établi dans les « oppositions; d'où l'on pouvoit inférer que cette équation seroit « doublée dans les conjonctions». (Voyez *les hypotheses et les tables* « *des satellites,* etc. 1693, *in-fol. pag.* 52.)

2930. La démonstration que Romer trouva pour le mouvement de la lumiere, fut imprimée dans le Journal des Savans du 7 décembre 1676, où l'on voit qu'il trouvoit 22′ pour le diametre du grand orbe, et on y lit ce qui suit. « La nécessité de cette nouvelle équation du

« retardement de la lumiere est établie par toutes les observations « qui ont été faites à l'académie royale et à l'observatoire depuis « huit ans, et nouvellement elle a été confirmée par l'émersion du « premier satellite, observée à Paris le 9 novembre dernier à $5^h 35'$ « $45''$ du soir, dix minutes plus tard qu'on ne l'eût dû attendre, en « la déduisant de celles qui avoient été observées au mois d'août, « lorsque la Terre étoit beaucoup plus proche de Jupiter; ce que « M. Romer avoit dit à l'académie dès le commencement de sep- « tembre » (*Anciens Mém. de l'acad., Tom. X, pag.* 575).

2931. On voyoit clairement dans le premier satellite cette inégalité ; mais il y eut quelques difficultés pour les autres satellites, parceque l'inégalité sembloit beaucoup plus grande que dans le premier, suivant Jacques-Philippe Maraldi (*Mém. acad.* 1707). Cependant Halley, en 1694, assuroit qu'il falloit nécessairement introduire cette équation de la même quantité dans tous les satellites (*Phil. Trans. n°.* 214); Pound fit la même remarque (*Philos. Trans.* 1719), de même que Fouchy (*Mém. acad.* 1732). Pound en publia une table, à laquelle il joignit la correction qui dépend de la distance de Jupiter à la Terre (2933); Whiston les publia de nouveau en 1738 (*The Longitude discovered by the Jupiter's planets ;* by W. Whiston, *in*-8°.).

Jean-Dominique Maraldi, après la découverte de l'aberration (2826) qui prouvoit invinciblement la propagation successive de la lumiere, ne doutoit plus que cette équation ne dût être commune aux 4 satellites; et il trouvoit que les tables du 3ᵉ étoient fort rapprochées de l'observation par le moyen de cette équation (*Mém.* 1741). Wargentin s'assura, en 1746, de cette équation de la lumiere, par la comparaison d'un grand nombre d'observations.

2932. La vîtesse avec laquelle les rayons de lumiere parviennent depuis le Soleil jusqu'à nos yeux, est telle, que pendant le même temps la Terre fait dans son orbite un arc de $20''$ (2835); or la Terre décrit un arc de $20''$ en $0^h 8' 7''\frac{1}{3}$ de temps à peu près; la lumiere met donc $8'$ à parvenir du Soleil à la Terre. Lorsque la Terre sera en R, Jupiter en A, la lumiere mettra pour venir jusqu'à nous $16' 15''$ de plus qu'elle n'en employoit lorsque la Terre étoit en T, et Jupiter en A; ainsi les éclipses des satellites arriveront $16' 15''$ plus tard dans les conjonctions que dans les oppositions, et dans les autres temps à proportion; c'est l'objet de l'équation principale de la lumiere.

2933. La table qui renferme cette équation suppose que Jupiter soit dans ses moyennes distances ; mais sa distance au Soleil est

souvent plus grande à cause de l'excentricité de Jupiter, et la différence des distances est quelquefois égale à la moitié de SR ; en sorte que quand Jupiter en conjonction ou en opposition est en même temps aphélie, il faut à la lumiere, pour arriver à nous, 4′ 5″ de plus que quand Jupiter est périhélie; on en a fait une table qui dépend de l'anomalie de Jupiter; c'est la petite équation de la lumiere.

2934. La grande équation des satellites, qui est causée par l'excentricité de Jupiter (2927), et les deux équations de la lumiere, sont des causes d'inégalité communes à tous les satellites : mais il y a d'autres équations particulieres à chacun d'eux ; on les a reconnues par observation ; on en détermina les quantités, à quelques minutes près, même avant qu'on en connût la cause, et l'on appliqua une de ces équations empiriques à chacun des quatre satellites.

L'inégalité du premier, suivant les tables de 1759, étoit de 3′ ½ en temps, tantôt additive, tantôt soustractive. Il y en avoit de 16′ ½ pour le 2e, de 8′ pour le 3e, et de 1^h^ 3′ pour le 4e. Dans les tables de 1771, l'équation du 3e étoit partagée en trois autres (2941).

2935. Ces équations n'étoient pas encore suffisantes, parcequ'on n'avoit pas un assez grand nombre d'observations ; elles étoient le résultat de plusieurs inégalités qu'il falloit séparer, et dont on ne connoissoit guere que la plus grande somme (3020).

La maniere de déterminer les équations particulieres à chaque satellite consistoit uniquement à comparer beaucoup d'observations avec le calcul des tables où l'on avoit employé les inégalités générales; car alors la différence entre le calcul et l'observation formoit l'équation nouvelle que l'on cherchoit ; quand on avoit fait cette comparaison un grand nombre de fois, l'on étoit en état de former une table de l'inégalité, et d'en voir la période.

2936. L'équation du 1er satellite, dans les tables de Wargentin que je publiai en 1771, est de 3′ 30″ de temps, en plus et en moins, ce qui répond à un demi-degré de son orbite. Bradley avoit cru d'abord qu'il y avoit une excentricité dans son orbite ; il remarqua en 1719 que, dans les années 1682, 1695 et 1718, c'est-à-dire environ tous les 12 ans, les éclipses du 1er satellite duroient environ 2^h^ 20′, tandis que dans l'autre nœud, en 1677 et 1689, ces durées n'étoient que de 2^h^ 14′; cette différence paroissoit prouver que, dans le premier cas, le satellite avoit un mouvement plus lent, et se trouvoit par conséquent à une plus grande distance de Jupiter, ce qui indiquoit une excentricité dans son orbite.

Mais ensuite Bradley regarda l'attraction mutuelle des satellites

comme étant la principale cause de cette inégalité, et il indiqua la période de 437 jours (*Philos. Trans.* 1726); il en est parlé dans l'avertissement qui est à la suite de ses tables insérées parmi celles de Halley. Mais Wargentin, avant la publication de ces tables, détermina par les observations la loi et la quantité de cette équation du premier satellite, et il la fit entrer dans ses tables publiées en 1746; ce qui contribua beaucoup à leur exactitude.

2937. M. Bailly [(a)], M. de la Grange, qui ont calculé les attractions des satellites en 1766, ont reconnu que toutes les inégalités sensibles du premier satellite sont dues à l'action du second, et que la plus considérable de toutes est en effet de 3′ 30″ de temps en plus et en moins, comme l'a trouvé Wargentin, avec une période de 437 jours (*Essai sur la théorie des satell. de Jupiter*, 1766, *pag.* 77; M. de la Grange, *prix de* 1766, *pag.* 72). Cette équation croît comme les sinus des distances au point où elle est nulle, ce qui est la loi commune de toutes les quantités périodiques dépendantes des révolutions circulaires. Pour trouver cette équation dans les tables, on fait à son argument (appellé nombre C) une correction qui dépend de l'inégalité de Jupiter, et qui peut aller jusqu'à 29 parties; en voici la raison. Lorsque les équations du 1er et du 2e, qui dépendent de l'anomalie de Jupiter, sont les plus grandes, celle du second est plus forte de 40′ de temps que celle du premier (2927); il en résulte une différence en plus et en moins de 40′ de temps, ou de 1^{h} 20′, si l'on compare les cas extrêmes; c'est-à-dire que le second arrivant au milieu de l'ombre, est avancé de cette quantité par rapport au premier satellite, plus dans une des moyennes distances de Jupiter que dans l'autre. Pour atteindre le second au milieu de l'ombre, il lui faut environ 14 jours, parceque quatre révolutions du second surpassent huit révolutions du 1er de 1^{h} 22′ 47″; cela excede un peu la distance des deux satellites à leur conjonction trouvée ci-dessus de 1^{h} 20′. Le premier doit donc faire un peu moins de huit révolutions avant d'atteindre le second; mais dans 14 jours le nombre C augmente de 32; voila pourquoi la correction de cet argument doit être un peu moindre que 32 (à raison de 1000 pour 437 jours), c'est-à-dire de 29 ou 30 depuis une distance moyenne de Jupiter jusqu'à l'autre (*Mém. de l'acad.* 1786).

2938. Le second satellite est celui de tous qui a les plus grandes inégalités; cependant on approche beaucoup de l'observation par l'équation seule de 16′$\frac{1}{2}$ en plus et en moins, dont la période est

(a) C'est celui qui, ayant présidé les Etats-généraux avec beaucoup d'applaudissement, a été proclamé Maire de Paris, le 15 juillet 1789.

de 437 jours, et qui provient des attractions du 1[er] et du 3[e]. Bradley avoit vu que cette période ramenoit les erreurs des tables à-peu-près dans le même ordre; mais ce fut Wargentin qui, dans ses premieres tables, détermina la quantité de l'équation, et par là les rendit fort exactes.

2939. Bradley avoit ajouté que les dernieres observations indiquoient une excentricité dans cette orbite; que d'autres fois le second satellite s'écartoit du calcul d'une quantité sensible, en si peu de temps qu'on ne pouvoit attribuer ces différences qu'aux attractions des autres satellites. En 1776, Wargentin fit usage d'une équation de 1′ 15″ en plus et en moins, qui paroissoit venir de l'excentricité du second satellite, ayant une période de 12 ½ ans (*Nautical Almanac*, 1779); mais cette équation ne paroît pas fondée.

2940. Pour le 3[e] satellite, Maraldi apperçut que le calcul des éclipses s'écartoit de l'observation lorsque Jupiter étoit dans ses moyennes distances (*Mém.* 1741). Wargentin, dans ses tables de 1746, soupçonnoit une équation égale à celle du premier satellite, et d'une même période. Dans ses tables de 1759, il introduisit une équation de 8′ de temps, en plus et en moins, dont la période étoit de 12 ans et demi, et qui par conséquent étoit attribuée à l'excentricité de l'orbite: elle satisfaisoit à la plus grande partie des inégalités au commencement du siecle; mais elle s'est trouvée répondre mal aux observations postérieures; il sembloit depuis quelques années qu'on auroit pu la négliger, en ajoutant seulement 7′ aux époques, comme si elle eût été le résultat de deux équations qui conspiroient il y a 60 ans, et qui se détruisoient en partie de nos jours, conjecture qui s'est ensuite vérifiée.

2941. M. Bailly, d'après la théorie comparée à un grand nombre d'observations, jugea que l'équation de l'orbite n'étoit que de 10′ de degré (4′ 46″ de temps), et qu'il s'y joignoit cinq autres équations: la premiere de 25″, due à l'action du premier satellite: la seconde de 4′ 10″, due à l'action du second; M. de la Grange la trouve de 4′ 41″: la 3[e] de 1′ 19″, due encore à l'action du second, mais à raison de l'excentricité de l'orbite troublée du troisieme satellite: enfin les deux autres équations de 17″ et de 59″, dues à l'action du 4[e] satellite. Ces cinq équations peuvent produire, dans certains cas, jusqu'à 16′ 11″ de degré, suivant M. Bailly, quantité qui ne differe pas beaucoup de 16′ 46″ (ou 8′ de temps en plus et en moins), valeur de l'équation totale déterminée autrefois par les observations, et qui étoit employée dans les tables de 1759: aussi Maraldi trouvoit des différences d'un demi-quart d'heure dans les erreurs des tables en six mois

mois de temps (3020). L'équation qui vient de l'action du 4[e] satellite a une période de 49 jours 14[h] environ; M. de la Grange soupçonnoit qu'elle pouvoit être la cause de ces sauts qu'on trouvoit d'un mois à l'autre; mais elle est trop petite pour pouvoir les expliquer, et ils venoient peut-être du défaut des observations.

2942. Wargentin a employé trois équations dans ses dernieres tables; l'une de $2'\frac{1}{2}$ de temps en plus et en moins, dont la période est de 437 jours; les autres de $4'\frac{1}{2}$ et de $2'\frac{1}{2}$ de temps, dont la cause n'étoit point éclaircie, et dont la loi n'est ajustée que sur les seules observations, avec des périodes d'environ $12\frac{1}{2}$ et 14 ans; il les proposoit en attendant que la théorie ou l'expérience nous eussent éclairés là-dessus. Peut-être, dit-il, l'excentricité de ce satellite a quelque variation à laquelle ces deux équations peuvent répondre.

Wargentin m'écrivoit ensuite, en 1781, que les observations faites depuis quelques années n'avoient pas justifié ses deux équations; il auroit fallu en changer les périodes et les quantités; mais il lui paroissoit plus simple de ne supposer qu'une seule équation, dont la période fût à-peu-près de 13 ans, et la quantité variable, savoir de $7'$ ou $7'\frac{1}{2}$ de temps entre 1670 et 1720. De 1720 à 1760, elle paroissoit avoir diminué jusqu'à $2'\frac{1}{2}$, et être de la même quantité depuis 20 ans. Il calcula dans cette supposition 1250 observations faites depuis cent ans; elles s'accordent avec le calcul à 2 ou $3'$ près. *Acta Upsal. Tomo IV.*

2943. Mais on ne peut pas compter sur 2 minutes dans cette table des erreurs, parceque Wargentin n'a pas pris la précaution d'employer les lieux de Jupiter observés, au lieu des lieux calculés, ce qui eût été absolument nécessaire pour dégager les tables des satellites de l'erreur des tables de Jupiter, et j'ai montré qu'on pouvoit supprimer sa troisieme équation sans s'écarter beaucoup plus des observations (*Mém.* 1787). M. de la Place a trouvé cependant qu'il existoit réellement dans la théorie du 3[e] satellite deux équations très distinctes, dont l'une dépend de la distance du 3[e] satellite à son apside, et l'autre dépend de sa distance à l'apside du 4[e]. Ces deux équations sont presque égales, et leur somme peut aller à 15 ou $16'$ de degré, ou $7'$ de temps. Ces équations s'ajoutoient vers la fin du dernier siecle, et se retranchoient au contraire l'une de l'autre vers 1760; c'est la raison pour laquelle elles étoient peu sensibles vers 1760; ces deux apsides étoient à-peu-près opposées, tandis qu'elles coïncidoient dans le dernier siecle; celle du 3[e] avance de $3°\ 2'$ par an.

2944. Le quatrieme satellite a une orbite très sensiblement elliptique; Bradley l'avoit reconnu dès 1717 par toutes les observa-

tions, et il faisoit la plus grande équation de 0° 48′ à-peu-près, comme celle de Vénus (1272); c'est ce qu'on voit dans les tables de Halley. Avant que ces tables fussent publiées, Maraldi remarquoit, en 1732, que les tables de Cassini retardoient les éclipses de $1^h 50'$, relativement à l'observation en 1699 et 1711 à 9 signes de longitude, que l'erreur étoit nulle vers le commencement du Cancer, et qu'elle étoit la même quand Jupiter étoit au même point de son orbite. Il sentit qu'il falloit diminuer les époques des conjonctions de 55′ de temps, qui font 50′ de degré; par là les erreurs diminuoient de moitié, et devenoient tantôt additives, tantôt soustractives; elles se trouvoient nulles quand Jupiter étoit dans ses apsides, et augmentoient comme l'équation de son orbite; cela indiquoit une équation semblable dans le satellite.

2945. Soit S le Soleil (FIG. 246), AC l'orb. de Jupiter, A son aphélie, PBQ l'orbite elliptique du 4ᵉ satellite, dont le grand axe est actuellement presque parallele à celui de l'orbite de Jupiter, mais dans une situation renversée; lorsque Jupiter sera parvenu de A en O, le grand axe PQ sera dans la situation RV parallele à PQ, parceque le satellite et tous les points de son orbite reçoivent un mouvement de translation parallele et égal à celui de Jupiter lui-même, et par lequel toutes les circonstances du mouvement relatif sont les mêmes, à-peu-près comme nous l'avons expliqué pour la Terre (1080, 1100). Jupiter étant en O, la conjonction du satellite arrivera en F sur la ligne des centres SOF; mais comme aux environs du point R, où le satellite est le plus près de Jupiter, sa vîtesse est plus grande que la vîtesse moyenne, il arrivera plutôt en F, et sera éclipsé plutôt que suivant les tables, qui ne contiennent que le moyen mouvement du satellite.

2946. Dans la conjonction du 6 avril 1708, Maraldi trouve pour le lieu du satellite sur son orbite $5^s\ 27°\ 55'\ 26''$, et, le 3 mars 1753, $3^s\ 15°\ 51'\ 7''$; le mouvement vrai a donc été de $9^s\ 17°\ 55'\ 41''$, tandis que le mouvement moyen auroit été de $9^s\ 19°\ 13'\ 5''$, c'est-à-dire de $1°\ 17'\ 24''$ plus grand. Entre l'observation de 1708 et celle du 4 août 1759, il trouve le mouvement vrai plus grand de $34'\ 28''$ que le mouvement moyen; la demi-somme de ces deux erreurs, ou de ces deux différences, est la plus grande qu'il ait pu appercevoir, et la plus grande équation du 4ᵉ satellite (1261, 1263) se trouve par là de $0°\ 55'\ 56''$. Ces observations indiquent aussi que le point de la plus grande vîtesse est du côté de l'aphélie de Jupiter, puisque le satellite, en allant de $3^s\ 16°$ à $5^s\ 28°$, a un plus petit mouvement qu'en allant de $5^s\ 28°$ à $9^s\ 20°$, qui étoit sa longitude en 1759.

2947. Cette équation de l'orbite du 4e satellite va jusqu'à 1^h 0′ 30″ en plus et en moins, suivant les dernieres tables de Wargentin, et elle suffit pour le 4e satellite; les attractions des trois autres n'influent pas sensiblement sur son mouvement, et M. Bailly n'a trouvé que deux ou trois petites inégalités qui viennent de l'attraction du Soleil sur ce satellite. Mais Wargentin avoit employé dans ses tables les petites inégalités de Jupiter, produites par l'attraction de Saturne, et qui sont sensibles dans les conjonctions du 4e satellite (2952).

2948. Le lieu de l'apside (a) du 4e satellite, suivant Bradley, étoit, en 1717, à 11^s 8°; mais il trouva que les observations de 1671, 1676 et 1677 exigeoient que l'on plaçât le lieu de l'apside pour 1677 à 10^s 14°, de sorte qu'il lui attribua un mouvement progressif de 36′ par an; Maraldi l'a porté jusqu'à 44′ 15″.

2949. Il représentoit toutes les observations du 4e satellite, en supposant la plus grande équation de son orbite 0° 55′ 56″, l'époque de sa longitude moyenne pour 1700, c'est-à-dire le 31 décembre 1699 à midi, 7^s 17° 18′ 2″, le lieu de son apside, ou apojove, 10^s 29° 22′ pour 1700, et le mouvement annuel de cette apside 44′ 15″. Sur un nombre de 152 observations que Maraldi a calculées avec ces élémens, il n'y en a que 30 dans lesquelles le calcul différe de l'observation de plus de 5′$\frac{1}{2}$, parmi lesquelles quatre observations seulement different de 10′ et trois de 13′; c'est avoir beaucoup fait que d'être parvenu à les représenter avec cette précision, sans avoir tenu compte des inégalités de Jupiter lui-même (2952), et du temps que le satellite emploie à s'éclipser (3046). Depuis ce temps-là M. de la Place a trouvé dans le 4e satellite une équation de 1′ 54″ de degré, qui dépend de l'action du Soleil et de la distance de Jupiter à son aphélie, cette équation est semblable à l'équation annuelle de la Lune (1448); et une d'environ 28″, qui répond à l'évection (1433).

2950. Le mouvement de l'apside du 4e satellite vient de l'attraction des autres satellites (*M. Bailly, p.* 107), ainsi que le mouvement de l'apogée de la Lune vient de l'attraction du Soleil : cependant il y a dans l'aplatissement de Jupiter une cause qui peut donner aux apsides des satellites un mouvement considérable: on en trouve le calcul par Walmesley, dans les *Trans. Philos.* de 1758; par Euler, dans les *Mémoires* de Berlin pour 1763; par M. Bailly, dans les *Mémoires* de 1763, et dans sa Théorie, *pag.* 65. Suivant le premier, cet aplatissement devoit produire un mouvement de 34′ par année dans

(a) On a aussi appellé *Apojove* l'apside supérieure ou la plus éloignée dans les orbites des satellites de Jupiter, quoique ce terme soit composé d'un mot grec et d'un mot latin.

l'apside du 4e satellite. Euler, en supposant que les diametres de Jupiter soient comme 8 est à 9, trouve 1° 32′ 40″ par année, et pour les trois autres satellites 288°, 57° 3′, 11° 10′; mais la supposition d'homogénéité et l'erreur sur le degré d'aplatissement de Jupiter peuvent mettre dans ces calculs une incertitude considérable. Au reste, si l'orbite du premier satellite est très peu excentrique, ce grand mouvement sera insensible dans les observations. M. Euler le fils, dans les *Mémoires* de Berlin pour 1765, examine les inégalités qui pourroient avoir lieu à raison de la figure du corps attiré, c'est-à-dire de la figure des satellites; mais il trouve qu'elles sont insensibles quant au mouvement progressif des satellites.

M. de la Place s'est assuré que le mouvement de l'apside du 4e est le résultat combiné de l'action du Soleil, de celles des trois autres satellites, et de l'aplatissement de Jupiter qu'il trouve de $\frac{1}{16}$.

2951. La réduction est une autre équation que l'on doit employer dans les tables des satellites, et qu'on a long-temps négligée; c'est la différence entre la conjonction et le milieu de l'éclipse (1130, 3988); elle n'est que la moitié de celle qu'on trouveroit en calculant de la maniere indiquée pour les éclipses de Lune (1757, 3988), parceque les conjonctions se comptent sur l'orbite du satellite, et non pas sur celle de Jupiter. Soit NC (FIG. 251) l'orbite de Jupiter, NA l'orbite du satellite, CI la perpendiculaire sur la premiere, CA la perpendiculaire sur la seconde, l'arc NK égal à NC; le point A marque le milieu de l'éclipse, le point K la conjonction sur l'orbite du satellite, et le point I la conjonction rapportée à l'orbite de Jupiter. AK est la réduction dont on se sert pour les satellites; cette réduction va jusqu'à 1′ 29″ de temps pour le 3e satellite, quand son inclinaison est de 3° 26′, et à 1′ 42″ pour le 4e; elle est soustractive dans le premier et le troisieme quart de l'argument de latitude, soit qu'on compte du nœud ascendant ou du nœud descendant. Si l'on prenoit l'inclinaison vraie, c'est-à-dire dans l'hypothese de l'ombre elliptique (2980), on trouveroit la réduction du 3e satellite plus petite d'environ 10″.

2952. Les inégalités de Jupiter doivent entrer aussi dans les tables des éclipses des satellites; et comme Jupiter s'écartoit à la fin quelquefois de 4′ des meilleures tables que l'on eût, ces variations pouvoient produire 28″ de temps sur le premier satellite, 57″ sur le second, 1′ 44″ sur le 3e, et 4′ 27″ sur le 4e; on ne pouvoit donc attendre de ces tables une plus grande perfection jusqu'à ce que la théorie de Jupiter eût été perfectionnée. Actuellement que les tables faites par M. de Lambre sont toujours exactes à la demi-minute, il

ne faut que tenir compte de la différence entre ces tables et celles qui ont servi aux tables des satellites. C'est ainsi que l'on pourroit calculer pour chaque satellite l'effet des perturbations de Jupiter en différentes années.

2953. Il y a encore dans les conjonctions qu'on observe quelques inégalités optiques dont je parlerai à l'occasion des éclipses (3041), mais dont on n'a pas encore assez fait usage.

2954. Pour construire les tables des conjonctions des satellites, il faut établir une époque dégagée de toutes les inégalités ; on peut choisir pour cela l'observation quelconque d'une conjonction, la corriger par toutes les équations connues, pour la réduire à une conjonction moyenne sur l'orbite du satellite, et l'on aura une époque des conjonctions; j'en donnerai l'exemple et le calcul (3034).

Pour épargner aux calculateurs l'attention d'ajouter ou de retrancher les équations suivant les cas, Wargentin, dans ses tables, a diminué par avance toutes les époques, comme Pound l'avoit fait dans ses tables en 1719 (*Philos. Trans.*), afin de rendre toutes les équations additives. Par là il arrive qu'une équation est nulle dans le cas où elle auroit été la plus grande à soustraire, et que l'équation additive est quelquefois doublée.

2955. Par exemple, la table des époques des conjonctions moyennes du premier satellite indique le moment où arrive à chaque année la premiere conjonction du satellite avec le lieu moyen de Jupiter, compté sur l'orbite du satellite; mais ce temps est diminué d'abord de $8' \, 7'' \frac{1}{3}$, équation de la lumiere (2932). Au moyen de cette quantité que l'on ôte des époques, l'équation se trouve toujours additive : il faut ajouter ces $8' \, 7''$ qu'on a ôtées, et de plus ce qu'il y auroit eu à ajouter; et dans les cas où l'on auroit dû soustraire l'équation, on ajoutera seulement l'excès des $8' \, 7''$ sur cette équation, qui auroit lieu si les tables étoient construites à la maniere ordinaire; par là elle peut aller jusqu'à $16' \, 15''$, qui est le double de $8' \, 7'' \frac{1}{3}$. Il en est de même de toutes les autres équations, excepté de celle qui dépend de l'excentricité de Jupiter; celle-ci étant variable, on n'a pu faire d'avance la soustraction d'une quantité constante (2927).

Lorsqu'on découvre une nouvelle équation, tantôt additive, tantôt soustractive, on retranche des époques la valeur de la plus grande équation, afin qu'elle soit toujours additive.

2956. On trouvera dans la table des élémens (3025) les époques des quatre satellites, c'est-à-dire la premiere conjonction moyenne de 1760, du moins telle que Wargentin l'employoit dans ses tables. On voit, par exemple, que celle du second satellite arrivoit le 1er

janvier 1760 à 14^h $59'$ de temps moyen; mais ce temps est diminué de la somme des équations, et même encore d'un jour (3027). J'ai ajouté dans la même table les époques des longitudes moyennes pour 1700, c'est-à-dire le point du ciel où chaque satellite paroissoit répondre la veille du 1er janvier 1700, à midi de temps moyen, vu du centre de Jupiter, en comptant sur l'orbite de chaque satellite, d'après les mêmes tables; enfin les moyens mouvemens, soit pour un jour, soit pour cent années juliennes. Avec ces données on peut construire des tables (1326), telles qu'elles sont dans le livre de Cassini; elles servent à trouver les configurations (3054).

Pour trouver la longitude du premier satellite en 1700, par le moyen de la conjonction marquée dans les tables, je commence par y ajouter $29' 34''$ pour la somme des équations qu'on en a retranchées, et j'ai 1^j 1^h $19' 27''$; le lieu moyen de Jupiter se trouve, pour ce moment-là, 9^s $15°$ $57'$ $16''$. C'est aussi celui du satellite; pour l'avoir le 31 décembre à midi, j'en ôte son mouvement 7^s $4°$ $42'$ $58''$; il reste pour l'époque de 1700, 2^s $11°$ $14'$ $18''$, comme dans la table de l'art. 3025.

A la suite des époques des conjonctions, j'ai mis les argumens des équations générales des satellites pour les mêmes époques. Le nombre A est l'anomalie moyenne de Jupiter; le nombre B est la distance de Jupiter à la conjonction en milliemes parties du cercle; l'équation de la lumiere est à-peu-près proportionnelle au cosinus du nombre B, plus exactement à la distance qu'il y a de Jupiter à la Terre en ligne droite. Ce nombre B doit par conséquent être corrigé par l'inégalité de Jupiter, que l'on exprime en milliemes du cercle.

Des Éclipses des Satellites.

2957. Les éclipses des satellites sont depuis long-temps le fondement de toutes leurs théories, parcequ'il n'y a pas d'observations plus concluantes; aussi voit-on que, dès 1668, Cassini commença à les observer. Pour calculer ces éclipses, il faut commencer par déterminer la largeur de l'ombre de Jupiter que les satellites traversent. Cette ombre que Jupiter répand derriere son disque, n'est pas un cylindre parfait, parceque le Soleil, qui est le corps lumineux, est plus grand que Jupiter; les rayons qui partent des deux bords du Soleil, et qui touchent les bords de Jupiter, sont donc des rayons convergens; et puisqu'on sait le rapport des diametres de Jupiter et du Soleil, on trouveroit aisément le point où les deux rayons vont

concourir pour former la pointe du cône d'ombre, d'où l'on déduiroit le diametre de la section dans la région de chaque satellite.

Mais cette méthode ne pourroit pas s'appliquer immédiatement aux éclipses que nous observons; 1°. parceque la pénombre, qui est plus ou moins grande suivant qu'on approche des bords du cône d'ombre (1768), fait que l'obscurité ne commence pas exactement au point que donneroit ce calcul; 2°. parceque les satellites ont un diametre sensible et n'entrent dans l'ombre que peu à peu : d'où il suit que quand nous perdons de vue le satellite avec nos lunettes ordinaires, le centre n'est pas sur le bord du cône d'ombre; le calcul de la véritable largeur de l'ombre ne nous indiqueroit point le moment de l'immersion qui s'observe.

2958. C'est donc par expérience qu'il faut déterminer le diametre de l'ombre, c'est-à-dire par la durée des éclipses observées lorsqu'elles arrivent près des nœuds, et que les satellites traversent l'ombre par le centre (2962).

Pour le premier et le second satellite, on ne voit jamais l'immersion et l'émersion aux environs des nœuds (2992); on voit seulement celles du 3e et du 4e satellite, pourvu que la parallaxe annuelle de Jupiter soit assez grande, ce qui arrive pendant une partie de l'année. Ainsi, pour les deux premiers satellites, l'on est obligé de comparer les immersions qui arrivent quelques jours avant l'opposition, avec les émersions qui arrivent quelques jours après, en retranchant le nombre des révolutions entieres qu'il a dû y avoir entre l'immersion et l'émersion. C'est ainsi qu'on a déterminé les demi-diametres de l'ombre en temps pour chaque satellite, tels qu'ils sont dans la table des élémens (3025); par exemple, celui du premier satellite est de $1^h\ 7'\ 55''$; c'est-à-dire qu'il est dans l'ombre pendant $2^h\ 15'\ 50''$ lorsqu'il la traverse par le centre, et qu'il y demeure le plus longtemps.

En employant ainsi des immersions et des émersions éloignées de plusieurs périodes, il faut avoir soin de choisir, autant qu'il est possible, des observations faites avec les mêmes lunettes, les mêmes yeux, à pareilles distances de l'opposition, dont l'exactitude soit constatée par des observations précédentes ou suivantes, et dont la distance à l'opposition soit à-peu-près entre 10 et 30 jours.

2959. La révolution synodique est à 360° comme le demi-diametre de l'ombre en temps est au demi-diametre en degrés; on en trouvera aussi la valeur dans la table (3025); ainsi la plus grande demi-durée des éclipses du 2e satellite étant $1^h\ 25'\ 40''$, on a $6°\ 1'\ 33''$ pour le demi-diametre de l'ombre en degrés de son orbite. On peut

l'exprimer aussi en demi-diametres de Jupiter, en disant, 1 : 9,494 :: sin. 6° 1′ 33″ : 0,9967; c'est-à-dire que le rayon de Jupiter est à celui de la section de l'ombre, à la distance du second satellite, comme 10000 est à 9967. Ainsi le demi-diametre de l'ombre est plus petit de $\frac{1}{303}$ que celui de Jupiter; nous ferons usage de cette différence (2996). Je me suis servi des distances données par Newton, en calculant le demi-diametre de l'ombre pour chaque satellite dans la table des élémens (3025).

2960. Le diametre de l'ombre en temps, ou la durée des éclipses centrales qu'on suppose toujours la même, peut varier si les orbites des satellites sont excentriques. Dans le 4e satellite, dont l'orbite est certainement elliptique (2945), le demi-diametre de l'ombre est plus grand à une plus petite distance (*Mém.* 1762, *pag.* 75), mais le satellite va plus vîte, et il se fait une compensation; d'ailleurs la différence est peu sensible : ainsi on ne fait point usage de ces considérations dans nos tables.

2961. Aussitôt qu'on eut observé plusieurs fois les éclipses des satellites de Jupiter, on s'apperçut que les durées n'étoient pas toujours égales; quelquefois le 3e satellite n'est éclipsé que pendant 1h 17′, quelquefois 2h 7′. On vit même que le 4e satellite s'éclipsoit à chaque révolution pendant quatre ans, qu'ensuite, pendant deux ans, il passoit au-dessus ou au-dessous de Jupiter sans être éclipsé. Cela fit juger que les orbites des satellites n'étoient pas dans le même plan que l'orbite de Jupiter; car si cela eût été, tous les satellites auroient été éclipsés à chaque révolution, et toujours pendant le même temps; ces différences dans la durée des éclipses sont la seule méthode qu'on emploie pour connoître les inclinaisons des orbites des satellites.

2962. Lorsqu'un satellite traverse le cône d'ombre par son centre, il est exactement dans la ligne droite qui joint les centres de Jupiter et du Soleil; ainsi il est dans la commune section de son orbite avec celle de Jupiter; car il est à la fois et dans le plan de son orbite (puisqu'il ne la quitte jamais), et dans celui de l'orbe de Jupiter, puisque la ligne menée du Soleil à Jupiter est toujours dans le plan de cette orbite. Le satellite étant alors dans la commune section de son orbite et de celle de Jupiter, il est évident que Jupiter y est aussi; l'on peut donc alors dire que Jupiter est dans le nœud de son satellite. Ainsi quand Jupiter est au degré de longitude où répond un des nœuds de l'orbe d'un satellite (vu du centre de Jupiter ou du Soleil), le satellite traverse l'ombre par le centre, et la durée de son éclipse est la plus longue.

2963.

2963. Soit SO (FIG. 249) la ligne des nœuds, ou la ligne sur laquelle étoit Jupiter, quand le plan de l'orbite du satellite étoit dirigé vers le Soleil, et que les satellites traversoient l'ombre par le centre; supposons que Jupiter ait avancé de O en I avec l'orbite du satellite autour de lui; cette orbite restera toujours parallele à elle-même (2945), et la ligne des nœuds sera sur une direction ACN parallele à SO. Ainsi quand Jupiter s'éloigne du nœud, la ligne de l'ombre IM n'est plus dans la commune section des orbes de Jupiter et du satellite; donc le satellite venant à se trouver en opposition au point M, ne sera pas dans le plan de l'orbite de Jupiter, et ne sera pas sur la ligne des centres, mais au-dessus ou au-dessous.

Quand Jupiter est dans le nœud d'un de ses satellites, un observateur supposé dans le Soleil se trouve dans le plan de l'orbite du satellite, et il la voit en forme de ligne droite; pour qu'il la vît toujours droite, il faudroit qu'elle passât toujours par son œil, et que la commune section ou la ligne des nœuds passât toujours par le Soleil; pour cela il faudroit qu'elle fît le tour du ciel, aussi bien que Jupiter, en douze ans, ce qui n'arrive point; la ligne des nœuds est à-peu-près fixe dans le ciel, c'est-à-dire parallele à elle-même, et dirigée sensiblement vers le même point du ciel; quand Jupiter y a passé une fois, il s'écoule six années avant qu'il y revienne.

2964. Soient donc NCIA la ligne des nœuds, ABCD l'orbite du satellite qui traverse en A et en C le plan de l'orbite de Jupiter; il faut concevoir que l'orbite du satellite est relevée en B au-dessus du plan de la figure, et se trouve un peu vers le nord; au contraire, en D, elle est un peu vers le midi, ou au-dessous du plan de la figure; depuis A jusqu'en B, le satellite va toujours en s'élevant au-dessus du plan de l'orbite de Jupiter; depuis B jusqu'en C, il revient vers ce plan; depuis C jusqu'en D, il descend au-dessous du plan, et il y revient depuis D jusqu'en A. Puisque B est la limite, le point de la plus grande latitude, ou de la plus grande élévation du satellite au-dessus du plan de l'orbe de Jupiter, ce satellite, arrivé en M dans sa conjonction supérieure où il est éclipsé, ne sera pas encore à sa plus grande latitude, et il sera d'autant moins éloigné du plan de la figure ou de l'orbite de Jupiter, que l'angle AIM sera moindre. Or l'angle AIM, qui est la distance du satellite à son nœud, est égal à l'angle ISO, ou à la distance qu'il y a entre le lieu I de Jupiter et la ligne SO, supposée fixe, à laquelle la ligne des nœuds IN reste toujours parallele, quel que soit le lieu de Jupiter; ainsi la latitude du satellite en M dépendra de l'arc AM, ou de l'angle ISO, distance

de Jupiter à la ligne des nœuds SO, qui répond toujours vers dix signes et demi de longitude pour tous les satellites (3025).

2965. La quantité dont le point M s'éleve au-dessus du plan de l'orbite de Jupiter, est à la quantité dont la limite B s'en éloigne, comme le sinus de AM est au sinus de l'arc AB, c'est-à-dire au rayon; car si deux cercles se coupent en A et en C, leur distance en différens points, tels que M, perpendiculairement au cercle incliné, ou à l'orbite du satellite, est comme le sinus de la distance au point A (3875), c'est-à-dire à l'intersection, cette distance étant mesurée sur l'autre cercle, qui est l'orbite de Jupiter; ainsi la latitude du satellite en M, mesurée perpendiculairement à son orbite, est comme le sinus de la distance de Jupiter au nœud du satellite, mesurée sur l'orbite de Jupiter.

2966. Lorsque, par le mouvement de Jupiter dans son orbite, le rayon SI est devenu perpendiculaire à la ligne des nœuds SO ou IN, le point M de la conjonction supérieure concourt avec le point B, qui est la limite de la plus grande latitude; alors l'angle de l'orbite avec le rayon visuel SIM est égal à l'inclinaison du satellite, par exemple 3°; et l'orbite vue du Soleil paroît sous la forme d'une ellipse, dans laquelle le grand axe est au petit comme le rayon est au sinus de 3° (1815), en ne considérant pas le mouvement de Jupiter pendant la durée de la révolution du satellite, ou bien en considérant le satellite seulement par rapport à Jupiter, et négligeant le mouvement de la Terre. Soit S le Soleil (FIG. 250), I le centre de Jupiter, IH le rayon de l'orbite d'un satellite; ce rayon, pris dans un plan passant par le Soleil et par Jupiter perpendiculairement à l'orbite de Jupiter, est incliné sur le rayon solaire de la quantité de l'angle SIH; on aura KH = IH sin. KIH; c'est la quantité dont le satellite paroîtra s'élever au-dessus du plan de l'œil, dans le temps où l'ellipse sera la plus ouverte. Dans les autres positions de Jupiter par rapport au nœud, cette quantité diminuera comme le sinus de la distance de Jupiter au nœud (2965); ainsi appellant I la plus grande latitude ou l'inclinaison du satellite, D la distance de Jupiter au nœud du satellite, comptée sur l'orbite de Jupiter, et R la distance du satellite à sa planete, ou le rayon de son orbite, on aura R sin. I sin. D pour la quantité dont le satellite sera élevé au-dessus du plan de l'orbite de Jupiter, en comptant le mouvement sur l'orbite du satellite dans le moment du milieu de l'éclipse; il n'en faut pas davantage pour calculer les durées des éclipses.

2967. Cette élévation du satellite au-dessus de Jupiter est égale

à son abaissement dans le point opposé ; l'ellipse qu'il paroît décrire est donc plus ou moins ouverte, suivant que Jupiter s'éloigne de la ligne des nœuds : quand la distance du satellite est assez grande pour que le petit axe de cette ellipse devienne plus large que le cône d'ombre, le satellite passe au-dessus de l'ombre, comme on le voit dans la fig. 247 ; c'est ce qui arrive toujours au 4[e] satellite de Jupiter, environ deux ans après le passage de Jupiter dans les nœuds des satellites. Quand Jupiter est à 30° de la ligne des nœuds, l'ellipse (FIG. 248) a la moitié de l'ouverture qu'elle avoit dans le cas précédent, parceque le sinus de 30° est la moitié du sinus total ; alors le 4[e] satellite traverse encore l'ombre malgré l'obliquité de son orbite et sa distance à Jupiter, parceque sa latitude est plus petite dans le temps de la conjonction, que le demi-diametre de l'ombre.

2968. La section de l'ombre de Jupiter dans la région d'un satellite est représentée par le cercle HDBF (FIG. 251), que je suppose perpendiculaire à la ligne des centres du Soleil et de Jupiter; il est traversé par un diametre QB, qui est dans le plan de l'orbite de Jupiter; ED est une portion de l'orbite du satellite, CA est la perpendiculaire sur cette orbite; c'est le sinus d'un arc qui, vu du centre de Jupiter, n'est autre chose que la latitude du satellite : ce sinus, pris dans les tables, seroit une fraction égale à sin. I sin. D (3873); mais CA, exprimé en parties de la distance du satellite, = R sin. I sin. D (2966). Comme il est plus commode pour le calcul des éclipses de rapporter toutes les parties de cette figure au demi-diametre de l'ombre (2958), c'est-à-dire à la demi-durée des éclipses, qui est la plus grande de toutes, et qui est exprimée par CB, nous réduirons CB, CA et AD en secondes de temps; nous exprimerons même la distance du satellite à Jupiter, ou le rayon de son orbite, en parties semblables, ou en secondes de temps, en mettant au lieu de R le temps que le satellite emploie à parcourir un arc de même longueur que le rayon de son orbite, c'est-à-dire un arc de 57° (3499); car il n'importe pas que cette distance qu'on prend pour unité, soit en temps, en degrés, ou en demi-diametres de Jupiter. Le mouvement de Jupiter rend plus long le temps des 57° ; mais le calcul se fait comme si Jupiter étoit immobile, en prenant seulement la différence des deux mouvemens, parceque nous ne cherchons ici que le rapport entre la distance et l'arc parcouru pendant l'éclipse. Pour connoître le temps qui répond à un arc de 57°, il suffit de faire cette proportion, 360° sont à la révolution synodique comme 206265″ sont au temps cherché, que j'appelle *t;* on le trouvera pour chaque satellite dans la table des élémens (3025). Ayant

multiplié sin. I sin. D par ce nombre de secondes de temps, on aura CA en secondes de temps $= t$ sin. I sin. D; on a aussi le rayon CD ou CB en secondes de temps; c'est la demi-durée de la plus grande éclipse, celle qui a lieu quand Jupiter est dans le nœud du satellite; enfin, c'est le demi-diametre de l'ombre en temps (2958), que nous appellerons *r*.

2969. Dans le triangle CAD rectangle en A, l'on a CA $= \sqrt{CD^2 - AD^2}$, et nommant *d* la demi-durée qui répond à AD, on a CA $= \sqrt{rr - dd} =$ R sin. I sin. D (2968); donc prenant pour rayon le temps *t* qui répond à 57°, afin que tout soit exprimé en temps, l'on aura sin I $= \frac{\sqrt{rr-dd}}{t \sin. D}$. On peut trouver l'inclinaison par cette formule, quand on connoît le demi-diametre de l'ombre, et une demi-durée observée; mais la difficulté d'évaluer ces carrés avec précision nous oblige à employer les sinus (2971); on peut aussi mettre $\sqrt{(r+d)(r-d)}$, dont on a la valeur en prenant la demi-somme des logarithmes de $r + d$ et de $r - d$ (1761).

2970. Pour avoir l'expression de la demi-durée et de l'inclinaison, on considere le triangle CAD, dans lequel CD : CA :: R : sin. ADC ou cos. ACD; donc cosin. ACD $= \frac{CA}{CD}$; or CA $= t$ sin. I sin. D. Ainsi quand on aura l'inclinaison d'une orbite et la distance de Jupiter au nœud du satellite, on connoîtra CA et l'angle ACD, dont le sinus AD mesure la demi-durée de l'éclipse. Pour avoir cette demi-durée en temps, on fera cette proportion : le rayon CB est à la plus grande demi-durée en temps, ou au demi-diametre de l'ombre, comme le sinus AD est à la demi-durée que l'on cherche, c'est-à-dire qu'on multipliera le temps de la plus grande demi-durée par le sinus de l'angle ACD, et l'on aura la demi-durée actuelle.

Exemple. On demande la demi-durée d'une éclipse du 4e satellite pour le 19 novembre 1761, à 6 heures, en supposant l'inclinaison de 2° 36′, le lieu du nœud 10^s 17° 40′, et la plus grande demi-durée 2^h 23′. Le lieu de Jupiter sur son orbite pour ce jour-là étoit 0^s 4° 23′; ainsi sa dist. au nœud est 1^s 16° 43′, ou 46° 43′. Donc

Log. sin. D.	986212
Log. sin. inclin. 2° 36′.	865670
Log. sin. I sin. D.	851882

Il faut y ajouter le logarithme du temps pour 57° (2968), afin d'avoir le log. de AC en secondes de temps, et en ôter le log. du

rayon CD en secondes, ou de $2^h\ 23'\ 0''$; on aura le logar. de $\frac{AC}{CD}$ = cos. ACD. Ainsi le log. constant 1,42895, qui est le log. de t ou du temps pour 57°, moins celui du demi-diam. de l'ombre, étant ajouté avec celui de sin. I sin. D, donne celui du cosinus de l'angle ACD.

Log. sin. I sin. D.	8,51882
Logarithme de $\frac{t}{r}$, ou u.	1,42895
Log. cosin. de l'angle ACD 27° 32′ 24″.	9,94777
Log. du sinus de ce même arc.	9,66499
Ajoutez le log. de r, ou $2^h\ 23'$.	3,93349
Log. de la demi-durée $1^h\ 6'\ 7''$.	3,59848

2971. Cette regle revient à cette expression $\frac{t \text{ sin. I. sin. D.}}{r}$ = cos. ACD; quand on a trouvé le cosin. de ACD, son sinus multiplié par le demi-diametre de l'ombre en temps (que j'appelle r) donne la demi-durée cherchée. Le temps par 57° se trouvera pour chaque satellite dans la table des élémens, aussi-bien que la valeur $\frac{t}{r}$ du temps par 57° divisé par le demi-diametre de l'ombre, égale à la cosécante (3806) de l'arc décrit par le satellite, quand il traverse l'ombre par le centre; j'appelle cette valeur u, afin qu'on ait u. sin. I. sin. D = cos. ACD, et r. sin. ACD = d; c'est la demi-durée de l'éclipse, en supposant l'ombre circulaire. (*Voyez* l'art. 2976.) Si l'on veut se passer de t et de u, et employer le demi-diametre de l'ombre en degrés = m, on considérera que sin. I = $\frac{r\sqrt{1-\frac{d^2}{r^2}}}{t \text{ sin. D}}$ (2969), ou parceque $t = ru$, sin. I = $\frac{\sqrt{1-\frac{d^2}{r^2}}}{u \text{ sin. D}} = \frac{m\sqrt{1-\frac{d^2}{r^2}}}{57° \text{ sin. D}}$.

2972. La même formule qui a servi à trouver la demi-durée, servira pour trouver l'inclinaison ou pour trouver la distance au nœud, par le moyen de la demi-durée observée; car cette demi-durée étant divisée par r, donne le sinus de l'angle ACD, et le cosinus de cet angle, divisé par u, donne la valeur de sin. I. sin. D: si donc on divise cette derniere quantité par sin. I, l'inclinaison étant supposée connue, l'on aura sin. D; mais si l'on divise par sin. D, le lieu du nœud étant donné, l'on trouvera sin. I. (*Voyez* aussi 2978.)

2973. Dans les regles précédentes, j'ai supposé que l'orbite AD étoit une ligne droite au lieu d'être un arc de cercle; cette suppo-

sition ne peut produire d'erreur sensible, si ce n'est peut-être dans le premier satellite. Pour connoître à quoi elle peut aller, du moins dans le cas le plus simple, soit N le nœud du premier satellite, CB = CD = 9° 35′ 37″, c'est le demi-diametre de l'ombre; AD l'arc décrit dans l'ombre lorsque AD est parallele à CB, le satellite étant à 90° des nœuds, cet arc est de 9° 0′ 18″, comme on le trouve en convertissant en degrés la plus petite demi-durée, qui est 1h 3′ 45″. Or, dans le triangle sphérique ACD, on trouve AC de 3° 19′ 22″, tandis que le triangle rectiligne donne 3° 18′ 38″; cette différence d'inclinaison ne répond qu'à 2″ pour la demi-durée, quantité insensible dans l'observation.

2974. Au moyen de la formule (2971), on peut trouver le temps où les éclipses du 4e satellite doivent cesser d'avoir lieu, c'est-à-dire la distance où il faut que Jupiter soit par rapport au nœud du satellite, pour que la latitude soit égale au demi-diametre de l'ombre; il faut faire AC = CH ou CB; car alors l'orbite AD passant au sommet H de la section de l'ombre, le satellite n'y entrera qu'à moitié, et ne sera pas éclipsé; on aura donc $u.$ sin. I. sin. D = 1, ou sin. D $= \frac{1}{u \text{ sin. I}}$. Les observations ont fait connoître que D est à-peu-près 53° 38′, du moins en supposant le nœud bien connu. Pour trouver l'inclinaison quand la quantité D est donnée ainsi par observation, l'on a sin. I $= \frac{1}{u \text{ sin. D}}$, ce qui donne l'inclinaison I = 2° 39′ 4″ (art. 2979, 3003).

2975. La demi-durée d'une éclipse calculée par les regles précédentes est une demi-durée moyenne, qui doit varier, sur-tout pour le second satellite, par l'attraction du premier, suivant les calculs de M. Bailly (*Mém.* 1766) : la différence peut aller à 51″; mais cette quantité dépend d'une hypothese sur les masses, qui sont encore peu connues (3039). Il y a aussi une équation des demi-durées du 4e satellite, qui va jusqu'à 1′ 44″, suivant M. Bailly.

Effet de l'aplatissement de Jupiter sur les éclipses.

2976. Le disque de Jupiter n'est pas exactement rond; l'axe de sa rotation est au diametre de son équateur comme 13 est à 14 (3345), ou comme 15 à 16, suivant M. de la Place. Je fis remarquer, en 1763, que tous les calculs faits jusqu'alors sur les durées des éclipses, en supposant circulaire la section de l'ombre, exigeoient une correction à raison de l'aplatissement de Jupiter, du moins pour en déduire la véritable inclinaison de l'orbite (*Mém. de l'acad.* 1763).

Soit FL (FIG. 252) le diametre de l'ombre d'occident en orient, tel que l'observation le donne (2958), FMLK la section circulaire de l'ombre, que nous avons considérée jusqu'ici, FDLE une ellipse dont le petit axe ED soit $\frac{13}{14}$ du grand axe; c'est la figure que doit avoir la section de l'ombre de Jupiter, parceque le cône d'ombre étant coupé fort près de Jupiter, sa section ne differe pas sensiblement de celle de Jupiter: cette figure de l'ombre ne change pas par le mouvement de Jupiter, parceque son équateur differe à peine du plan de son orbite (3346).

2977. La ligne ABG, parallele à CF, est supposée la trace d'un satellite dans l'ombre, lorsqu'il est dans ses limites, et que les durées des éclipses sont les moindres; l'ordonnée AB, déterminée par la demi-durée de l'éclipse, est donnée par observation. Quand on suppose l'ombre circulaire, on emploie une ligne HI parallele et égale à AB, $CH = \sqrt{rr - dd}$ (2968); mais CA : CH :: CD : CM (3387) :: 13 : 14; donc $AC = \frac{13}{14}\sqrt{rr - dd}$. Dans le temps où la demi-durée AB est la plus petite de toutes, on a $CA = t$ sin. I, quelle que soit la figure de l'ombre, et dans les autres cas on a $AC = t$ sin. D sin. I (2968), l'angle I étant la véritable inclinaison; donc $\text{sin. I} = \frac{\frac{13}{14}\sqrt{rr-dd}}{t\,\text{sin. D}}$. L'on trouve donc l'inclinaison plus petite d'un quatorzieme, en employant la section elliptique.

2978. Ainsi, quand on a observé une demi-durée qui est assez éloignée du nœud, on peut trouver l'inclinaison de l'orbite, en supposant le lieu du nœud connu; car ayant, par observation, la valeur de $AC = \frac{13}{14}\sqrt{rr - dd}$, on la divisera par t sin. D, si l'on veut avoir sin. I, ou par t sin. I, si l'on veut avoir sin. D.

EXEMPLE. La demi-durée du 3e satellite ayant été observée de 42′ à 90° du nœud, on demande l'inclinaison qui en résulte dans l'ellipse.

Logarithme de la demi-durée, $42' 0'' = d$	3,401401
Logarithme du demi-diam. de l'ombre, $1^h 47' 0'' = r$	3,807535
Différence, ou log. sin. de 23° 6′ 42″	9,593866
Log. cos. ou $\sqrt{rr - dd}$	9,963666
Ajoutant celui de $\frac{13}{14}$	9,967815
On aura le logarithme de AC, ou $\frac{13}{14}\sqrt{rr - d^2}$ . .	9,931481
Otant le logarithme de u, ou $\frac{t}{r}$ (2971). . . .	1,186099
Il reste celui de sin. I sin. D	8,745382

Il auroit fallu en ôter aussi le logar. sinus de D, mais dans ce cas il est égal à zéro, puisque D = 90°, la demi-durée de 42′ étant supposée la plus petite de toutes; ainsi ayant cherché le logarithme de sin. I sin. D parmi ceux des sinus, on aura 3° 11′ 22″ pour l'inclinaison, en employant la section elliptique. Si de ce même logarithme l'on ôtoit le log. sinus de l'inclinaison supposée connue, l'on trouveroit celui de sin. D, ou de la distance de Jupiter au nœud; et connoissant d'ailleurs le lieu de Jupiter, il seroit aisé d'en conclure le lieu du nœud.

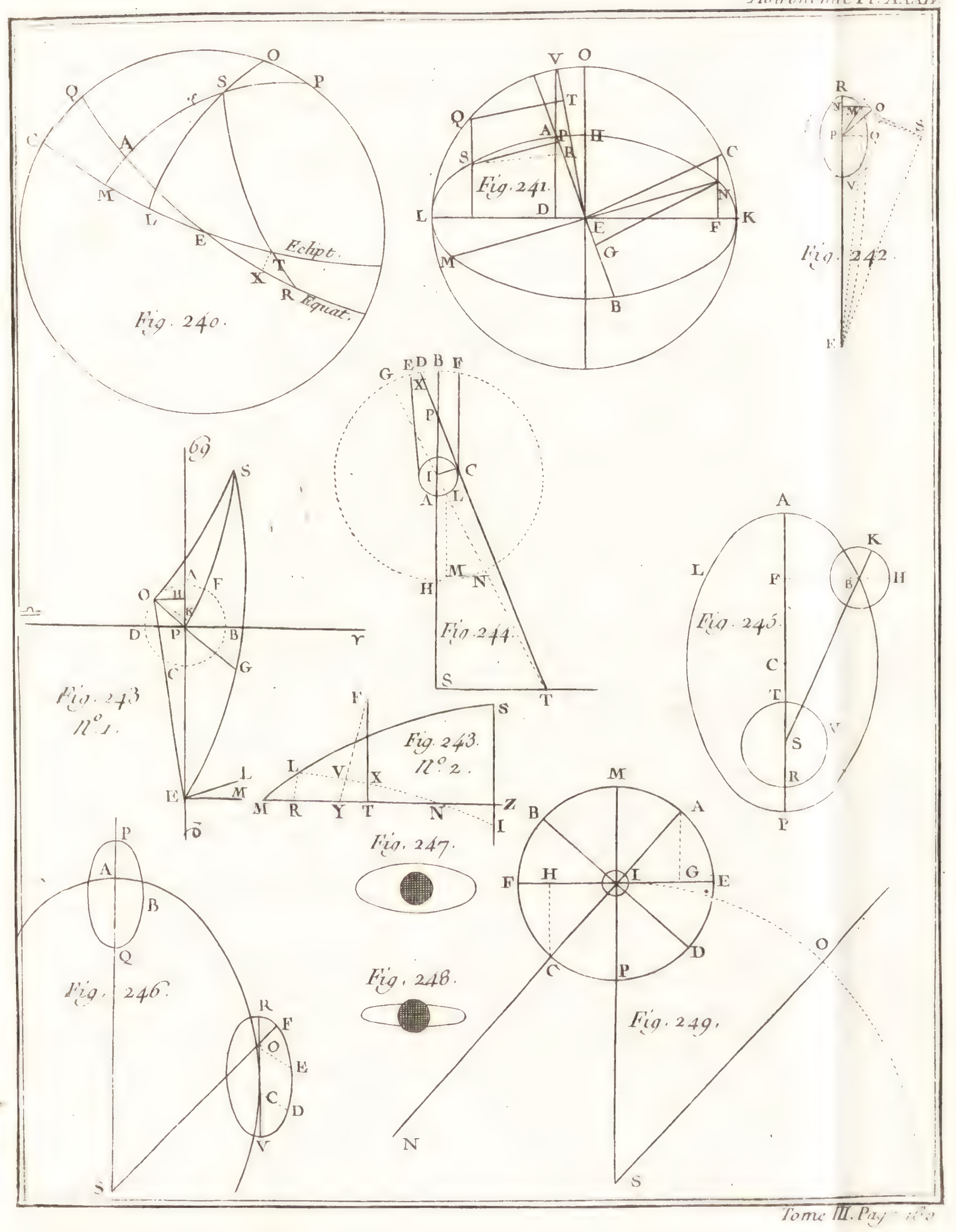
2979. Pour avoir l'inclinaison du 4e satellite, supposons d'abord, avec Wargentin, que les éclipses finissent quand Jupiter est à 53° 38′ des nœuds; il faudra que CA, ou $t \cdot$ sin. I $\cdot$ sin. D soit égal à CD $= \frac{13}{14}$; or, ajoutant le logarithme de t, c'est-à-dire 1,428954, avec celui du sinus de 53° 38′ = D, et les retranchant de celui de $\frac{13}{14}$, on a sin. I, ou le sinus de 2° 27′ 42″; c'est l'inclinaison véritable de cette orbite, au lieu de 2° 39′ 4″ que l'on auroit trouvés dans l'hypothese circulaire (2974). *Voyez* l'art. 3003.

2980. Les inclinaisons déduites de ces deux hypotheses sont à très peu près dans le rapport de 13 à 14; ainsi il est aisé de conclure l'une de l'autre. On verra dans la table des élémens (3025) que la différence est de 16′ 18″ pour le second satellite, et cela est important dans les calculs de la réduction et du mouvement des nœuds, qui dépendent de la véritable inclinaison. Cependant il n'en résulte pas de différence dans la table des demi-durées des éclipses; c'est pourquoi j'avois conservé dans les tables les inclinaisons données par Wargentin ou Maraldi, qui supposent l'ombre circulaire.

2981. Lorsque l'inclinaison est donnée aussi bien que la distance au nœud, on peut trouver aisément la demi-durée d'une éclipse, puisque, par la propriété de l'ellipse (3385), CD est à CF, ou 13 est à 14, comme $\sqrt{AD . AE}$ est à la demi-durée AB; on cherche d'abord AC = t sin. I. sin. D (2970); on connoît aussi CD $= \frac{13}{14} r$; on en prend la somme et la différence, et l'on a AD et AE en temps : or DC : CF :: $\sqrt{AD . AE}$: AB (3385) :: 13 : 14; ainsi la demi-somme des logarithmes de AD et AE, en y ajoutant le logarithme de $\frac{14}{13}$, donne la demi-durée AB dans la section elliptique.

Exemple. Soit l'inclinaison du 3e = 3° 11′ 22″ calculée dans l'ellipse (2978), la distance au nœud 90°, le demi-petit axe CD $= \frac{13}{14} r = 5961''4$ de temps.

Log.


Fig. 240.
Eclipt.
Equat.
Fig. 241.
Fig. 242.
Fig. 243 N°. 1.
Fig. 243. N°. 2.
Fig. 244.
Fig. 245.
Fig. 246.
Fig. 247.
Fig. 248.
Fig. 249.

Log. du temps pour 57°.		4,993634
Log. sin. I dans l'ellipse.		8,745383
Log. sin. dist. au nœud		0,000000
Log. AC 5483		3,739017
CD	5961,4	
AC	5483,0	
Somme AE	11444,4 logarit.	4,058593
Différence AD	478,4	2,679791
Somme des logarithmes, ou log. AD . AE		6,738384
Moitié, ou log. $\sqrt{AD . AE}$		3,369192
Logar. de $\frac{14}{13}$.		0,032185
Demi-durée AB 42′ 0″		3,401377

Cette demi-durée dans l'ellipse est en effet celle qui nous a fait trouver ci-dessus l'inclinaison de 3° 11′ 22″.

Des Inclinaisons observées dans les quatre Satellites.

2982. En observant ainsi les durées des éclipses, on a déterminé les inclinaisons des quatre satellites : Cassini remarqua, en 1676, que les configurations des satellites servoient à connoître leurs inclinaisons et leurs nœuds, et il établissoit alors ces nœuds vers 10ˢ 13°; au lieu que Galilée les avoit crus toujours d'accord avec ceux de Jupiter vers 9ˢ 6°. Cassini trouvoit l'obliquité de leurs cercles à l'orbite de Jupiter, ou l'angle d'inclinaison presque double de l'obliquité de cette orbite à l'écliptique; au lieu que Galilée l'avoit supposée égale, et croyoit que les plans de ces cercles étoient toujours paralleles à l'écliptique. Enfin, il retractoit ce qu'il avoit dit à la fin de ses premieres tables sur le mouvement des nœuds des satellites, pour concilier les observations de Galilée avec les siennes, et assuroit que l'obliquité de leurs cercles étoit constante (*Journ. des Sav.*, 14 sept. 1676). En 1693, Cassini estimoit que les inclinaisons étoient toutes de 2° 55′; mais après un plus grand nombre d'observations, on y a trouvé des différences sensibles. L'inclinaison du premier satellite est, suivant les tables de Wargentin, de 3° 18′ 38″, calculée dans le cercle (2973); on la suppose constante, parceque ses variations sont peu considérables.

2983. Le second satellite a un changement d'inclinaison dont la

période est de 30 ans, mais qu'on a eu beaucoup de peine à démêler; les demi-durées de ses éclipses observées dans les limites varient depuis 1^h 7′ jusqu'à 1^h 16′ environ, comme le remarqua Maraldi (*Mém. acad.* 1729). En 1768 il détermina le demi-diametre de l'ombre, ou la plus grande demi-durée des éclipses de 1^h 25′ 45″, par les observations des années 1688, 1689, 1707, 1712, 1718, 1724, 1730, 1736, 1742, 1748, 1754, 1760 et 1766. Il trouva la plus petite inclinaison de son orbite de 2° 48′ 0″ pour le commencement des années 1672, 1702, 1732 et 1762, c'est-à-dire avec une période de 30 ans. Il employa à cette recherche les observations faites dans les années 1673, 1702, 1703, 1732, 1733, 1762 et 1763; le milieu entre 14 déterminations est de 2° 47′ 56″, ou 2° 48′ 53″, en employant la correction (2975). Cette inclinaison, la plus petite qui ait lieu pour le second satellite, n'étoit, suivant les premieres tables de Wargentin, que de 2° 29′; mais il l'a faite ensuite de 2° 46′: elle est de 2° 48′ suivant Maraldi (*Mém.* 1768, *p.* 298).

2984. La plus grande inclinaison étoit, suivant Maraldi, de 3° 48′ 0″ au commencement des années 1687, 1717, 1747 et 1772; il a tiré cette détermination des observations de 1685, 1686, 1715, 1716, 1745 et 1746; il trouvoit 3° 44′ 43″; mais dans ces années-là l'inclinaison n'étoit pas encore la plus grande; suivant son hypothese elle ne devoit l'être qu'un an ou deux après: mais alors Jupiter étant trop près des nœuds, il n'auroit pas été sûr de déterminer l'inclinaison par la demi-durée des éclipses. Maraldi adopta donc l'inclinaison de 3° 48′, d'autant plus volontiers que par là l'inclinaison de l'orbite du premier satellite, sur laquelle se fait le mouvement des nœuds du second satellite, et qui est de 3° 18′, tient un milieu exact entre la plus grande et la plus petite inclinaison du second, ce qui rend le calcul de la variation annuelle de l'inclinaison du second et de la libration de ses nœuds (3013) plus simple et plus facile.

Les demi-durées des éclipses du second satellite, que Maraldi a conclues des élémens précédens, combinées avec la libration du nœud, s'accordent très bien avec celles qu'il a conclues des observations; de 122 éclipses il n'en trouva que 12 où l'erreur fût de plus d'une minute, et elle ne passoit qu'une seule fois 1′ 43″ (*Mém.* 1768, *pag.* 305). Suivant Wargentin, l'inclinaison dans le cercle varie depuis 2° 46′ jusqu'à 3° 46′, ou depuis 2° 48′ à 3° 48′ (3025).

2985. La durée observée le 10 août 1786 par M. Mechain donneroit une inclinaison plus petite de 2 à 3′; mais dans l'émersion,

le satellite étoit trop près de Jupiter, et on n'a pu le voir que lorsqu'il avoit déja repris beaucoup de sa lumiere.

2986. Pour expliquer la cause de cette variation singuliere de l'inclinaison, je suis obligé de dire quelque chose du mouvement des nœuds, dont il sera bientôt question plus en détail (3011). Dans un mémoire présenté à l'académie le 27 avril 1765, Maraldi annonça des variations qu'il avoit remarquées dans le nœud du second satellite; il avoit déterminé directement l'inclinaison, par une observation du 17 septembre 1715, de 3° 44′ 53″; d'après cette inclinaison, il trouva, par une autre observation du 18 octobre 1714, que le nœud devoit être à 10ˢ 21° 21′ 45″; mais en 1751, après avoir déterminé l'inclinaison de 3° 44′ 30″ par une observation du 9 janvier, il trouva, par celle du 11 septembre 1751, que le nœud devoit être à 10ˢ 0° 54′ 9″; la différence produit 20° 27′ 36″, ce qui dénotoit une libration ou un changement en plus et en moins de 10° 13′ 48″; le lieu moyen du nœud se trouvoit par là 10ˢ 11° 8′, au lieu que Wargentin le plaçoit à 10ˢ 12° 15′.

Pour attribuer au changement d'inclinaison la différence des durées observées, et supposer que le nœud fût fixe, il auroit fallu supposer sur l'angle d'inclinaison une augmentation de 20′ en onze mois de 1714 à 1715, et ensuite une diminution de 18′ $\frac{1}{3}$. Tel étoit le phénomene observé; il étoit une suite nécessaire de la théorie que j'avois déja donnée à ce sujet.

2987. En effet, j'avois montré que les nœuds des satellites devoient avoir un mouvement tantôt direct et tantôt rétrograde, et qu'il en résultoit une variation dans leurs inclinaisons sur l'orbite de Jupiter (*Mém. de l'acad.* 1762, *pag.* 233; Histoire, *pag.* 133); et c'est la premiere idée qui ait été donnée de la cause d'un phénomene si singulier : en même temps j'avois promis de discuter dans un autre mémoire ces changemens d'inclinaison. J'avois parlé des inégalités de l'inclinaison du troisieme satellite à la page 1131 de la premiere édition de cette Astronomie, en disant qu'il faudroit recourir au mouvement des nœuds pour les expliquer; enfin j'avois démontré de semblables variations dans les inclinaisons et dans les nœuds des planetes aux pages 507 et 519 : ainsi la cause de ces inégalités étoit indiquée dès 1762; M. Bernoulli en rendoit ce témoignage en 1771 (*Recueil pour les astronomes*, *Tom. I*, *pag.* 100).

2988. En conséquence, M. Bailly, à qui Maraldi avoit communiqué son observation sur le changement du nœud, proposa, en 1765, d'expliquer le changement d'inclinaison et la libration du nœud du 2ᵉ satellite sur l'orbite de Jupiter, en supposant que le

nœud du 2ᵉ sur l'orbite du 1ᵉʳ, ou sur celle du 3ᵉ, eût un mouvement périodique d'environ trente ans; c'est ainsi que j'avois expliqué le changement d'inclinaison des planetes (1377). Soit BC (FIG. 76) l'orbite de Jupiter, BA l'orbite du satellite troublant, supposée fixe, CA celle du satellite troublé; l'angle A, qui est l'inclinaison mutuelle de deux orbites, étant supposé constant, de même que l'orbite BA, l'orbite troublée CA est transportée contre l'ordre des signes; le nœud A, rétrogradant, change de situation; et le nœud C, que nous observons sur l'orbite de Jupiter, changera, de même que l'inclinaison C, dont nous observons les variations. Tang. BC = $\frac{\text{sin. AC tang. A}}{\text{cos. AC cos. C tang. A} + \text{sin. C}}$ (3956); ainsi la valeur de BC, ou la libration du nœud, ne sera que de quelques degrés, quoique AC prenne toutes les valeurs possibles par le mouvement du nœud A; parceque tangente A, qui est fort petite, est au numérateur, tandis qu'au dénominateur il y a la somme de tang. A et de sinus C, qui est même plus grand que A; ainsi cela ne produira jamais qu'une fraction pour tang. BC.

2989. Pour considérer toutes les variations qui doivent arriver dans le nœud et dans l'inclinaison C du satellite troublé sur l'orbite de Jupiter, nous partirons du cas où le nœud ascendant A du satellite troublé sur le satellite troublant, et le nœud C du satellite troublé sur l'orbite de Jupiter, sont dans le nœud ascendant B du satellite troublant; l'inclinaison C est alors la plus grande, elle est la somme de l'inclinaison B et de l'inclinaison mutuelle A des deux orbites des satellites.

Dans le premier quart du mouvement du nœud A vers l'occident ou vers la droite, le nœud C est à l'occident de B, et il rétrograde jusqu'à ce que AC soit de 90°; l'inclinaison C va en diminuant.

Dans le second quart le nœud C se rapprochera de B, il sera moins avancé, mais direct; l'inclinaison C continuera de diminuer jusqu'à ce que le nœud mutuel A des deux satellites concoure avec le nœud descendant du satellite troublant; l'inclinaison C sera alors égale à la différence de l'inclinaison B et de l'inclinaison A, et la libration BC du nœud sera nulle comme au commencement de la révolution.

Dans le troisieme quart le nœud C du satellite troublé passe à l'orient de B, et continue d'être direct jusqu'à ce que AC soit de 90°, et l'inclinaison C va en augmentant.

Dans le quatrieme quart, le nœud C devient rétrograde, il se rapproche du nœud B; la libration diminue, et l'inclinaison C

continue d'augmenter jusqu'à ce que le nœud A et le nœud C étant arrivés au point B, d'où nous étions partis, l'inclinaison C du satellite troublé soit de nouveau la plus grande, comme au commencement de la révolution. Les variations de l'inclinaison C sont encore indiquées par l'expression de cet angle, qui est cos. C = cos. AB sin. B sin. A — cos. B cos. A (3946). Cette expression est pour l'angle obtus, dont le supplément est l'inclinaison. La seconde partie de la formule est toujours la plus grande; ainsi le cos. est négatif, ce qui indique un angle obtus : si l'on augmente AB, l'angle C diminue, jusqu'à ce que AB soit de 180°.

2990. C'est ainsi que le nœud et l'inclinaison C du second satellite reviendront les mêmes au bout de trente ans, si le nœud A rétrograde de 12° par an, comme l'indique l'observation, puisqu'on trouve que le nœud du second satellite sur l'orbite de Jupiter est sensiblement au même point tous les 30 ans, et que l'inclinaison reparoît la même.

2991. J'ai dit que la libration BC est la plus grande lorsque AC = 90° ou 270°; en effet, sin. AC : sin. BC :: sin. B : sin. A, ou dans un rapport constant; donc BC doit augmenter quand AC augmente, et qu'il est aigu, et diminuer quand AC augmente, et qu'il est obtus; donc BC est à son *maximum* quand AC = 90°; il est de $3°\frac{2}{3}$, suivant l'hypothese adoptée dans les tables de 1771.

2992. Il est très rare d'avoir immédiatement, et par observation, la durée des éclipses du 2ᵉ satellite; en 1771 on ne comptoit encore que neuf observations completes de l'immersion et de l'émersion; cela devroit arriver tous les 12 ans, plusieurs fois de suite, quand les quadratures de Jupiter arrivent vers 1ˢ 12° de longitude, qui est une des limites, comme en 1751, 1763, 1774, 1787, 1798, etc.; mais les mauvais temps nous empêchent souvent de faire ces observations importantes. Dans les quadratures qui arrivent vers l'autre limite, comme dans les années 1745, 1757, 1769, 1780, 1792, Jupiter n'étant qu'à 23° de son aphélie, la parallaxe annuelle est trop petite, et l'on ne peut voir les deux phases, à moins que ce ne soit dans les plus grandes inclinaisons, comme le 23 juin 1780, où M. Cassini, M. de Bonrepos et M. Méchain ont observé une immersion à $9^h\ 21'\frac{1}{2}$, cinq minutes après que le satellite étoit sorti de dessous le disque de Jupiter, quoique la parallaxe ne fût que de 10° 25'; mais l'inclinaison étoit de 3° 42'. En 1792, l'inclinaison ne era que de 2° 47'; il faudra, pour voir les deux phases, qu'il y ait au moins 10° 40' de parallaxe, et cela n'aura lieu qu'entre le 6 et le 26 juillet, en sorte qu'il n'est pas probable qu'on en observe; mais

en 1798, l'inclinaison sera de 3° 7′, et on les verra depuis le 12 juillet jusqu'au 17 septembre. Comme ces observations sont essentielles, je vais expliquer ici la méthode qui peut servir à les prédire; je l'ai donnée ailleurs d'une maniere plus étendue (*Mém. de* 1765).

2993. Pour calculer les temps où l'on peut voir les immersions et les émersions du 2ᵉ satellite, il faut d'abord trouver quelle est la portion de la section de l'ombre que l'on voit de la Terre; l'arc EF (FIG. 244, art. 2923) est la section de l'ombre; si la Terre est en T, le bord de Jupiter répond en D, et la portion ED de l'ombre est cachée par le disque de Jupiter; le centre de Jupiter se rapporte pour nous en G; BG est la parallaxe annuelle (1140).

2994. Soit BI (FIG. 253) une portion de l'orbite du satellite égale à la parallaxe annuelle exprimée en degrés et minutes; on peut la prendre dans le *Nautical Almanac*, où sont les longitudes géocentrique et héliocentrique. Soit NHF la section de l'ombre, dont le rayon peut s'exprimer aussi en minutes, NKL le disque de Jupiter, exprimé de la même maniere, afin que tout soit pareil, c'est-à-dire tel qu'il paroîtroit si nous étions au centre de Jupiter, et que son disque fût représenté dans l'orbite du satellite; HN la portion de l'orbite du satellite parcouru dans l'ombre. Connoissant les trois côtés du triangle BNI, on cherchera la perpendiculaire NM, qu'on peut supposer = BA, parceque l'orbite AN du satellite est presque parallele à celle de Jupiter, sur-tout quand il est près des limites; la valeur de BA = sin. I · sin. D (2968) fera connoître la distance de Jupiter au nœud, d'où l'on conclura le temps où le satellite passera en N, et où l'on commencera de voir l'émersion, et par conséquent les deux phases. Lorsque le satellite passera un peu plus bas, l'on ne verra point l'émersion N, parceque le satellite ne sortira de l'ombre qu'après être entré sous le disque de Jupiter.

Pour plus d'exactitude, on peut employer aussi la différence de latitude entre Jupiter et la section de l'ombre, qui vient de la latitude de la Terre par rapport à l'orbite de Jupiter; parceque la Terre n'étant pas dans le plan de l'orbite de Jupiter, notre rayon visuel nous fait rapporter Jupiter plus ou moins haut que la section de l'ombre. Cette latitude est à-peu-près égale à la septieme partie de l'équation de l'orbite solaire, du moins vers le temps où Jupiter est en quadrature (*Mém. acad.* 1765). En effet, la plus grande latitude de la Terre, vue de Jupiter, qui est alors à la même distance du Soleil que de la Terre, puisque c'est toujours vers les quadratures, est cinq fois plus petite que l'inclinaison de Jupiter, 79′, c'est-à-dire qu'elle ne va dans les limites qu'à 15′, qui est à-peu-près la septieme

partie de 1° 56′, équation du Soleil : cette latitude décroît comme le sinus de la distance de la Terre au nœud de Jupiter, ou à 3ˢ 8°; de même que l'équation du Soleil est à-peu-près proportionnelle au sinus de la distance à son aphélie, qui est aussi à 3ˢ 8°; ainsi la latitude de la Terre, vue de Jupiter, conserve le même rapport avec l'équation de l'orbite solaire.

2995. Si BI est dans l'orbite de Jupiter, le centre de l'ombre doit nous paroître plus méridional que Jupiter, dans les six premiers mois de l'année, d'une quantité BC qui ne va qu'à 15′, ou à la 7ᵉ partie de l'équation du Soleil, en supposant que BI soit la parallaxe annuelle exprimée en minutes. Ces 15′ font le même effet qu'un changement de 8′ dans l'inclinaison ou dans la parallaxe, et peuvent changer de 10 à 12 jours le temps où l'on peut voir les deux phases. Connoissant BI et BC, on cherche BIC et le côté IC. Dans le triangle CNI on connoît CN, qui est toujours le demi-diametre de l'ombre, parceque son centre est rapporté en C; on connoît également les deux autres côtés IC et IN; l'on trouvera l'angle NIC; l'on aura par conséquent NIB, et la hauteur NM de l'intersection N. Cette hauteur doit être plus grande que sin. I · sin. D, qui est la latitude du satellite, sans quoi l'on ne pourroit voir les deux phases. Si l'on veut avoir cette latitude du satellite plus exactement encore, il ne faut pas prendre la simple distance D de Jupiter au nœud corrigé, mais y ajouter ou en ôter l'arc AN de l'orbite du satellite, qui est de 5° environ, l'on aura la distance du satellite au nœud; ainsi l'on connoîtra sin. I · sin. D, et l'on verra si, dans le jour proposé, la hauteur MN du satellite est assez grande pour qu'il paroisse au-dessus de l'intersection N du disque de Jupiter et de la section de l'ombre.

2996. On peut représenter sur une grande figure, avec une précision suffisante pour la pratique, les cas où le second satellite peut paroître dans l'immersion et l'émersion. Le cercle OB (FIG. 254), qui représente l'ombre de Jupiter, doit avoir 362′ de rayon, ou 6° 2′ (2959). On pourroit croire que, pour plus d'exactitude, il faut la multiplier par cos. P, parcequ'étant vue obliquement (1812), elle paroît plus petite; cela pourroit faire 6 à 7′ de diminution : mais excepté le lieu de Jupiter vu de la Terre, tout est réel dans la figure, et indépendant du rayon visuel de la Terre. On porte à l'occident du centre C (si Jupiter passe au méridien le soir) un nombre CF de minutes égal à la parallaxe du grand orbe (3059). Du point F, comme centre, on décrit un autre cercle IK, dont le rayon FI soit 362′ (art. 2959), et qui représente le disque de Jupiter, exprimé en minutes comme tout le reste de la figure, et tel qu'il paroîtroit

vu de Jupiter. Pour tracer sur cette figure l'orbite du second satellite, on prendra CA égal à son inclinaison, qui change depuis 166′ jusqu'à 228′ (2983), et l'on tirera l'orbite AEDG, qui a lieu dans les limites ; s'il y a un intervalle DE entre l'ombre et le disque de Jupiter, on verra l'immersion et l'émersion.

2997. Quand le second satellite, plus près de son nœud, décrira la ligne LMR, ce sera le temps où le bord de Jupiter et celui de l'ombre se confondant au point M, on cessera de voir l'émersion (ou l'immersion, si c'étoit après l'opposition). Pour trouver graphiquement à quelle distance du nœud cela doit arriver, on peut décrire sur CA un quart de cercle APN, que l'on divisera en degrés, en mettant en N 4^s 12° et 10^s 12°, longitudes des nœuds, et en A 1^s 12° et 7^s 12°; alors la ligne ML prolongée marquera au point P, sur la circonférence APN, la longitude héliocentrique de Jupiter pour le temps où les émersions cesseront de paroître, et l'arc PN marquera les quatre distances au nœud, qui, dans chaque révolution de Jupiter, indiquent le commencement et la fin des temps où l'on peut voir les durées entieres de ces éclipses, en supposant la parallaxe annuelle CF.

2998. En faisant ainsi une grande figure d'environ deux pieds, j'ai vu que quand l'inclinaison est la plus grande, il peut y avoir 36′ d'intervalle entre le temps de la sortie du disque et de l'entrée dans l'ombre, si la parallaxe annuelle est de 11° 51′; quand elle n'est que de 10° 23′, si l'inclinaison surpasse 3°, on peut encore voir les deux phases; mais si la parallaxe est plus petite que 9° 10′, on ne peut voir l'immersion et l'émersion, quelque grande que soit l'inclinaison.

Il y aura encore quelques éclipses de plus, où l'on ne verra pas les deux phases, parceque si le satellite, en disparoissant à nos yeux, est confondu avec la lumiere de Jupiter, et si le point E de l'ombre où entre le satellite, ou dont il sort, n'est pas encore assez détaché de Jupiter, le satellite ne sera pas sensible à nos yeux, du moins les observations seront douteuses. M. de Lambre a calculé de petites tables fort commodes pour trouver les mêmes phases; j'espere les publier.

2999. L'INCLINAISON du troisieme satellite a été long-temps un grand objet de difficulté; elle ne parut que de 3° dans le dernier siecle, et elle a paru, en 1763, de près de 3° 26′. Dans l'éclipse du 25 janvier 1763, la demi-durée a été de 43′; d'où Maraldi conclut l'inclinaison de 3° 25′ 41″, en supposant la section circulaire et le demi-diametre de l'ombre 1^h 47′ 10″; il est de 1^h 47′ 0″ dans les tables.

tables. Par une autre observation, il trouvoit 3° 27′ 24″; mais il préféroit la premiere. L'inclinaison se trouvoit plus grande qu'en 1745 de 7′ ½; en 1763 elle cessa d'augmenter, car en 1769 elle n'étoit que de 3° 23′ 33″, et, en 1774, 3° 22′ 33″; si elle eût augmenté jusqu'à 3° 44′, le 3ᵉ satellite se seroit trouvé dans le même cas que le 4ᵉ, qui n'est plus éclipsé lorsque Jupiter est loin des nœuds (Maraldi, *Mém.* 1745).

3000. M. de la Grange, en partant de quelques suppositions sur les masses des satellites, jugeoit que la période de cette augmentation pouvoit être de 195 ans; M. Bailly, en 1766, l'estimoit de 200; Wargentin, en 1768, de 170 ans; il supposoit que la plus petite inclinaison avoit été de 3° 0′ en 1697, et qu'elle seroit la plus grande en 1782. Maraldi a réduit cette période à 132 ans; d'après les observations de 1763, il trouve que l'inclinaison étoit alors de 3° 25′ ⅔, mais qu'elle a dû augmenter encore pendant deux ans, et jusqu'à 3° 25′ 57″ : c'est la plus grande inclinaison, et elle répond aux années 1633 et 1765. La plus petite inclinaison est de 3° 2′, et répond à l'année 1697. Sur ces données et avec les principes de l'art. 2988, il a calculé une table des inclinaisons pour toute la durée de la période, avec la libration du nœud, produite par l'action du premier satellite, qui est la principale cause de ce mouvement : mais parmi le grand nombre d'observations que Maraldi a calculées dans cette hypothese, il y en a plusieurs où la demi-durée s'écarte de 3′ du calcul, ce qui fait qu'il ne regarde point sa période comme certaine (*Mém.* 1769, *pag.* 25). Peut-être faudra-t-il encore la diminuer; cependant Wargentin lui-même en differe peu (*Nautical Almanac* 1771), si ce n'est pour le lieu du nœud, ou la correction du nombre A, qu'il n'a fixée que sur les observations, sans y introduire aucune loi.

Les observations de 1773, 1774, 1775, 1776 et 1777 ont fait voir que la table de Maraldi est suffisamment exacte; ainsi l'on peut supposer avec lui que la plus grande inclinaison du troisieme satellite a été de 3° 26′ en 1763, que la période est de 132 ans, et que l'orbite du 3ᵉ satellite tourne sur celle du premier, supposée inclinée de 3° 14′ sur l'orbite de Jupiter, et de 12′ sur celle du premier (*Mém.* 1779, *pag.* 445): l'inclinaison du premier est pourtant de 3° 18′; mais cela n'empêche pas que cette hypothese ne satisfasse aux demi-durées observées. L'éclipse du 24 janvier 1788, observée à Marseille par M. Bernard, a duré une minute de moins que suivant les tables, ce qui semble indiquer une inclinaison plus petite que par les tables; mais la différence est insensible.

3001. Je vais donc donner un exemple du calcul appliqué à l'année 1773. D'après la période de 132 ans, on a pour le mouvement annuel du nœud 2° 43′ 38″,2, ce qui fait 27° 16′ 22″ entre les observations de 1763 et de 1773. Si l'on suppose donc que AB (FIG. 76) soit une partie de l'orbite du premier satellite de 27° 16′ 22″, l'angle B de 3° 14′, et l'angle A de 12′ (c'est l'angle des orbites du premier et du troisieme satellite), on r soudra le triangle ABC pour trouver l'angle C, inclinaison actuelle du troisieme satellite sur l'orbite de Jupiter. Pour employer les formules ordinaires de la trigonométrie sphérique, on abaisseroit la perpendiculaire BX, et l'on diroit (3930) R : cos. AB : : tang. A : cot. ABX, et sin. ABX : sin. CBX : : cos. A : cos. C; mais les logarithmes du cos. de A et de sin. ABX dans nos tables ordinaires ne varient que de quatre parties pour une minute entiere, et l'on peut avoir une unité d'erreur sur leur diff rence ; dans ces cas on préfere la formule cos. C = cos. B (cos. A — sin. A tang. B cos. AB) (3946). Celle-ci exige à la vérité que l'on cherche huit fois dans les tables, et cela dans trois tables différentes, tandis que la premiere ne demande que sept fois, et cela dans la même table; ainsi l'on préfere la premiere formule quand on ne craint pas une erreur de quelques secondes.

On peut aussi commencer par trouver $\text{tang. BC} = \frac{\text{tang. AB cos. ABX}}{\text{cos. CBX}}$, et ensuite $\text{sin. C} = \frac{\text{sin. AB sin. A}}{\text{sin. BC}}$.

Si l'on fait $\text{tang. } a = \frac{\text{sin.} \frac{1}{2} \text{AB}}{\text{cos.} \frac{1}{2} (\text{A}+\text{B})} \sqrt{\text{sin. A sin. B}}$, l'on aura $\text{sin.} \frac{1}{2} \text{C} = \frac{\text{cos.} \frac{1}{2} (\text{A}+\text{B})}{\text{cos. } a}$ (3970) ; cette derniere méthode est exacte et commode. Enfin on trouvera 3° 24′ 44″ pour l'inclinaison C du troisieme satellite en 1773, ce qui est exactement conforme à la table de Maraldi.

A l'égard de la libration BC du nœud, on a cos. ABX : cos. CBX : : cot. AB : cot. BC (3913), ce qui donnera BC de 1° 32′ 24″; et cela s'accorde avec la table, puisqu'elle marque pour 1773 10ˢ 12° 20′, et que le lieu moyen du nœud est à 10ˢ 13° 52′.

3002. L'inclinaison du 4ᵉ satellite est sensiblement constante ; Bradley l'avoit trouvée de 2° 42′, et Wargentin, en 1750, la supposoit de 2° 39′, et nous la trouvons à-peu-près la même depuis quelques années : Maraldi la fixoit à 2° 36′ (*Mém.* 1750, 1758), toujours dans l'hypothese circulaire.

Wargentin, en 1781, trouvoit, par les observations des cinq dernieres années, un accroissement d'une ou deux minutes, et l'estimoit de 2° 38′ ; il alloit même jusqu'à 2° 40′ après l'éclipse du 30

août 1782, dont l'immersion fut observée à Bude par M. Weiss, et l'émersion à Paris par M. Mechain.

3003. Cette augmentation a été confirmée par d'autres observations : le 7 juin 1782 ce satellite devoit recommencer à être éclipsé pendant 40 minutes, et cependant il ne disparut pas totalement; seulement sa lumiere diminua beaucoup : si l'on prend ce point pour le terme des éclipses, on a la distance au nœud 54°, et l'inclinaison 2° 38'.

Le 30 juin 1782, la durée de l'éclipse fut d'une heure 39'; elle devoit être, par les tables, de 2 heures 7 minutes.

Le 23 août 1785, la durée ne fut que d'une heure 42' ou 43', au lieu de 2 heures 6'; l'erreur avoit été à-peu-près la même le 23 août 1782.

Le 29 octobre 1785, la durée de l'éclipse auroit été de 56', et le satellite ne perdit que la moitié de sa lumiere, suivant M. Mechain; en supposant que ce fût là le terme des éclipses, cette observation, faite à 53° 38' du nœud, donneroit pour l'inclinaison 2° 39' dans le cercle, et 2° 27' 42" dans l'ellipse.

Le 15 novembre 1785, le satellite ne perdit qu'un quart de sa lumiere, suivant M. Mechain, quoiqu'il dût être éclipsé pendant 10', suivant les tables de Wargentin, qui supposent l'inclinaison 2° 36' dans le cercle. Ainsi les dernieres observations paroissent prouver que l'inclinaison du 4e satellite est d'environ 2° 39'.

3004. Au reste il est très difficile de concilier toutes les observations des demi-durées du 4e satellite, même en combinant le changement de l'inclinaison avec le mouvement du nœud, comme l'observoit déja Maraldi en 1750; cependant il en approchoit beaucoup (3015), en supposant l'inclinaison constante de 2° 36', le demi-diametre de l'ombre 2° 8' 2", et le lieu du nœud, en 1745, 4s 16° 11', avec un mouvement progressif de 5' 33" par an (*Mém.* 1750); Wargentin faisoit ce mouvement de 4' 19" par an (3015). Ce mouvement des nœuds du 4e satellite doit produire un changement dans l'inclinaison; M. Bailly pensoit qu'elle pouvoit aller jusqu'à 3° 44', et qu'elle avoit dû être la plus petite en 1720, les nœuds du premier et du 4e s'étant trouvés au même point de l'orbite de Jupiter (*Mém.* 1766).

Mais M. de la Place se propose de faire voir que les nœuds du 4e satellite ont un mouvement rétrograde sur un plan qui passe entre l'équateur de Jupiter et son orbite, et qui est incliné d'environ un demi-degré à l'équateur de Jupiter; le plan de l'orbite du 4e conserve une inclinaison constante d'environ 14 ou 15', avec un mou-

vement rétrograde du nœud d'environ 35′ par an. Ce résultat de la théorie représente parfaitement les observations, et il explique en même temps pourquoi l'inclinaison du 4ᵉ a paru constante, et le mouvement de ses nœuds direct. Ce mouvement est le résultat des attractions du Soleil, et des satellites intérieurs, et de l'aplatissement de Jupiter. C'est à raison de cette inclinaison que le 4ᵉ satellite est élevé au-dessus du cône d'ombre aussitôt que les éclipses arrivent à 53° 38′ des nœuds (2974) : par exemple, depuis le mois d'octobre 1785 jusqu'au mois de janvier 1788, il n'y a point eu d'éclipses du 4ᵉ satellite, et il suffiroit de 2° 8′ pour qu'il fût toujours éclipsé.

3005 Lorsqu'il s'agit des satellites de Saturne, qui ont une grande inclinaison, et dont on ne peut employer les éclipses à cause de leur rareté et de la difficulté de les voir (3071), on détermine l'inclinaison de leurs orbites par l'ouverture des ellipses qu'ils paroissent décrire. On pourroit faire de même pour le 4ᵉ satellite de Jupiter : on voit dans la fig. 247 l'ellipse décrite par le 4ᵉ satellite lorsque Jupiter est à 90° du nœud; si l'on mesure alors la distance apparente du satellite à Jupiter, au nord et au sud, dans ses conjonctions supérieures et inférieures, on aura le petit axe de l'ellipse, et par conséquent l'inclinaison de l'orbite (2967).

Des Nœuds des Satellites.

3006. La durée d'une éclipse, lorsqu'elle est la plus longue, indique à-peu-près le lieu du nœud (2962); par exemple, le 30 avril 1742, Maraldi et Cassini trouverent la durée d'une éclipse du 3ᵉ satellite, la plus longue que l'on eût jamais observée; ce jour-là le lieu de Jupiter, vu du Soleil, étoit à 15° 42′ du Lion; l'on peut donc supposer que c'est dans ce point-là que l'orbite de Jupiter étoit coupée par le plan de l'orbite du 3ᵉ satellite.

3007. Mais la meilleure méthode pour déterminer le lieu du nœud d'un satellite est d'observer deux éclipses d'égale durée, avant ou après les passages de Jupiter par les nœuds opposés du satellite : le 12 mars 1687, Flamsteed observa la durée d'une éclipse du 3ᵉ satellite $2^h\ 33'\ 0''$; la longitude héliocentrique de Jupiter étoit alors $8^s\ 11°\ 58'$: le 6 décembre 1702, la durée fut exactement la même, la longitude héliocentrique de Jupiter étant de $0^s\ 15°\ 21'$; la différence entre cette longitude et la précédente est de $4^s\ 3°\ 23'$, dont la moitié étant ajoutée à la premiere longitude donne le lieu du nœud ascendant du satellite à $10^s\ 13°\ 29'$, en supposant que le nœud et l'inclinaison n'aient pas varié dans l'intervalle de ces

deux observations, ou bien il faudroit tenir compte du changement.

3008. On peut encore déterminer le lieu du nœud d'un satellite sans le secours de ses éclipses ou de ses passages sur le disque de la planete, en faisant les observations suivantes, auxquelles on est obligé d'avoir recours lorsqu'il s'agit des satellites de Saturne. On compare le satellite ou à la ligne des bandes, si c'est Jupiter, ou à la ligne des anses (3369), si c'est Saturne, et l'on examine, soit dans la partie inférieure de l'orbite, soit dans la partie supérieure, à quelle distance le satellite passe de la planete lorsqu'il est sur la même ligne.

Lorsque Saturne passe dans le nœud du satellite vu de la Terre, c'est-à-dire lorsque Saturne est placé de maniere que le plan de l'orbite du Satellite passe par la Terre, et soit dirigé vers notre œil, l'orbite du satellite doit paroître comme une ligne droite inclinée sur l'orbite AB de Saturne (FIG. 255); mais quelques jours avant, l'orbite du satellite paroît une ellipse KICD: cette ellipse est encore ouverte, et coupe la ligne des anses en deux points G et H, l'un au-delà de Saturne vers la conjonction supérieure, l'autre en-deçà et vers la conjonction inférieure du satellite. Ces deux intersections G et H se rapprochent ensuite peu à peu du centre de Saturne, et se confondent au centre de la planete dès que Saturne arrive dans le nœud du satellite vu de la Terre; il n'est donc pas difficile de juger par là de la situation du nœud du satellite de Saturne. Je suppose qu'on ait estimé ou mesuré la distance du satellite au centre de Saturne, et la quantité dont il est au-dessus ou au-dessous de la ligne des anses, quelques jours avant et après ses conjonctions inférieures et supérieures : on aura la situation du satellite dans les points C, D, E, pendant plusieurs jours de suite ; et les rapportant exactement sur un carton, l'on trouvera quel jour le satellite a dû passer en G sur la ligne des anses HG, et à quelle distance il étoit alors du centre S de Saturne. Lorsqu'après une demi-révolution le satellite parcourra IK, l'on observera de même, plusieurs jours de suite, sa situation par rapport à la ligne des anses HSG; on estimera le temps où le satellite a dû se trouver en H sur la ligne des anses, supposé qu'on n'ait pu l'observer exactement dans ce point-là; l'on connoîtra ainsi la distance GH des deux intersections. Si l'on continue ces observations, d'une révolution à l'autre, pendant que les points G et H se rapprocheront peu à peu, on jugera facilement du jour où ces deux intersections ont dû se confondre vues de la Terre; on calculera pour cet instant le lieu de Saturne vu

de la Terre; le point opposé sera le lieu de la Terre vu de Saturne.

3009. Ce seroit le nœud de l'orbite du satellite sur l'écliptique, si la Terre étoit dans le plan de l'écliptique vue de Saturne, ou dans un plan tiré par Saturne parallèlement à l'écliptique; mais il faudroit pour cela que Saturne, vu de la Terre, fût sans latitude ou dans l'écliptique; c'est dans ce cas seulement que la Terre lui paroîtra aussi dans l'écliptique. Il faut donc en conclure le lieu du nœud vu de Saturne, et sur l'orbite de Saturne. Pour cela supposons un observateur au centre de Saturne. Soit OR (FIG. 257) l'orbite de Saturne, ou plutôt l'orbite que le Soleil paroît décrire en 30 ans autour de Saturne; ATNL l'orbite du satellite qui coupe au point N l'orbite de Saturne, en sorte que le point N soit le nœud qu'il s'agit de trouver; soit T le lieu de la Terre qui est dans le plan de l'orbite du satellite au temps de l'observation que nous venons de supposer : la longitude du point T réduite à l'orbite OR de Saturne (c'est-à-dire la longitude du point X marqué par un arc TX perpendiculaire à OR) est à-peu-près opposée à la longitude géocentrique de Saturne, ou plutôt c'est la longitude de la Terre vue de Saturne (1144), et réduite à l'orbite de Saturne; TX est égale à la latitude de la Terre par rapport à l'orbite de Saturne vue du centre de Saturne (1144), égale à celle de Saturne vue de la Terre; NX est la différence entre le lieu X de la Terre et le lieu N du nœud, que l'on cherche; l'angle N est l'inclinaison de l'orbite du satellite, que je suppose connue (3005) : ainsi, par le moyen de TX et de l'angle N, dans le triangle sphérique rectangle TXN, on trouvera NX distance entre le lieu opposé au lieu géocentrique de Saturne et le lieu du nœud N, d'où l'on conclura le lieu du nœud du satellite sur l'orbite de Saturne. Pour tenir compte plus exactement de la latitude de Saturne, on pourroit représenter l'écliptique par un autre cercle, tel que ECTM; mais la Terre étant vue de Saturne en T, le grand cercle ECTM (qui passe par la Terre faisant en C un angle de $2^\circ \frac{1}{2}$, égal à l'inclinaison de l'orbite de Saturne) n'est pas exactement l'orbite de la Terre, et il faudroit la mettre au midi de ce cercle, autant que Saturne est au nord de l'écliptique (3358).

3010. Domin. Cassini supposoit, en 1693, que les nœuds de tous les satellites de Jupiter étoient à $10^s\ 14^\circ \frac{1}{2}$ de longitude; Cassini le fils, en 1740, n'y avoit encore rien changé (*Elém. d'astr.*, *p.* 637). Bradley pensoit, en 1718, qu'ils étoient à $10^s\ 11^\circ \frac{1}{2}$, et il ne faisoit aucune différence entre les nœuds des différens satellites; mais un

plus grand nombre d'observations a montré que les nœuds des quatre satellites ne sont pas au même point du ciel, et que ces nœuds ont des mouvemens différens. On trouvera, dans la table des élémens (3025), les nœuds tels que Wargentin les a supposés, dans ses tables, d'après les demi-durées observées (3007).

3011. Le nœud du premier satellite est à $10^s\ 14^\circ\ 30'$, et les observations n'y font appercevoir aucun mouvement. Cependant l'aplatissement seul de Jupiter devroit produire dans le nœud du premier satellite un mouvement de $104^\circ\ 9'\ 31''$ par an, suivant les calculs de M. Bailly, en supposant le globe de Jupiter homogene (*Mém. acad.* 1766, *pag.* 353). Mais on concilie à cet égard l'observation avec la théorie, en supposant que l'équateur de Jupiter soit sensiblement dans le même plan que l'orbite du premier satellite; car alors le mouvement du nœud provenant de cette cause doit être nul. D'ailleurs, pour le rapporter à l'orbite de Jupiter, il faudroit connoître exactement l'inclinaison de l'équateur de Jupiter, qu'on ne peut observer que bien grossièrement (3346). Cependant M. de la Place est persuadé que la figure de Jupiter influe beaucoup sur les nœuds des satellites, principalement du second; il en a même déduit l'aplatissement de $\frac{1}{16}$ (3345). Il y a aussi un mouvement rétrograde produit par le Soleil, de $33''$ par an; mais on n'en tient pas compte, non plus que de celui de l'aphélie de Jupiter, qui devroit changer la distance entre les apsides et les nœuds, dont on fait usage dans les tables (3016).

3012. Le nœud du second satellite, suivant les premieres tables de Wargentin, étoit constamment à $10^s\ 11^\circ\ 48'$; cependant l'aplatissement de Jupiter devroit aussi occasionner un mouvement du nœud sur l'équateur de Jupiter, mais ce mouvement peut être insensible sur l'orbite de Jupiter. Wargentin, dans ses nouvelles tables, suppose le nœud à $10^s\ 13^\circ\ 45'$ pour 1760, et il admet un mouvement progressif du nœud sur l'orbite de Jupiter de $1^\circ\ 42'$ par siécle, par rapport à l'aphélie de Jupiter; il est représenté dans la table des inclinaisons par une correction du nombre A, qui est nulle en 1770, et — 5, en 1800. J'en expliquerai le fondement (3016).

3013. Il paroît aussi qu'il faut admettre une libration de 8 à 9° dans le nœud du second satellite, en vertu de l'attraction du premier, c'est-à-dire supposer que le nœud du second fasse une révolution en 30 ans sur l'orbite du premier (2988). M. Bailly fait voir que l'action du 4e satellite peut être négligée dans cette recherche, et que le mouvement du nœud du second qui a lieu sur l'orbite du

3ᵉ, peut être considéré comme s'il avoit lieu sur l'orbite du premier, dont l'inclinaison est presque la même, en sorte que de ces deux attractions, jointes à la différence qui vient de l'aplatissement de Jupiter, il résulte un mouvement du nœud de 12° par an, et une libration ou équation analogue au changement de l'inclinaison. Cette libration est de 8° 42′ ½ suivant Maraldi, de 9° 21′ suivant M. Bailly, et de 11° 27′ suivant M. de la Grange. Elle est exprimée dans la table des inclinaisons par la correction que l'on applique au nombre A, quand on cherche les demi-durées, et qui monte à 87 parties, ou 8° 42′. Ce mouvement des nœuds du second satellite sur l'orbite de Jupiter autour du nœud du premier est commun à tous les satellites; leurs nœuds oscillent tous autour des nœuds du premier, tandis que les nœuds du premier oscillent eux-mêmes autour d'un point qu'on peut regarder comme leur lieu moyen (2989). Le lieu moyen du nœud du second satellite est 10ˢ 13° 52′, suivant Maraldi (*Mém. acad.* 1768, *pag.* 305); c'est aussi le lieu du nœud du 3ᵉ satellite pour l'année 1697.

3014. Le nœud moyen du 3ᵉ satellite, suivant Wargentin, est constamment à 10ˢ 14° 24′; cependant le calcul des inégalités qui proviennent de l'aplatissement de Jupiter, donne, suivant M. Bailly, un mouvement annuel de 4° 1′ 32″, en supposant Jupiter homogene, et de 1° 50′ 45″ dans l'hypothese que j'ai expliquée ci-dessus. Maraldi n'admettoit qu'un mouvement progressif d'environ 3′ par an, d'après les observations. Il doit y avoir aussi un balancement analogue au changement de l'inclinaison dont nous avons parlé (3000). Cette libration du nœud est expliquée assez au long d'après l'hypothese adoptée par Maraldi. M. Wargentin, en 1781, pensoit que ce mouvement du nœud du troisieme étoit un peu irrégulier, ou du moins qu'il n'étoit pas assez bien établi.

3015. Le 4ᵉ satellite est celui dans lequel on a le mieux observé jusqu'ici le mouvement du nœud. Bradley avoit cru que, par la théorie de l'attraction, ce mouvement devoit être rétrograde; mais les observations forcerent Wargentin et Maraldi à faire ce mouvement direct; et je fis voir en effet, dès 1762, que l'attraction des autres satellites pouvoit réellement le rendre direct sur l'orbite de Jupiter (*Mém. acad.* 1762), comme cela arrive aux autres satellites (2989), et même aux planetes dans certaines situations de leurs orbites (1348). Suivant Maraldi, le nœud étoit, en 1745, à 4ˢ 16° 11′, et le mouvement est de 5′ 33″ par an (*Mém. acad.* 1758). M. Bailly le trouve de 5′ 15″ (*pag.* 12). La considération de l'aplatissement de Jupiter donnoit aussi à M. Bailly un mouvement du

du nœud (3011). Wargentin suppose dans ses dernieres tables un mouvement de 3′ 18″ par rapport à l'aphélie de Jupiter, ce qui fait 4′ 15″ par rapport aux équinoxes, et la longitude du nœud, en 1760, 10ˢ 16° 39′. On a vu ci-devant (3004) les causes de ce mouvement.

3016. Le nombre A, qui dans les tables exprime l'anomalie moyenne de Jupiter, et sert d'argument à la grande équation (2927), sert aussi d'argument à la table des demi-durées; par exemple, le nœud du 4ᵉ satellite de Jupiter est à 10ˢ 1° ½ de l'aphélie de Jupiter, et quand Jupiter est dans ce nœud, son anomalie moyenne, exprimée en dixiemes de degré, est 3015; ainsi, en augmentant le nombre A de 3015, il indiquera le nœud: il suffira donc de mettre la plus grande demi-durée vis-à-vis de 3015, et ainsi des autres, pour que le nombre A soit l'argument des demi-durées. Voici la maniere dont on peut reconnoître quel lieu du nœud supposent les tables.

Le nombre A, vis-à-vis de la plus grande demi-durée, dans les tables de Wargentin, est de 130° ½ et 301° ½, ou en nomb. 1305, 3015.

Ainsi l'anomalie moyenne de Jupiter est	4ˢ	10°	30′	10ˢ	1°	30′
L'équation pour cette anomalie,	—	4	24	+	4	36
Donc les anom. vraies de Jupiter sont,	4	6	6	10	6	6
Ajoutant l'aphélie en 1760,	6	10	33	6	10	33
On a le lieu vrai du nœud,	10	16	39	4	16	39

Tel est donc le lieu du nœud que Wargentin a supposé pour 1760. Maraldi le trouve de 4ˢ 17° 34′, c'est-à-dire, plus avancé de 55′ (3015). Lorsqu'on veut faire servir la même table pour d'autres années, il faut pour chaque degré ôter 10 du nombre A, avant que de chercher les demi-durées. En effet si, dans la table, le nombre A est de 1305, quand Jupiter est dans le nœud du quatrieme satellite, et que la durée est la plus grande; ce nœud avançant ensuite de 1° par rapport à l'aphélie, Jupiter sera dans le nœud, et la durée la plus grande, quand le nombre A sera réellement de 1315; il faudra donc en ôter 10 pour chercher dans la table cette demi-durée dans le nœud, qui est toujours correspondante à 1305. Ainsi le mouvement du nœud du 4ᵉ satellite étant de 3′ 18″ pour chaque année, par rapport à l'aphélie (4′ 15″ par rapport aux équinoxes), il faut ôter 5 ½ tous les dix ans du nombre A. Si l'on vouloit savoir quelle demi-durée doit répondre dans nos tables à un nombre A donné, il faudroit de ce nombre A donné, qui est l'anomalie moyenne de Jupiter, déduire l'anomalie vraie de Jupiter, sa longitude vraie, et par conséquent sa

distance au nœud du satellite, qui est supposé connu (3015); d'où il seroit aisé, connoissant d'ailleurs l'inclinaison, de conclure la demi-durée (2981).

3017. Les demi-durées qu'on observe depuis quelques années, sont en général plus petites que celles de ces tables, tant dans les nœuds que dans les limites, parcequ'on se sert de lunettes acromatiques, plus fortes que les lunettes de 15 à 18 pieds, dont on se servoit auparavant.

Attractions réciproques des Satellites.

3018. La loi de l'attraction générale qui se vérifie dans toutes les parties de l'astronomie (3528), se reconnoît évidemment dans les inégalités des satellites de Jupiter. On a vu (2936) que l'inégalité la plus sensible du premier satellite se rétablit au bout de 437 jours, suivant la remarque de Bradley; l'action mutuelle des satellites lui parut sur-tout remarquable dans les inégalités du 2e satellite (2938); et M. de la Place l'a vérifiée dans la théorie du 3e (2943).

Les inclinaisons du 2e et du 3e satellite forment une autre preuve bien marquée de l'attraction mutuelle; on a vu le changement singulier et alternatif de leurs inclinaisons (2986, 2999), dont il seroit impossible de rendre raison sans cela.

3019. Quoiqu'on ait supposé fixe le nœud du premier, et qu'on ait employé une inclinaison constante pour le premier et le quatrieme; cependant les observations indiquent assez que cela n'est vrai qu'à-peu-près: toutes les fois qu'on a voulu concilier les demi-durées des éclipses, on a trouvé des incertitudes et des variétés, qui donnent lieu de croire que les nœuds des trois premiers satellites ont un mouvement (3012, 3014), et que l'inclinaison du 4e n'est par constante (*Mém. acad.* 1750, *pag.* 119; et 1761, *pag.* 378).

Le mouvement direct du nœud du 4e satellite est sur-tout une preuve manifeste de l'attraction des trois autres (3015); ce mouvement du nœud seroit rétrograde s'il étoit produit par l'attraction du Soleil (1348): cependant les observations prouvent qu'il est direct actuellement; et cela pouvoit résulter des attractions des autres satellites, comme je l'ai fait voir (*Mém.* 1762, *pag.* 230). Mais M. de la Place fera voir que ce mouvement tient à une théorie plus générale et plus compliquée (3004).

3020. Le 3e satellite a des inégalités considérables, dont la marche irréguliere a fait voir depuis long-temps qu'elles dépendent néces-

sairement des attractions des autres satellites. Maraldi, qui s'occupoit en 1764 de la théorie du 3ᵉ satellite, me fit voir la comparaison qu'il avoit faite de ses tables avec un grand nombre d'observations ; il y avoit un saut de 17′ de degré ou 8″ de temps pour l'erreur des tables, entre le 9 janvier et le 21 juillet 1726, entre le 28 février et le 25 août 1751, et plusieurs autres semblables. Il n'y a que les attractions mutuelles des satellites qui puissent changer aussi considérablement l'erreur des tables dans de si courts intervalles ; le 4ᵉ satellite paroît y devoir entrer (2941). Ce sont ces irrégularités qui ont empêché Maraldi de publier le résultat de son travail : les équations empiriques (2943) étoient destinées à satisfaire à ces irrégularités ; et une partie pouvoit bien venir de l'erreur des observations.

3021. Le 4ᵉ satellite étant le plus éloigné de tous, son attraction ne doit pas altérer beaucoup le mouvement des trois autres ; aussi leurs inégalités dépendent principalement de la position respective de ces trois satellites intérieurs ; il y a cependant inégalité sensible dans le 3ᵉ qui dépend de l'attraction du 4ᵉ (2943).

3022. J'exposai en 1764 les embarras que renfermoit cette théorie dans le comité qui étoit chargé de fixer le sujet du prix de 1766, et je prouvai la nécessité de proposer celui-ci ; c'étoit en effet une des questions les plus curieuses de l'astronomie physique. M. de la Grange, qui remporta le prix, composa sur ce sujet un mémoire important, que j'ai cité plusieurs fois, et qui est imprimé dans le tome IX des pieces couronnées par l'académie. M. Bailly s'en occupa dans le même temps, et parvint à des résultats peu différens.

3023. Depuis ce temps-là M. de la Place s'est occupé de ces recherches, et il a déja annoncé des vérités importantes dans les mémoires de 1784, *pag.* 10. On peut établir, dit-il, comme une regle générale que si le résultat d'une longue suite d'observations précises approche d'un rapport simple, de maniere que la différence soit inappréciable par les observations, et puisse être attribuée aux erreurs dont elles sont susceptibles, ce rapport est probablement celui de la nature : ainsi les observations n'ayant fait appercevoir aucune différence entre les moyens mouvemens de révolutions de la Lune sur elle-même et autour de la Terre, on est fondé à supposer que ces deux mouvemens sont rigoureusement les mêmes. En appliquant cette regle aux mouvemens des trois premiers satellites de Jupiter, nous pouvons en conclure, avec une grande probabilité, que la différence des moyens mouvemens du premier et du second est exactement égale au double de la différence des moyens mouvemens du se-

cond et du troisieme. Cette égalité n'est pas l'effet du hasard; et il est contre toute vraisemblance de supposer que ces trois corps ont été placés primitivement aux distances qu'elle exige; il est donc naturel de penser que leur attraction mutuelle en est la véritable cause.

3024. D'après cette considération, M. de la Place s'est assuré, par la théorie de l'attraction réciproque des trois premiers satellites, que la différence des moyens mouvemens du 1er et du 2e satellite est rigoureusement égale à deux fois la différence des moyens mouvemens du 2e et du 3e : ‡ c'est une condition à laquelle les moyens mouvemens des tables doivent satisfaire. Il n'est point nécessaire que dans l'origine les trois satellites aient été exactement placés aux distances nécessaires; il suffit qu'ils en aient été peu éloignés; et alors leur attraction mutuelle établit entre leurs moyens mouvemens cette égalité rigoureuse. M. de la Place s'est encore assuré, par la même analyse, que la longitude moyenne du 1er moins trois fois celle du 2e plus deux fois celle du 3e = 180°; + c'est une nouvelle condition que les tables doivent remplir exactement, et qui fera que la période de 437 jours, qui ramene leurs inégalités, subsistera constamment. Enfin M. de la Place prouve que l'action mutuelle des satellites ne produit que des inégalités périodiques, et que leurs moyennes distances sont constantes. Cette analyse, aussi neuve qu'intéressante, a ainsi fourni les résultats les plus curieux que l'on pût espérer dans cette partie; et M. de Lambre est occupé actuellement à calculer de nouvelles tables d'après cette théorie et la comparaison d'un grand nombre d'observations. C'est ce qui m'empêche de placer dans cet ouvrage les tables de Wargentin, auxquelles j'avois déja fait diverses corrections; mais je publierai celles de M. de Lambre, comme supplément à cette troisieme édition, aussitôt qu'elles seront terminées.

3025. LA TABLE SUIVANTE contient, en attendant, l'abrégé de toutes les recherches que j'ai données jusqu'ici, l'extrait des dernieres tables de Wargentin, que je publiai en 1771, et le tableau de toute la théorie des quatre satellites. Les conjonctions supposent toutes les équations additives, même l'équation du temps. Les équations particulieres au troisieme satellite sont réunies en une seule, comme on l'avoit d'abord pratiqué; je n'en ai pas rapporté les argumens, qui vont être bientôt changés, comme je l'ai dit (2943), en annonçant les deux équations que la théorie a fournies à M. de la Place, en même-temps que le mouvement des apsides du 3e, qui est de 3° par an, tandis qu'il n'est que de 37′ pour le 4e.

‡ A la page suivante selon Wargentin, la difference du mouv. diurne [illegible] du I et II [illegible] = 3^s^ 12° 6′ 51″,2371. et la difference entre II et III = 1^s^ 21° 3′ 25″,6038. Mais le double de cette derniere differ. = 3^s^ 12° 6′ 51″,207

+ Cette regle appliquée aux longitudes moyennes des satellites I. II et III pour 1700 (page suivante) donne, selon Wargentin 5^s^ 29° 48′ 37″ (c'est − 11′ 23″ que 6^s^ 0° 0′) Les recherches les plus nouvelles de M. de Lambre donnent les moyens mouvemens exactement tels que les Regles de M. de la Place exigent. (V. Tables jointes au Tome I. p. 362 à la fin).

Table de tous les Élémens qui servent à la théorie et au calcul des quatre Satellites de Jupiter, sur lesquels sont fondées les Tables publiées en 1771.

ÉLÉMENS.	I.	II.	III.	IV.
Révolution périodique (2918).	1j 18h 27′ 33″ 476	3j 13h 13′ 41″ 929	7j 3h 42′ 32″ 879	16j 16h 32′ 8″ 491
Révol. synodiques (2917, 3026).	1 18 28 36	3 13 17 54	7 3 59 36	16 18 5 7
La même, réduite en secondes.	152915″9479	307073″ 7489	619175″8675	1447507″0917
Log. de cette révolution en temps.	5, 1844528	5, 4872427	5, 7918140	6, 1606207
Demi-diam. de l'ombre en d. (2959).	9° 35′ 37″	6° 1′ 33″	3° 43′ 58″	2° 8′ 2″
Log. du demi-d. de l'ombre en temps.	3, 610128	3, 710963	3, 807535	3, 933487
r, ou demi-d. de l'omb. en temps (2958).	1h 7′ 55″	1h 25′ 40″	1h 47′ 00″	2h 23′ 0″
Demi-diam. de l'ombre, celui de Jupiter étant 1 (2959).	0, 9941	0, 9967	0, 9857	0, 9913
Demi-durée des écl. à 90° des nœuds lorsque l'incl. est la moindre (2983).	1h 3′ 45″	1h 16′ 5″	1h 3′ 40″	0 0 0
Lorsque l'inclin. est la plus grande.	1 3 45	1 6 49	0 38 22	0 0 0
La plus gr. inclinaison dans le cercle.	3° 18′ 38″	3° 46′ 0″	3° 25′ 57″	2° 36′ 0″
L'inclinaison moyenne.	3 18 38	3 16 0	3 13 58	2 36 0
La plus petite inclinaison.	3 18 38	2 46 0	3 2 0	2 36 0
Dans l'ellipse (2978) { la plus grande.	3 4 27	3 29 42	3 11 14	2 24 51
Dans l'ellipse (2978) { la plus petite	3 4 27	2 34 0	2 49 0	2 24 51
Logarith. de la distance en temps, ou log. du temps pour 57°, = *t* (2968).	4, 3862729	4, 6890628	4, 9936342	5, 3624408
Logarithme de *u* (2971).	0, 7761453	0, 9780995	1, 1860992	1, 4289538
Lieu moy. du nœud en 1760 (3010).	10s 14° 30′	10s 13° 45′	10s 14° 24′	10s 16° 39′
Mouvement annuel du nœud	0	2′ 3″	0	4′ 19″
Distance en demi-diametres de Jupiter suivant Cassini (2919).	5, 67	9, 00	14, 38	25, 30
Suivant Newton	5, 965	9, 494	15, 141	26, 630
Distance en min. dans les moyennes distances de Jupiter (2919)	1′ 51″	2′ 57″	4′ 42″	8′ 16″
Epoque des conjonct. 1760 (3034).	0j 10h 44′ 20″	1j 14h 58′ 56″	2j 5h 41′ 49″	1j 7h 30′ 10″
Nomb. A, ou an. de Jup. a ce moment.	1172	1173	1174	1175
Nombre B, ou distance de Jupiter à la conjonction (2956).	911	914	915	913
La plus grande équation (2927).	0h 39′ 25″	1h 19′ 9″	2h 39′ 35″	6h 13′ 4″
Equation particuliere (2936)	3 30	16 0	9 30	1 0 30
Chang. des conj. en cent années jul.	1j 9h 8′ 53″	0j 10h 15′ 18″	2j 1h 49′ 57″	14j 12h 2′ 47″
Chang. correspondant du nomb. A.	1548	1548	1550	1560
Chang. correspon. du nombre B.	569	568	572	604
Long. moyenne jovicentrique, 1700.	2s 11° 14′ 18″	2s 12° 16′ 3″	5s 12° 41′ 14″	7s 17° 11′ 15″
Mouv. diurne jovicentrique.	6 23 29 20, 3798	3 11 22 29, 14275	1 20 19 3, 5389	0 21 34 16, 0008
Mouvement séculaire (2956)	7 25 31 13	3 23 10 39	1 22 9 19	6 29 50 29

Ces élémens auront besoin d'être encore vérifiés par un grand nombre d'observations ; on en trouvera, pour le premier satellite, dans les *Actes d'Upsal*, année 1742, et dans la *Connoissance des mouvemens célestes*, année 1767 ; pour le second satellite, dans les *Actes d'Upsal*, année 1743, les *Mémoires de l'Académie*, 1768, *pag.* 305, et le *Nautical Almanac* de 1779 ; pour le 3e, dans la *Connoissance des temps*, année 1768, et dans le 4e volume des *nouveaux Mémoires d'Upsal*, qui a paru en 1786 ; pour le 4e, dans

les *Mémoires* de 1750, et dans la *Connoissance des mouvemens célestes de* 1766. Il y a aussi quelques observations à la fin des tables de M. Bailly ; il y en a beaucoup dans les ouvrages que j'ai cités (1399): personne n'en a fait un plus grand nombre que Maraldi, qui, à l'exemple de son oncle (2915), s'étoit, pour ainsi dire, voué à cette partie importante de l'astronomie. Wargentin, astronome de Stokholm, a suivi cet exemple, et, pendant plus de 40 ans, il n'a laissé passer aucune occasion d'observer les satellites et de perfectionner leur théorie. M. Messier et M. Mechain ont fait aussi une quantité immense d'observations de même espece ; mais, jusqu'ici, la différence des lunettes et les inégalités optiques provenant du degré de lumiere des satellites, et qu'on a été obligé de négliger, ont mis dans les observations bien des discordances qu'il faudroit faire disparoître (3044).

De la Construction des Tables des Satellites.

3026. Pour avoir les révolutions des satellites de Jupiter avec une exactitude suffisante, il faut connoître en décimales de secondes la durée d'une révolution. Puisque les conjonctions du premier satellite retardent de $1^j\,9^h\,8'\,53''$ en cent ans, la révolution étant de $1^j\,18^h\,28'\,36''$; il y a $9^h\,19'\,43''$ de différence, qu'il faut ôter de l'intervalle de 100 ans, pour avoir le temps que ce satellite emploie à faire 20637 révolutions completes. Ce nombre de 20637 est facile à trouver, car il suffit de diviser 36525 jours qu'il y a dans un siecle, ou 3155760000″, par $1^j\,18^h\,28'\,36''$, ou 152916″; on trouvera 20637 $\frac{1}{5}$, qui est le nombre de révolutions du premier satellite; mais il y aura un reste; et cela même nous apprend qu'il ne lui faut pas tout-à-fait un siecle pour faire 20637 révolutions. Ayant donc retranché les $9^h\,19'\,43''$, ou 33583″ de l'espace d'un siecle, ou de 3155760000″, on divisera le reste par 20637, et l'on aura la durée de la révolution synodique $1^j\,18^h\,28'\,35''$ 947909, pour le premier satellite, suivant les tables de Wargentin.

Pour le second satellite, il faut retrancher 270156″ du siecle, et diviser par 10276 révolutions ; et l'on a $3^j\,13^h\,17'\,53''$ 74893, révolution du second satellite.

Pour le troisieme, l'on retranchera 439779″; et, divisant par 5096, l'on trouvera $7^j\,3^h\,59'\,35''$ 86754.

Pour le quatrieme, on ôte 194540″ de la durée du siecle, et l'on divise la différence par 2180; le quotient est $16^j\,18^h\,5'\,7''$ 09174, révolution synodique du 4ᵉ satellite, suivant les tables de Wargentin.

Mais ces révolutions seront un peu dérangées, quand on les assujettira aux regles exposées ci-devant (3024).

3027. Si l'on ajoute continuellement pour le premier satellite $1^j\ 18^h\ 28'\ 35''\ 947909$, deux cents et six fois, l'on aura $364^j\ 14^h\ 11'\ 25''\ 269254$, ou le 30 décembre $14^h\ 11'\ 25''$; mais si la premiere conjonction étoit arrivée le 1e janvier à 0^h, la derniere seroit le 31 décembre à 14^h, c'est-à-dire 10^h avant la fin de l'année. C'est ainsi que l'on a toutes les autres conjonctions qui dans les tables répondent aux différens jours du mois, pour le premier satellite, et par lesquelles on passe nécessairement en faisant ces 206 additions.

3028. Si l'on ajoute encore une fois la révolution, l'on aura $366^j\ 8^h\ 40'\ 1''\ 21716$; ce qui prouve qu'au bout d'une année commune les conjonctions retardent de $1^j\ 8^h\ 40'\ 1''$; c'est en effet le nombre qu'on met vis-à-vis d'une année commune. Ayant doublé ce nombre, on trouvera $2^j\ 17^h\ 20'\ 2''$ pour deux années. Mais puisque ce nombre excede une révolution du premier satellite, il n'indiqueroit pas la premiere conjonction de l'année; il faut donc en ôter une révolution, et l'on aura $22^h\ 51'\ 26''$ pour deux ans. Si l'on y ajoute encore $1^j\ 8^h\ 40'\ 1''$, l'on aura $2^j\ 7^h\ 31'\ 27''$ pour trois ans; mais il en faut ôter une révolution qui se trouve toute entiere dans cette somme (car il y a 619 révolutions dans trois ans); et il reste $0^j\ 13^h\ 2'\ 52''$, changement pour trois ans. On ajoutera encore $1^j\ 8^h\ 40'\ 1''$, et l'on aura, pour le retardement des quatre ans, $1^j\ 21^h\ 42'\ 53''$: comme cette 4e année est bissextile, et qu'après le mois de février il faudroit ôter un jour de chaque conjonction, on l'ôte de l'époque; mais on l'ajoute ensuite dans les deux premiers mois des années bissextiles, et il n'y a plus rien à changer aux dix autres mois (1326); il reste donc $0^j\ 21^h\ 42'\ 53''$ pour la quantité dont les époques doivent changer dans les tables tous les quatre ans, en partant d'une année bissextile, ou en commençant par l'année commune qui suit la bissextile.

3029. Ce seroit la même chose, si l'on supposoit la premiere conjonction au 1er janvier de l'année bissextile; elle arriveroit l'année suivante, le 30 décembre, à 14^h; elle retarderoit de 8^h la 3e année, et de 21^h dans la 5e année ou la bissextile suivante. Ainsi la forme des tables où l'on commence à une année commune, et où l'on finit à la 4e qui est bissextile par une conjonction diminuée d'un jour, revient au même que l'explication précédente.

3030. Si l'on ajoute $1^j\ 8^h\ 40'\ 1''$ avec $1^j\ 21^h\ 42'\ 53''$, et qu'on ôte une révolution, l'on aura pour la cinquieme année qui suit l'année bissextile, $1^j\ 11^h\ 54'\ 18''$; mais il faut en ôter un jour, parceque l'année précédente, ayant été bissextile, étoit plus longue d'un jour, ce

qui fait que les conjonctions retardent moins ; on aura donc $0^j\ 11^h\ 54'\ 18''$ pour le changement des conjonctions en cinq ans.

En doublant le nombre qui répond à quatre ans dans les tables, et ôtant une révolution, on a pour huit ans $0^h\ 57'\ 18''$, et ainsi des autres années de 4 en 4.

3031. Par là on peut construire ou prolonger la table des époques des conjonctions moyennes pour chaque année. L'époque du premier satellite pour 1700, est $1^j\ 0^h\ 49'\ 53''$ dans les tables de Wargentin; cela veut dire que la premiere conjonction de cette année est arrivée le 1[er] janvier vers midi. S'il y avoit zéro de jours, ce seroit le 31 décembre précédent : par exemple, en 1775, il y a eu une éclipse le 2 janvier vers midi ; il n'y avoit qu'un jour de passé de l'année 1775; ainsi l'éclipse précédente étoit arrivée le 31 décembre au soir ; voilà pourquoi l'époque de 1775 est $0^j\ 4^h$. A la premiere conjonction de 1700, l'on ajoutera pour quatre ans $0^j\ 21^h\ 42'\ 53''$; on ôtera une révolution ; on trouvera $0^j\ 4^h\ 4'\ 10''$ pour 1704, et ainsi de suite. Les quatre années de la table du changement des conjonctions supposent qu'on parte de la fin d'une année bissextile, et qu'on tombe sur une année bissextile, en passant trois années communes, et diminuant d'un jour la premiere conjonction de la bissextile qui termine les 4 ans. Mais quoique l'année 1700, de laquelle on part dans cet exemple, ait été une année commune, cela ne produit pas un jour de retardement, parceque si l'année 1700 a été plus courte, cela est compensé en ce que l'époque de 1700 n'a pas été diminuée d'un jour comme celles des bissextiles ; ainsi l'on n'a point besoin d'ajouter un jour, quoiqu'on ait commencé par une année commune 1700 (1328).

3032. Si l'on part d'une année bissextile, par exemple, de 1760, à laquelle répond $0^j\ 10^h\ 44'\ 20''$, on y ajoutera, pour 4 années, $0^j\ 21^h\ 42'\ 53''$, et l'on aura, pour 1764, $1^j\ 8^h\ 27'\ 13''$: il n'y a point ici de jour à ôter, puisque l'on part d'une année bissextile où le jour étoit déja retranché.

Ainsi, pour prolonger la table des époques, il faut prendre le nombre ou l'époque d'une année bissextile, y ajouter $1^j\ 8^h\ 40'\ 1''$, ôter une révolution, si elle s'y trouve ; et l'on aura l'époque de l'année commune suivante. Il en est de même pour la seconde et la troisieme ; mais pour la quatrieme année, on ajoutera seulement $0^h\ 40'\ 1''$, parcequ'elle est bissextile, et qu'on diminue les époques d'un jour dans les années bissextiles.

Tout le reste va dans le même ordre ; à chaque fois on retranche une

une révolution quand elle s'y trouve de trop, avec les argumens A, B, C, des équations, qui correspondent à une révolution.

Si l'on prenoit pour époque une année commune, il ne faudroit pas se servir de la table des révolutions pour les années : par exemple, si à la conjonction de 1775, qui est $0^j\ 3^h\ 58'\ 39''$, on ajoutoit, pour cinq ans, $0^j\ 11^h\ 54'\ 18''$, on n'auroit point la conjonction de 1780 ; il faudroit en ôter un jour (après avoir ajouté une révolution), puisqu'il y a deux années de 366 jours, y compris 1780 ; on n'a ôté qu'un jour à la 4e année, et il en faut encore ôter un pour 1780 : on ne seroit pas obligé d'ôter un jour si l'on alloit de 1774 à 1779, parcequ'il n'y a qu'une bissextile dans l'intervalle.

3033. Lorsque de 4 en 4 ans l'on est parvenu à une centieme année, qui, comme l'année 1800, est commune, au lieu d'être bissextile (1547), on ajoute un jour à la somme, ou au changement séculaire des conjonctions (sans rien changer aux argumens A, B, C), parceque l'époque d'une année commune ne doit pas être diminuée d'un jour, comme le suppose le changement des conjonctions qui est dans la table, et qu'on a diminué d'un jour pour 4 ans. Si l'on prenoit un nombre d'années terminé par une bissextile, mais qu'on s'en servît pour un intervalle de temps, dans lequel il y eût une année séculaire commune, comme 1800, il faudroit aussi mettre un jour de plus à l'époque sans changer les argumens. Mais si l'on ôte une révolution, on ôte aussi les argumens correspondans, parceque ce jour d'addition n'est plus une simple notation des tables, lorsqu'il nous transporte à une révolution différente.

3034. Il nous reste à expliquer la maniere de trouver la premiere conjonction pour une certaine année (2954), et d'en conclure toutes les autres : il faut partir d'une observation ; je choisis celle du premier satellite, dont l'émersion fut observée le 2 janvier 1764, parceque c'est la premiere d'une année ; elle fut observée en plusieurs endroits ; le milieu est $10^h\ 23'\ 5''$ du soir, temps vrai réduit au méridien de Paris, ou $10^h\ 27'\ 44''$ de temps moyen. Si l'on veut que l'équation du temps soit toujours additive, il faut ôter $14'\ 42''$ qui est la plus grande équation du temps soustractive ; et l'on aura $10^h\ 13'\ 2''$ pour le temps moyen de l'observation, compté à la maniere des tables de Wargentin.

Il en faut ôter la demi-durée de l'éclipse qui, calculée par les méthodes ci-dessus (2981), étoit $1^h\ 4'\ 51''$, la distance au nœud étant de $60°\ 17'$, le demi-diametre de l'ombre $1^h\ 7'\ 55''$, et l'inclinaison $3°\ 18'\frac{2}{3}$; il reste pour le temps moyen du milieu de l'éclipse $9^h\ 8'\ 11''$; d'où il faut déduire la conjonction moyenne, en y appliquant toutes

les équations qui avoient lieu ce jour-là. L'anomalie moyenne de Jupiter étant alors de $7^s\ 28^\circ \frac{1}{2}$ environ, l'équation de son orbite étoit de $4^\circ\ 51' \frac{1}{2}$ additive; étant convertie en temps à raison du mouvement du premier satellite, elle donne $34'\ 39''$ à ôter du milieu observé; il reste $8^h\ 33'\ 32''$.

3035. La même anomalie de Jupiter nous apprend que la distance de Jupiter au Soleil étoit de 5079, et qu'elle étoit plus petite que la moyenne 5201, de 122; c'est ce que la lumiere parcourt en $59'' \frac{1}{2}$, à raison de $8'\ 8''$ pour 1000 (2835, 2932); ainsi il faut ajouter $59'' \frac{1}{2}$: mais il y a $2'\ 2'' \frac{1}{2}$ à ôter pour la plus grande équation de la lumiere provenant de cette cause-là, afin que l'équation soit toujours additive: ainsi nous ôterons $1'\ 3''$ du milieu observé, et déja dégagé de la seconde inégalité.

La distance de Jupiter à son opposition étoit alors de $\frac{77}{1000}$ du cercle; ainsi la grande équation de la lumiere étoit de $7'\ 0'' \frac{1}{2}$ additive, mais la plus grande est $8'\ 7'' \frac{1}{2}$ qu'il faut ôter de toutes les époques; ainsi il reste $1'\ 8''$ à ôter de l'époque trouvée par observation; on a $3^h\ 21'\ 21''$.

L'équation C particuliere au premier satellite, et qui est de $3'\ 30''$ (2936), avoit été à son maximum le 10 février 1763; elle recommence tous les 437 jours; elle se trouvoit alors de $0'\ 27''$, additive à la conjonction observée pour avoir la moyenne, en observant qu'il faut faire au nombre C une correction dépendante de A (2937); mais il faut ôter les $3'\ 30''$, c'est-à-dire la plus grande équation: il restera donc $3'\ 3''$ à ôter encore de la conjonction observée pour avoir la moyenne comptée à la maniere de nos tables $8^h\ 28'\ 18''$. Il faut faire la même opération sur les petites équations qui viennent des inégalités de Jupiter, et qui montent à $15''$ qu'il faut ôter pour ce jour-là, et $1'$ pour le maximum; ce qui fait $1'\ 15''$ à ôter de l'observation. Enfin l'on ôtera $17''$ pour la différence entre le milieu de l'éclipse et la conjonction (2951). Toutes ces soustractions étant faites, il reste $2^j\ 8^h\ 26'\ 46''$; mais comme dans les années bissextiles on écrit un jour de moins (3028), on aura $1^j\ 8^h\ 26'\ 46''$ pour la premiere conjonction, ou pour l'époque des conjonctions de 1764; elle differe de $27''$ de celle qui est employée effectivement dans les tables, parcequ'elles n'ont pas été faites précisément sur cette observation, et que les erreurs des tables vont encore quelquefois même à une minute de temps. Dans la table des élémens (3025), les époques des quatre satellites ne sont diminuées que de la somme des petites équations; l'équation A reste soustractive dans le premier demi cercle d'anomalie (2954). Toutes ces équations, nécessaires pour réduire une

observation en conjonction moyenne, se prennent dans les tables des satellites, dont jusqu'ici nous avons expliqué la construction : au reste, on n'a plus besoin aujourd'hui d'établir ainsi les époques des conjonctions, mais seulement de les corriger; pour cela on emploie un grand nombre d'observations comparées avec les tables, dont l'erreur moyenne montre ce qu'il faut ajouter aux époques déja calculées.

De la Grosseur des Satellites et de leur Lumiere.

3036. Je ne crois pas que personne puisse voir les satellites de Jupiter à la vue simple, quoiqu'ils paroissent dans nos lunettes avoir à-peu-près autant de lumiere que des étoiles de 6e grandeur vues dans les mêmes lunettes; la lumiere de Jupiter, dont les satellites sont toujours très proches et qui est très vive, empêche qu'on ne puisse les appercevoir, ainsi qu'on ne sauroit voir les étoiles de 6e grandeur dans le temps de la pleine Lune. Il suffit, pour voir les satellites de Jupiter, d'y employer une lunette de deux pieds; mais pour les voir bien distinctement et pour les observer, on est obligé d'y employer des lunettes ordinaires de 18 pieds, ou des lunettes acromatiques équivalentes, ou enfin des télescopes qui aient au moins 2 pieds de foyer; c'est ce qui se pratique généralement pour l'observation de leurs éclipses.

Dans les meilleurs télescopes, les satellites paroissent trop petits pour pouvoir être mesurés avec le micrometre; on a pensé à y employer le temps qu'ils mettent à entrer dans l'ombre de Jupiter; mais le diametre conclu de cette maniere est évidemment trop petit, parceque nous ne pouvons observer le premier moment de l'immersion, et parceque nous perdons de vue le satellite, avant qu'il soit tout-à-fait dans l'ombre. Avant qu'on eût trouvé le moyen d'éviter cette erreur, on s'est servi du temps qu'ils emploient à entrer sur le disque même de Jupiter.

3037. Maraldi ayant examiné et calculé trois observations de Cassini, faites en 1695, trouve que le premier satellite avoit employé $7'$ à entrer sur le disque de Jupiter, et qu'il y avoit demeuré $2^h\ 27'$; que le 2e avoit employé $9'\ 40''$, et avoit demeuré sur le disque $3^h\ 4'\ 20''$; pour le 3e il trouve $12'\ 6''$ et $3^h\ 43'\ 38''$. A l'égard du 4e, Maraldi concluoit des tables qu'il devoit employer $15'$ à entrer, et demeurer $5^h\ 0'$ sur le disque; par là le diametre du troisieme satellite se trouve $\frac{1}{18}$ de celui de Jupiter, et les trois autres $\frac{1}{20}$ (*Mém. acad.* 1734). Ainsi leurs diametres seroient environ la moitié de celui de

la Terre. Whiston a trouvé des résultats fort différens, en employant la durée de leurs immersions, (*The longitude discovered by the Jupiter's planets, London* 1738, *pag.* 7); le 4e lui paroissoit le moindre de tous. Je parlerai ci-après des différences qu'on remarque dans ces grandeurs apparentes (3051); on verra que Cassini regardoit le 4e comme le plus grand des quatre satellites.

3038. Par les observations de *Lynn*, rapportées dans les Transactions Philosophiques (*n°.* 393, 394, 396, 401, 402, 440, depuis 1725 jusqu'à 1736), Whiston trouve que le premier satellite emploie $1' 10''$, le second $2' 20''$, le 3^e $3' 40''$, le 4^e $5' 30''$, à entrer dans l'ombre de Jupiter, lorsqu'ils y entrent perpendiculairement; *The longitude discovered*, etc. 1738, *pag.* 8. Maraldi donna des résultats différens dans les *Mém. de* 1734. De là on pourroit conclure leurs diametres apparens vus du centre de Jupiter; par exemple, le 4e satellite, en $5' 30''$ de temps, parcourt $6' 7''$ de son orbite; ainsi son diametre fait environ un angle de $6'$ vu du centre de Jupiter; or, la distance en demi-diametres des Jupiter 25, 3, multipliée par le sinus du demi-diametre $3' 3''$, donne $\frac{1}{44}$; ainsi le diametre du 4e satellite seroit $\frac{1}{44}$ de celui de Jupiter, ce qui ne fait que le quart de celui de la Terre. Wargentin m'écrivoit, en 1767, qu'il avoit comparé les ombres des satellites sur Jupiter, et qu'il avoit trouvé le 3e et le 4e 5 à 6 fois plus larges que le premier, et le second deux fois moindre que le premier. M. Bailly a employé à cette recherche une méthode plus exacte (3946).

Voici les diametres des satellites, vus de Jupiter, suivant Cassini, dans ses tables, Whiston et M. Bailly (*Mém.* 1771, *pag.* 590, 619, 623): j'y ai ajouté le 4e, d'après des observations que j'ai faites en 1788. Voy. les supplémens pag. 735.

	Cassini.	*Whiston.*	*M. Bailly et moi.*
I	59′ 4″	60′ 58″	60′ 20″
II	38 1	28 25	29 42
III	24 59	53 40	22 28
IV	13 32	11 19	9 39

En multipliant le sinus de cet arc par la distance du satellite en diametres de Jupiter, on aura le diametre en parties de celui de Jupiter.

3039. Les masses des satellites, c'est-à-dire leurs quantités de matiere ou leurs forces attractives, sont encore plus difficiles à déterminer, parcequ'elles supposent la valeur des densités connue. On

détermine celles des planetes par l'action qu'elles exercent sur leurs satellites (3557), et celle de la Lune par son effet sur les marées; celle des satellites ne peut se connoître que par les inégalités qui proviennent de leurs attractions réciproques, observées et comparées avec le calcul que donne la théorie.

La masse du premier étant supposée égale à celle du 3e, M. de la Grange trouve, par les inégalités, qui, dans le second satellite sont l'effet des deux attractions, que ces masses, par rapport à celle de Jupiter, sont 0,00006869; suivant M. Bailly, elles sont de 0,0000638. Par le mouvement du nœud du second, M. Bailly trouve pour le premier 0,00004247. La masse du second satellite trouvée par une inégalité du premier, dont il est à-peu-près la seule cause, est 0,0000211 suivant M. Bailly, et 0,00002417 suivant M. de la Grange.

La masse du 3e, déterminée par l'effet qu'il a conjointement avec le premier sur le mouvement du nœud du second, se trouve, suivant M. Bailly, 0,00007624; et par l'effet qu'il produit dans l'inégalité du second, en le supposant égal au premier, qui y contribue aussi, il trouve 0,0000638, et M. de la Grange 0,0000687.

La masse du 4e est la plus difficile à déterminer, parcequ'il paroît que son action sur le 3e n'est pas bien forte (2943); mais par la comparaison des observations, M. Bailly trouve qu'elle peut être environ 0,00005, ou un vingt-millieme de celle de Jupiter (*Mém. acad.* 1766). Au reste, M. de la Place, par sa théorie, et M. de Lambre, par ses nouvelles déterminations des inégalités des satellites, nous donneront sans doute une détermination plus exacte des masses.

3040. Les diametres des satellites sont la cause des différences qu'on trouve souvent dans les observations de leurs éclipses; les temps qu'ils emploient à entrer dans l'ombre, deviennent plus considérables quand les éclipses se font loin des nœuds; c'est alors que les observations sont les plus incertaines, sur-tout quand il s'agit du 4e satellite. Lorsqu'il arrive des éclipses où le 4e satellite parcourt dans l'ombre une ligne MN (FIG. 256), telle que la distance MO au bord de l'ombre approche beaucoup du demi-diametre du satellite, la corde M *f* qui marque la demi-demeure du centre du satellite, differe beaucoup de la corde M *a* qui marque la demi-durée de l'éclipse totale, et de M *c* qui marque la durée de l'éclipse, à compter du milieu M jusqu'au dernier contact du satellite; la ligne *a c* répond au temps que le satellite emploie à entrer ou à sortir; et il faudroit savoir quelle partie du

disque du satellite doit être sortie de l'ombre pour que nous commencions à l'appercevoir; sans quoi nous pouvons nous tromper de beaucoup sur la valeur de la corde M f conclue de l'observation, et sur l'inclinaison qu'on en déduit.

3041. Cette difficulté est encore augmentée par la différence des lunettes, qui produit sur les observations une différence considérable. L'immersion du 4ᵉ satellite, observée le 25 janvier 1762, parut à $6^h\ 16'\frac{1}{2}$ avec une bonne lunette de 15 pieds, dont Maraldi se servoit, et à $6^h\ 29'$ avec un excellent télescope grégorien de 30 pouces de foyer, dont se servoit M. Messier, qui, d'ailleurs étant plus jeune que Maraldi, avoit la vue plus perçante : cette observation étoit très difficile à faire, parceque le satellite mettoit plus de 30′ à perdre sa lumiere.

Le 3ᵉ satellite disparut le 25 janvier 1763, à $5^h\ 38'\ 49''$ avec un télescope newtonien de 4 pieds et demi, d'une bonté médiocre; et il ne disparut qu'à $5^h\ 41'\ 39''$, c'est-à-dire $2'\ 50''$ plus tard avec le télescope de 30 pouces (V. *les Mém. présentés*, tome V, *pag.* 616). Le satellite étoit alors dans ses limites, et il employoit plus d'un quart-d'heure à diminuer : ainsi l'on n'osoit pas entreprendre d'apprécier avec quelque exactitude l'effet des lunettes et des yeux dans les éclipses sur-tout du 4ᵉ satellite. Pour ce qui est du premier, j'ai parlé ailleurs de l'effet que produit ordinairement la différence des lunettes (2494); mais tout cela étoit fort équivoque, avant les nouvelles recherches dont je vais rendre compte.

3042. M. de Fouchy remarqua (*Mém. de l'acad.* 1732) qu'il devoit y avoir une inégalité optique dans les éclipses des satellites, à raison des distances; car la lumiere des satellites étant moindre quand ils sont plus éloignés du Soleil ou de la Terre, ils disparoissoient plutôt et reparoissoient plus tard. Galilée avoit déja remarqué que les satellites étoient beaucoup moins lumineux en approchant de Jupiter; le P. François-Marie, Capucin, avoit proposé, en 1700, de couvrir un objectif de différens morceaux en différens temps de glaces pour mesurer l'intensité de la lumiere (*Nouvelles découvertes sur la lumiere*). V. Bouguer, dans son Optique, où il avoit aussi parlé de cette méthode.

M. de Barros, gentilhomme portugais, suivit cette idée; il trouvoit que six morceaux de verre faisoient disparoître le premier satellite, et équivaloient à une couche d'air de 17205 toises; il déterminoit par là l'équation qu'il falloit appliquer aux immersions observées avec sa lunette de 14 pieds, et il en avoit fait une

table pour différentes hauteurs. Mais il observoit que chaque lunette devoit avoir son équation différente ; qu'il falloit aussi avoir égard à la différente distance du satellite à Jupiter, aux distances de Jupiter au Soleil et à la Terre, à la proximité de la Lune, à la force du crépuscule, à la hauteur du barometre ; et qu'on pouvoit déterminer toutes ces quantités par expérience, avec des glaces placées sur le verre de la lunette (*Mém. de Berlin* 1755.)

3043. Mais M. de Fouchy pensa qu'il valoit mieux employer des diaphragmes en carton, de différentes ouvertures, placés sur l'objectif de la lunette pour en diminuer l'ouverture; c'est la méthode que M. Bailly a employée avec succès; et il a fait à ce sujet un travail très considérable et très utile dans les *Mémoires de l'académie* pour 1771.

3044. Si le satellite, en décrivant l'orbite NM (*fig.* 256) disparoît pour une certaine lunette lorsqu'il est vers c, et pour une autre lunette lorsqu'il est vers a, le temps qu'il a employé à aller de c en a est ce qu'il faut calculer.

On connoît la distance IM de l'orbite au centre de l'ombre, et les distances Ic, Ia du satellite; ces distances different à raison de ce que le segment invisible étant plus petit dans la lunette la plus forte, le satellite, quand il disparoît, est plus près du centre, de toute la quantité dont la fleche de ce segment invisible est plus petite que dans la lunette plus foible.

En suivant ce principe, on peut comparer entre elles toutes les observations, en appliquant à chacune l'équation nécessaire pour avoir la véritable immersion du centre du satellite (*Mém.* 1771, pag. 662).

3045. Le troisieme satellite, vu dans une lunette acromatique de cinq pieds, qui a 24 lignes d'ouverture, dans ses plus grandes digressions au mois de juillet 1770, à la hauteur de 15°, disparoissoit quand M. Bailly réduisoit l'ouverture à 3 lignes, ou à un huitieme, c'est-à-dire quand il rendoit la lumiere 64 fois moindre.

Les autres disparoissoient par des ouvertures de 6 lignes, qui réduisent la lumiere à un seizieme ; de là il suit qu'en observant une immersion avec la même lunette, on perdra de vue le satellite, dès qu'il ne restera plus hors de l'ombre qu'un seizieme de son disque, ou 0,0625, ce qui répond à un sinus verse ou à une fleche de 0,227 (3466), c'est presque un quart du rayon. Ainsi, quand le satellite disparoît, son centre n'est pas sur le bord f de la véritable ombre, mais plus enfoncé des trois quarts du rayon du satellite. Si la lunette avoit 3 pouces, au lieu de 2,

le diaphragme pourroit être encore de 3 lignes pour le premier satellite ; mais alors le segment seroit $\frac{1}{144}$.

Aussi l'on perdoit de vue beaucoup plus tard le satellite dans une lunette pareille, qui avoit trois pouces d'ouverture (Pag. 624). La quantité de lumiere qui est insensible ne change point; il n'y a de variable que la portion du disque qui renvoie cette lumiere : l'effet des lunettes consiste en ce que le segment invisible diminue en raison inverse du carré de l'ouverture.

3046. Le diametre du satellite est la premiere chose qu'il faut connoître dans ces sortes de calculs. Pour cela, M. Bailly, avant d'observer une éclipse, employoit un diaphragme avec lequel il ne faisoit qu'entrevoir le satellite ; en sorte qu'il le perdoit de vue aussitôt qu'en entrant dans l'ombre le satellite avoit perdu la moindre partie de sa lumiere. Il ôtoit ensuite le diaphragme, et observoit une seconde immersion avec l'ouverture entiere de la lunette; par l'intervalle du temps qui s'étoit écoulé, il déterminoit la quantité dont le satellite s'étoit rapproché du centre de l'ombre, ce qui donnoit la valeur du diametre du satellite, en y ajoutant la fleche du segment invisible (Pag. 614) : on en a vu les valeurs (3038).

3047. Quand Jupiter est plus éloigné du Soleil, les satellites en reçoivent moins de lumiere : quand Jupiter est plus éloigné de la Terre, nous en recevons moins des satellites. Le segment invisible augmente donc comme le produit des carrés des distances diminue ; et il faut faire usage de cette correction pour comparer des observations faites dans différentes positions de Jupiter.

Il faut aussi tenir compte, dans ces calculs, du changement de lumiere qui arrive dans les satellites, suivant qu'ils sont plus ou moins près de Jupiter; les diaphragmes qui font disparoître le premier satellite, quand ses distances à Jupiter en demi diametres de cette planete sont 1, 10 et 1, 95 aux environs des éclipses, donnent les segmens invisibles en parties du disque du satellite, de 0,3268, et 0, 1148 ; ce qui doit faire $2' \ 17''$ de temps sur l'orbite du satellite de c en a, fig. 256, en supposant $3' \ 30''$ pour le diametre. D'après cela, on doit être surpris que l'on ait pu, sans cette considération, amener les tables du premier satellite à ne différer des observations que d'environ une minute (Pag. 605).

3048. Pour avoir une formule qui représente en tout temps le segment invisible en fonction de la distance, supposons que le segment invisible soit y et la distance x, et supposons que leur rap-

port

port soit exprimé par $\frac{c}{x} + \frac{b}{x^2} = y$, en prenant deux observations, on déterminera *b* et *c*: par exemple, j'ai trouvé le segment invisible dans ma lunette pour le 4[e] satellite 0,1030, lorsque la distance du satellite au bord de Jupiter étoit 0,46 du demi-diametre, et je l'ai trouvé 0,1465 pour la distance 0,2; donc $\frac{c}{0,46} + \frac{b}{(0,46)^2} = 0,1030$; et $\frac{0,2}{c} + \frac{b}{(0,2)^2} = 0,1465$: en cherchant deux valeurs de *b*, et les égalant ensemble, on en déduit celle de $c = 0,06127$, et $b = -0,0064$.

En nommant *x* la distance au centre de Jupiter, M. Bailly trouvoit pour la loi de cette diminution de lumiere, ou le segment invisible, les quantités suivantes, du moins dans les petites distances (*Mém.* 1771, *pag.* 603); j'y ai ajouté la formule pour le 4[e] satellite, d'après mes observations;

$0,0495 \frac{1}{x} + 0,3397 \frac{1}{x^2}$ pour le premier satellite.

$0,3933 \frac{1}{x} - 0,0375 \frac{1}{x^2}$ pour le second (*pag.* 607).

$0,2157 \frac{1}{x} + 0,7563 \frac{1}{x^2}$ pour le troisieme (*pag.* 610).

$0,053 \frac{1}{x} + 0,192 \frac{1}{x^2}$ pour le quatrieme (*Mém.* 1788).

On voit que, pour le second satellite et le 3[e], ce rapport dépend plus de la distance simple que du carré, tandis que c'est le contraire pour les autres : mais la distance au bord de Jupiter peut influer ici plus que la distance au centre; en prenant la distance au bord de Jupiter, je trouve les expressions suivantes, qui ne présentent pas la même diversité.

I. $0,1010 \frac{1}{x} - 0,0048 \frac{1}{x^2}$. II. $0,1357 \frac{1}{x} - 0,0079 \frac{1}{x^2}$. III. $0,1739 \frac{1}{x} - 0,017 \frac{1}{x^2}$. IV. $0,06127 \frac{1}{x} - 0,0064 \frac{1}{x^2}$. Ajoutons que les satellites les plus gros doivent diminuer moins rapidement; car une lumiere plus forte ne s'affoiblit pas également par le voisinage d'une autre lumiere. Au reste les changemens n'ont été déterminés que dans de petits intervalles, et les observations n'ont pu être répétées jusqu'ici assez souvent : quand elles auront été multipliées, on pourra s'occuper à rechercher la cause des différences que l'on y trouvera. Par le moyen de ces équations, on peut trouver de combien le segment invisible change, suivant les distances à Jupiter; et M. Bailly en a donné des tables : les rapports sont les mêmes pour d'autres lunettes.

3048. Les expériences de Bouguer sur la diminution de la lumiere quand on approche de l'horizon, lui ont servi à construire une table de la force de la lumiere à différentes hauteurs (2258): l'on y voit, par exemple, que la lumiere d'un astre à l'horizon est 1354 fois plus foible qu'au zénith. M. Bailly s'en est servi pour calculer le changement qui doit arriver dans le segment invisible et dans la partie *af* de l'orbite, suivant les différentes hauteurs de Jupiter; et il a trouvé les résultats d'accord avec ses observations (pag. 600).

3049. Il se sert aussi de la méthode des diaphragmes, pour comparer entre elles les forces des lunettes des différens astronomes, et déterminer la perte de lumiere qui arrive dans les télescopes. Par exemple, le télescope grégorien de M. Messier devoit donner 9 fois plus de lumiere que la lunette de M. Bailly; cependant le rapport des segmens invisibles dans ces deux instrumens étoit $\frac{1563}{817}$, c'est-à-dire cinq fois moindre que 9; ainsi il se perd dans ce télescope les $\frac{4}{5}$ de la lumiere, même en comptant pour rien ce qui s'en perd nécessairement dans la lunette de M. Bailly.

3050. Mais indépendamment de ces causes qui font varier le segment invisible d'un satellite, et par conséquent le temps des éclipses, il en est dont on ne peut tenir compte, comme le crépuscule, les vapeurs de l'horizon, la proximité de la Lune, l'affoiblissement de la vue, le télescope dépoli : ainsi il est nécessaire, quand on veut observer une immersion, ou qu'on vient d'observer une émersion, d'éprouver tout de suite quel est le diaphragme qui fait disparoître le satellite; alors on a directement la valeur du segment invisible, pour le jour donné, et la fleche correspondante : il faut avoir égard à la lumiere et à la distance du satellite à Jupiter, qui changent dans l'intervalle des deux observations. Je suppose qu'on ait observé l'immersion d'un satellite lorsqu'il étoit en *a*, et qu'il restoit en *b* un petit segment invisible pour nous, mais encore hors de l'ombre; la fleche étant ôtée du demi-diametre du satellite, et le reste ôté du demi-diametre de l'ombre, on aura la distance des centres I*a*; et connoissant aussi la perpendiculaire IM, on trouvera la distance M *a* au milieu de l'éclipse, qu'on réduira en temps. Avec le demi-diametre I*f* de l'ombre seule, on calculera M*f* en temps : la différence *af* est l'équation de M. de Fouchy, qu'il faut ôter du temps observé en *a* pour avoir la véritable immersion, ou celle qui est arrivée lorsque le centre du satellite étoit sur le bord de l'ombre en *f*. C'est

cette immersion qu'il faut avoir pour que les calculs des durées soient uniformes, et qu'il y ait un accord entre les observations faites en différentes circonstances et en différens pays.

Il est bien à desirer que tous ceux qui observent les satellites aient désormais cette attention, sans laquelle on n'aura jamais des observations comparables. On voit, dans les observations de M. Maskelyne, qu'il a fait usage de cette méthode; mais il se servoit de deux triangles de cuivre, qui s'éloignoient parallèlement par leurs hypoténuses.

En employant cette méthode des diaphragmes pour comparer des observations d'éclipses qui différoient quelquefois de 2 ou 3 minutes, M. Bailly est venu à bout de les concilier, à quelques secondes près (pag. 659); ce qui prouve combien ces précautions sont nécessaires pour la perfection de la théorie des satellites de Jupiter.

3051. On observe aussi les satellites lorsqu'ils disparoissent étant cachés par le disque de Jupiter, et lorsqu'ils passent sur ce même disque dans la partie inférieure de leur orbite, parcequ'ils jettent alors des ombres qui ressemblent à des taches noires, dont on observe le mouvement égal à celui des satellites qui les produisent (*Phil. Trans. n°.* 1 et 359). Cassini fut le premier qui, en 1664, observa ces ombres des satellites : avant l'opposition, Jupiter étant à l'occident du Soleil, elles doivent paroître sur la planete avant le satellite lui-même. On y distingue aussi quelquefois le satellite sous la forme d'une petite tache, plus petite que n'est son ombre lorsqu'on l'y apperçoit; ce qui semble prouver qu'il y a des parties obscures sur les disques des satellites (Cassini, *Elém. d'astron. pag.* 622).

On conclut de là que les satellites ont un mouvement de rotation sur eux-mêmes, aussi bien que les planetes; en effet, puisque les taches obscures qui rendent quelquefois le satellite visible sur le disque même de Jupiter, ne s'y rencontrent pas toujours, il faut qu'elles soient, tantôt dans l'hémisphere visible du satellite, tantôt dans l'hémisphere opposé; de là vient aussi que le 4e satellite paroît souvent plus petit que les autres (3037), quoiqu'il soit plus grand que les deux premiers, au jugement de Cassini, et que son ombre soit toujours plus grande que la leur. Le troisieme, surtout, paroît ordinairement le plus grand de tous, et quelquefois on le voit égal aux deux premiers, suivant que les grandes taches obscures qui occupent une partie de la surface, sont tournées vers nous ou du côté opposé (*Mém. acad.* 1707, 1712, 1714 et 1734,

Duhamel et Godin, *Hist. de l'acad. à l'année* 1694; *anciens Mémoires, T. II, pag.* 226).

Pound, observant en 1719 les satellites de Jupiter sur le disque de cette planete, remarqua qu'ils étoient beaucoup plus lumineux dans des temps que dans d'autres; il en conclut aussi que les satellites tournent sur leur axe, et qu'il y a des parties de leur surface qui réfléchissent très peu les rayons du Soleil (*Phil. Trans. n°.* 359, *Abrégé* IV, 308).

C'est peut-être pour cette raison que le 3e satellite paroît quelquefois employer dix minutes à entrer dans Jupiter, ou à en sortir, et d'autres fois 6′ seulement, quoique la diversité des lunettes, sa latitude plus ou moins grande, et son mouvement plus ou moins rapide, ne puissent pas produire une si grande différence. On est confirmé dans cette opinion par le 5e satellite de Saturne, qui, non seulement diminue, mais disparoît totalement dans la partie orientale de son orbite (3065).

3052. Les passages de l'ombre des satellites sur le disque de Jupiter sont plus difficiles à calculer que leurs éclipses, parceque ces passages sont sujets à l'effet de la parallaxe annuelle. En effet quand le satellite est en conjonction héliocentrique au point H de son orbite (*fig.* 244), son ombre est en A sur le disque de Jupiter; mais il faut que le satellite arrive en M pour que son ombre paroisse en L sur la ligne menée de la Terre T au centre I de Jupiter, et LA = MH; l'arc MH est à l'arc LA, en degrés, comme IA est à IH. Le 1 mars 1765, la conjonction héliocentrique du 4e satellite n'a dû arriver, suivant la remarque de Maraldi, qu'après que Wargentin eût vu l'ombre de ce satellite au milieu du disque de Jupiter; car la parallaxe annuelle AL étoit de 9° 33′ 35″: or IH est à IA, ou 76 est à 3, comme le sinus de cet arc est à celui de HM = 22′ 32″; le 4e satellite parcourt cet arc en 25′ 9″ de temps: la latitude des satellites apporte encore une différence dans ces observations.

3053. Le passage du satellite au milieu de Jupiter, soit qu'il décrive un diametre ou une corde, n'arrive pour nous, qui sommes en T, que quand il est au point N de son orbite, après avoir parcouru un arc HN égal à la parallaxe annuelle; et il suffit, pour le calculer, d'ajouter ou de retrancher l'effet de cette parallaxe. Cependant la corde décrite sur le disque de Jupiter dépend, non seulement de la latitude du satellite, mais aussi un peu de l'élévation de notre œil au-dessus du plan de l'orbite de Jupiter, ou de la latitude de la Terre vue de Jupiter (2994). La durée du passage d'un satellite est aussi un peu plus grande que celle des éclipses.

Whiston ajoute 6′ pour le premier, 7′ pour le second, 8′ pour les deux autres ; ce qu'il attribue à la pénombre, et en partie à la réfraction produite dans l'atmosphere de Jupiter, qui rétrécit le cône d'ombre (*The long. discov. pag.* 4 et 18). Nous avons vu une cause et un exemple de cette différence entre Jupiter et son ombre (2959).

Des Configurations des Satellites, et de l'effet des Parallaxes annuelles.

3054. POUR distinguer les satellites de Jupiter l'un de l'autre dans différentes positions, et sur-tout pour observer les satellites de Saturne, qui se voient si difficilement, il est nécessaire d'avoir leur situation apparente vue de la Terre, par rapport à la planete principale. Peiresc avoit eu l'idée de représenter graphiquement, c'est-à-dire par des figures, les éclipses des satellites (*Gassendi in vita Peir.*); Cassini y trouva aussi une très grande commodité, et il se forma un instrument composé de cercles mobiles de carton; Weidler en a donné la description et l'usage, d'après celui que Maraldi lui communiqua dans un voyage qu'il fit à Paris (*Explicatio Jovilabii Cassiniani*, 1727, *Witemb.* 4°).

Flamsteed forma aussi un instrument, en 1685, pour trouver en tout temps la situation des satellites et leurs configurations (*Phil. Trans.* n°. 178); Wiston en a décrit un dans l'ouvrage que j'ai cité (3037). Je vais expliquer la construction et l'usage de celui de Cassini.

On voit d'abord, dans la *fig.* 260, l'écliptique divisé en 12 signes; une alidade transparente, que l'on fait ordinairement de corne, et qui est représentée par ACB, tourne autour du centre C; elle se place sur le point A, où répond la longitude géocentrique de Jupiter, et s'arrête au moyen d'une pince marquée en D. La figure suppose la longitude de Jupiter 9ˢ 22° pour le 1 mai 1759. Les cercles intérieurs doivent être en carton, et mobiles autour du centre C; ils représentent les orbites des quatre satellites, divisées en jours, par les tables des moyens mouvemens (art. 2956; *tables de* Cassini; *Exp. du cal. pag.* 243). On calcule, par ces mêmes tables, la longitude jovicentrique de chacun des quatre satellites pour le premier jour du mois. Par exemple, pour le 1 mai 1759, à deux heures du matin, l'heure où les satellites pouvoient se voir le plus dans ce mois-là, on trouve les longitudes suivantes : 0ˢ 24° pour le 4ᵉ satellite, 2ˢ 25° pour le 3ᵉ, 3ˢ 11° pour le second, 10ˢ 13° pour le premier; on place le chiffre 1 de chaque cercle vis-à-vis de cette longitude cal-

culée; le chiffre 1 de l'orbite du 4ᵉ satellite répond à 0ˢ 24°, etc. Alors la situation du point 1 par rapport à l'alidade ACB fait voir la situation apparente de chaque satellite par rapport à Jupiter, le premier du mois, pour un observateur situé dans le prolongement de l'alidade ACB qui est dirigée vers la Terre. La situation des points marqués 2 sur chacune des quatre orbites fait voir la position des 4 satellites, le 2 à pareille heure; il en est de même à tous les autres jours du mois. Par ce moyen, l'on formera la configuration des quatre satellites, telle qu'on la voit sur la ligne EF au bas de la figure 260, où Jupiter est supposé en I; le point 4 de l'orbite du troisieme satellite est de 8 lignes à la droite de l'alidade AB quand on met le point A en haut; cela m'apprend que je dois placer le troisieme satellite de 8 lignes à gauche de Jupiter, pour une lunette qui renverse (a), dans la direction des bandes qu'on apperçoit sur le disque de Jupiter (3346), et qui sont à-peu-près dans la direction de son orbite. Il en sera de même des 3 autres; l'on figurera ainsi Jupiter accompagné de ses quatre satellites.

3055. Ceux qui sont marqués 1 et 3 sont au-dessus de la ligne des bandes, à cause de l'inclinaison des orbites (3060).

Le chiffre qui indique le satellite se met entre Jupiter et le point qui marque la place du satellite, quand on voit sur le jovilabe que le satellite se rapproche de Jupiter, comme dans la figure; au contraire, on met le chiffre au-delà du point quand le satellite s'éloigne de Jupiter. Quand les satellites sont à droite ou à l'occident, et qu'ils s'éloignent (c'est-à-dire que le point est en dedans), c'est une preuve qu'ils sont dans la partie inférieure de leur orbite.

3056. On comprendra la raison de l'opération précédente, en considérant que la ligne CA marque le rayon qui va de notre œil au centre de Jupiter; ainsi les satellites nous paroîtront plus ou moins éloignés de Jupiter, suivant qu'ils seront plus ou moins à droite ou à gauche de l'alidade ACB, sur laquelle nous rapportons toujours le centre de Jupiter; il n'importe point qu'ils soient plus ou moins avancés le long de cette ligne CA; il ne sagit que de leur distance à l'alidade.

On marque dans les configurations les temps où chaque satellite paroît sur le disque de Jupiter, ou se trouve caché derriere le disque; cela est facile, parceque la largeur de l'alidade est égale à celle que Jupiter lui-même est supposé avoir en appa-

(a) Les configurations dans le *Nautical Almanac* de Londres sont redressées; dans la *Connoissance des Temps* elles sont renversées, à compter de 1788.

rence : ainsi, quand le point est sous l'alidade, au-dessus du centre, du côté de A, on juge que le satellite est derriere Jupiter; on juge qu'il paroît sur son disque, si le point est en-dessous de Jupiter ou du côté de B.

On y marque aussi les temps où le satellite est dans l'ombre; pour cet effet, il faut tendre un fil du centre C à la circonférence de l'écliptique, mais sur un point différent du point A de la quantité de la parallaxe annuelle; à gauche, si Jupiter a passé l'opposition : ce fil représentera l'axe du cône d'ombre qui est sur la ligne menée du Soleil à Jupiter, et on lui supposera la même largeur qu'à l'alidade AB.

3057. Si l'on connoît l'heure du passage de Jupiter au méridien, on trouvera, à très peu près, la situation de cette ombre par le moyen du petit demi-cercle qui est au bas de la figure, et où j'ai marqué *l'effet de la parallaxe annuelle.* Les heures du passage à gauche sont pour le soir, dans une figure redressée. Je suppose que Jupiter passe au méridien à 2 heures ou à 10 heures du matin; l'on abaissera du point marqué 2 et 10 une perpendiculaire sur le diametre POR; la distance OS du centre à la perpendiculaire marquera la quantité dont l'axe de l'ombre est à droite de l'alidade AC sur la circonférence extérieure AV de l'écliptique.

La grandeur de l'espace EF sur lequel j'ai figuré les quatre satellites, au bas de la planche XXXVI, paroîtroit plus considérable à certaines personnes (1515), ou avec de forts télescopes : mais cela est indifférent; il suffit que, dans la configuration, toutes les parties soient bien proportionnées.

Il y a, dans la planche XXXVII (FIG. 261), un semblable instrument pour les satellites de Saturne (3065).

3058. Le temps où il importe le plus de connoître la situation apparente des satellites de Jupiter est celui des immersions et des émersions; c'est pourquoi je vais parler séparément des effets de la parallaxe annuelle sur la situation des satellites au temps des éclipses. On peut voir des tables à ce sujet, données par Flamsteed (*Philos. Trans.* 1686, *n*°. 184), et par Whiston (*The longitude discovered*, etc.); mais je trouve que cet effet peut se représenter par une simple figure, avec une précision suffisante pour l'usage des observateurs.

Soit I le centre de Jupiter (*fig.* 258), environné des orbes de ses quatre satellites; IG la ligne des syzygies ou l'axe du cône d'ombre; GE un arc de 11°, pris sur la circonférence de l'orbite du 4e satellite; cet arc étant égal à la plus grande parallaxe an-

nuelle de Jupiter, dans ses moyennes distances, et la Terre étant supposée en bas, dans la direction de la ligne EI, elle marquera le rayon visuel de la Terre, quand Jupiter est dans sa quadrature, entre l'opposition et la conjonction, passant au méridien à 6 heures du soir; car alors nous voyons Jupiter 11° à l'occident de son vrai lieu héliocentrique, marqué par la ligne IG; c'est-à-dire à gauche, dans une lunette qui renverse. Si, par les points G, F, *g*, *f*, sur lesquels se trouvent les satellites en conjonction, on tire des paralleles à la ligne IE, telles que GD, FC, *g*B, *f*A, l'on aura les 4 points, A, B, C, D, où les satellites doivent paroître à côté de Jupiter, au moment de leur conjonction héliocentrique; c'est sur la droite de Jupiter, après l'opposition.

Dans les autres temps de l'année, et lorsque la parallaxe annuelle sera moindre que 11°, on trouvera la position du rayon visuel IE, qui est la ligne des conjonctions géocentriques, en décrivant sur l'arc EG comme rayon, un demi-cercle divisé en degrés ou en heures; on prendra 30° en partant du point E de 6 heures; l'on y marquera 4^h et 8^h, parceque Jupiter étant éloigné de 30° de sa quadrature, passe au méridien environ à 8^h du soir ou à 4^h du soir; et l'on tirera vers ce point de 4^h une ligne telle que IE. Il est un peu plus commode pour les astronomes d'avoir ce demi-cercle divisé en temps que de l'avoir divisé en degrés, parceque le temps du passage au méridien se trouve tout calculé dans les éphémérides, et que les astronomes en font un usage continuel : mais on peut aussi prendre la parallaxe annuelle EG dans le *Nautical Almanac*, ce qui simplifieroit l'opération.

Lorsque Jupiter, après sa conjonction, passe au méridien le matin, c'est du côté droit ou dans la partie orientale qu'on doit tirer la ligne IE de la conjonction géocentrique; et les satellites nous paroîtront à gauche ou à l'occident de Jupiter dans le temps de leurs conjonctions héliocentriques supérieures.

3059. On trouvera, par le moyen de cette figure, la distance des satellites aux temps des émersions, en prenant à droite des points A, B, C, D, une quantité égale au demi-diametre IH de Jupiter; et l'on aura la distance des satellites par rapport à Jupiter pour le temps de leurs émersions. Ou bien l'on examinera la distance IA d'un satellite au centre de Jupiter pour le temps de la conjonction, et ce sera sa distance au bord oriental X, pour le temps de l'émersion, et au bord occidental H, pour le temps de l'immersion. Ces distances au bord X sont rapportées sur la figure 259; elles sont de $\frac{5}{10}$, $\frac{8}{10}$, $1\frac{1}{2}$ et $2\frac{1}{2}$ diametres de Jupiter, dans les émersions qui arrivent au temps des quadratures.

tures. Dans les autres temps ces distances diminuent comme les sinus des distances à la conjonction ou à l'opposition ; en sorte qu'elles sont réduites à moitié quand Jupiter passe au méridien à 2^h ou à 10^h.

La même figure sert à trouver l'effet de la parallaxe annuelle en minutes, que nous avons supposé à-peu-près connu (2996) ; car si le passage de Jupiter au méridien arrive à 2^h, on prendra la distance du point marqué 2^h, à la ligne GI, ou la valeur de la perpendiculaire sur GI ; ce sera la parallaxe annuelle exprimée en minutes ; parceque la parallaxe ayant pour base le sinus de l'arc de l'orbite terrestre, qui exprime la distance de la Terre à la conjontion, elle varie sensiblement comme les perpendiculaires dont nous venons de parler.

3060. Dans la construction de la FIG. 258, je n'ai point eu égard aux latitudes des satellites, et je les ai rapportées sur une ligne ID qui traverse le centre de Jupiter parallèlement à son orbite, et dans la direction des bandes (3346), ou de l'équateur de Jupiter, qui ne differe pas sensiblement de la direction des quatre orbites. C'est le cas qui a lieu quand Jupiter est vers $4^s \frac{1}{2}$ et $10^s \frac{1}{2}$ de longitude ; mais entre $4^s \frac{1}{2}$ et $10^s \frac{1}{2}$ de longitude, les satellites en conjonction paroissent au midi de la ligne des bandes, à laquelle nous les avons rapportés, c'est-à-dire en haut dans la figure renversée; au contraire entre $10^s\ 14°$ et $4^s\ 14°$, ils paroissent au nord ou au-dessous de la ligne des bandes, vers le temps de leurs conjonctions supérieures : la quantité est la plus considérable quand Jupiter approche de $1^s \frac{1}{2}$ ou $7^s \frac{1}{2}$ de longitude; c'est alors que la latitude des satellites est la plus grande : j'en ai marqué l'effet au-dessous des nombres 1, 2, 3, 4 (FIG. 259), en supposant l'inclinaison moyenne de 3°; ainsi les satellites paroîtront aux points *p*, *q*, *r*, *s*, au lieu d'être aux points 1, 2, 3, 4, au temps de leurs émersions, s'ils sont vers $1^s \frac{1}{2}$ de longitude vus du centre de Jupiter, ou, ce qui revient presque au même, si la longitude de Jupiter est à-peu-près à $1^s \frac{1}{2}$; ils paroîtroient au-dessus si Jupiter étoit à $7^s \frac{1}{2}$.

3061. Pour voir à-peu-près sur la figure 258 cette latitude des satellites en tout autre temps, on prendra sur l'orbe du 4e, un arc MN égal à 3°, inclinaison moyenne entre celles des 4 satellites ; on décrira un cercle MKL ; on le divisera en signes et degrés, marquant en K le lieu du nœud $10^s \frac{1}{2}$ et $4^s \frac{1}{2}$, en L $1^s \frac{1}{2}$, et en M $7^s \frac{1}{2}$; on tirera du point I une ligne au sommet M du petit cercle ; elle marquera en O la plus grande latitude OP que puisse avoir

le 3ᵉ satellite; en R la plus grande latitude RT du second, etc. Ainsi l'on placera les satellites sur la ligne MORI prolongée, au lieu de les placer sur la ligne NID. Si la conjonction arrive près de la limite, ce sera sur une ellipse dont MN, OP, etc. soit le demi petit axe.

3062. Pour d'autres situations des satellites, on marque sur le petit cercle MKL la longitude, par exemple, du 3ᵉ satellite, vu du centre de Jupiter, pour un jour donné, qu'il est aisé d'avoir par les cercles de la FIG. 260 (3054); on tire une ligne telle que IM au point de cette longitude; elle indique la latitude OP du troisieme satellite en conjonction (pour le temps où il avoit la longitude donnée); c'est sa distance au-dessus ou au-dessous de la ligne des bandes. Il y auroit beaucoup de choses à dire sur les latitudes apparentes des satellites, vues de la Terre: mais cette matiere n'est pas d'un usage assez fréquent pour devoir trouver place ici; au reste, les principes que j'ai employés (2994, 3008, 3358) peuvent s'appliquer à tous les cas.

J'ai indiqué les recueils d'observations pour les satellites de Jupiter (3025).

Des Satellites de Saturne.

3063. HUYGENS, le 25 mars 1655, observant Saturne avec des lunettes de 12 et de 23 pieds, y apperçut un satellite pour la premiere fois; c'est le quatrieme, le plus gros de tous, et le seul qu'on puisse voir avec des lunettes ordinaires de 10 à 12 pieds [(a)]. Dominique Cassini apperçut le cinquieme sur la fin d'octobre 1671, avec une lunette de 17 pieds; le 23 décembre 1672, il découvrit le troisieme avec des lunettes de 35 et 70 pieds; et il publia pour lors un petit ouvrage à ce sujet [(b)]. Au mois de mars 1684, il observa les deux intérieurs, c'est-à-dire le premier et le second, avec des lunettes de Campani, de 34, 47, 100 et 136 pieds, avec celles de Borelli, de 40 et de 70, et avec celles d'Artonquelli, qui étoient encore plus longues (*Journ. des Sav.*, 15 *mars* 1677 *et* 1686; *anciens Mém., Tom. X, pag.* 581 *et* 694; *Philos. Trans., n°.* 133, 154, 181, 192; *Mém. acad.* 1714).

Au mois de septembre 1789, M. Herschel, ayant terminé son télescope de 40 pieds, a découvert un sixieme satellite de Saturne,

(a) Borelli l'appelloit encore en 1666 *Hugenianum sidus.*

(b) Découverte de deux nouvelles planetes autour de Saturne, 1673, chez Cramoisy, imprimeur du roi, *in-folio.*

plus près que les cinq autres, dont la révolution est de 32^h 53′ 9″, et la distance à Saturne 35″058. Enfin, au mois d'octobre, il en a découvert un septieme, encore plus intérieur, dont la révolution synodique est de 22^h 40′ 4″6, et la distance 27″366, à la moyenne distance de Saturne. Le sixieme se voyoit fort bien avec le télescope de 20 pieds. Malgré la découverte de ces deux nouveaux satellites, on ne changera pas encore l'ordre suivi jusqu'à présent pour les cinq satellites de Saturne anciennement connus, et l'on appellera les deux nouveaux satellites le sixieme et le septieme.

L'on doutoit presque en Angleterre de l'existence des quatre satellites que Cassini avoit découverts; mais, en 1718, Pound ayant élevé au-dessus du clocher de sa paroisse (2822) l'excellent objectif de 123 pieds de foyer que Huygens avoit donné à la Société royale de Londres, il les observa tous les cinq (*Philos. Tr. n° :355*; Abrégé IV, 322; *Act. erud. suppl. Tom. VII*); et l'on vérifia les élémens de leur théorie, comme Cassini le fils l'avoit fait à Paris en 1714. Dans le même temps Hadley, vice-président de la Société royale, ayant trouvé le moyen de faire d'excellens télescopes, vit aussi les cinq satellites de Saturne; mais il n'en résulta aucune observation (*Philos. Trans.* 1723, *n°*. 378; *Acta erud. Feb.* 1730). M. Bernard, habile astronome de Marseille, en a fait de nouvelles en 1787, avec un grand télescope de Short : j'en donnerai le résultat; je les ai publiées en détail dans nos Mémoires pour 1786. Enfin M. Herschel en a fait beaucoup vers le même temps; il m'en a communiqué quelques unes, dont j'ai fait usage pour mes nouvelles tables (*Mém. de l'ac.* 1788).

3064. Les satellites de Saturne sont si petits et si éloignés de nous, qu'on ne peut les appercevoir qu'avec peine; il faut nécessairement avoir leur configuration; et, pour cet effet, nous avons mis dans la planche XXXVII, fig. 261, le modele d'un saturnilabe, instrument semblable à celui dont nous avons expliqué l'usage pour Jupiter (3054); mais il faut remarquer, dans celui de Saturne, que le 5e satellite a réellement une distance double de celle qui est dans la figure : on a été obligé de s'écarter de la proportion pour celui-là, afin de ne pas rendre la figure trop grande pour ce volume, et même pour l'usage. On n'a marqué que 31 jours sur son orbite, de même que dans le jovilabe, quoiqu'il reste beaucoup de place vide, parcequ'on suppose que les longitudes des satellites soient toujours calculées pour le 1er de chaque mois par les tables, et les cercles disposés de nouveau à chaque mois. Pour le 4e satellite,

5 jours et 21 jours répondent presque au même point, parceque tous les 16 jours il acheve une révolution.

Le premier et le second satellite de Saturne ne se voient qu'à peine avec des lunettes ordinaires de 40 pieds : le troisieme est un peu plus gros; quelquefois on l'apperçoit pendant tout le cours de sa révolution : le 4ᵉ est le plus gros de tous, aussi fut-il découvert le premier (3063) : le 5ᵉ surpasse les trois premiers dans certains temps. Wargentin m'a assuré les avoir vus tous les cinq avec une lunette achromatique de dix pieds (2303). Le cinquieme paroît sur-tout dans sa digression occidentale; mais quelquefois il est très petit, et disparoît même entièrement vers sa digression orientale (*Mém.* 1714, 1757).

Quand il est à l'orient de Saturne, sa lumiere s'affoiblit au point que l'on a beaucoup de peine à le voir; c'est ce que M. Bernard a éprouvé le 12 septembre 1787 : cela dure plus ou moins, jusqu'après sa conjonction inférieure. Il reprend tout son éclat avant de parvenir à sa plus grande digression occidentale, et on le voit encore bien vers sa conjonction supérieure. On peut supposer que ce satellite a un côté plus obscur que l'autre, et que sa rotation, comme celle de la Lune, soit égale à sa révolution; dès lors il peut arriver que ce soit toujours à l'orient de Saturne que la partie la moins lumineuse du satellite soit tournée vers nous : cependant M. Herschel m'assure qu'il ne perd jamais de vue ce satellite avec son télescope de 20 pieds.

3065. Une grande partie des principes que j'ai établis, en parlant des quatre satellites de Jupiter, doit s'appliquer aux cinq satellites de Saturne, avec cette différence, qu'on n'a point le secours de leurs éclipses pour déterminer leur théorie; on les voit si difficilement, que l'on n'a pas même encore déterminé leurs inégalités, quoiqu'elles paroissent considérables. Cassini soupçonnoit des inégalités de 6° dans le mouvement du 5ᵉ satellite (*Mém. acad.* 1716, *p.* 217); mais ses tables ne représentent que les mouvemens moyens, et l'on y trouve des erreurs considérables. La petite table que l'on trouvera ci-après (3068), contient tout le résultat de mes nouvelles tables; car il suffit de savoir quelle est la longitude vue de Saturne, comptée sur l'orbite du satellite, pour une époque donnée, telle que 1788, avec le mouvement diurne du satellite, pour trouver sa longitude en tout temps, et pour former l'instrument (FIG. 261), qui fera trouver la situation apparente des satellites. Cela est nécessaire pour les distinguer des petites étoiles, et profiter des circonstances favorables pour les observer d'une maniere plus suivie.

3066. Huygens avoit donné, en 1659, des tables du 4ᵉ satellite, que Halley corrigea par quelques observations faites en 1682 et 1683 (*Phil. Trans. n°.* 145). Cassini en publia, en 1693, pour tous les satellites. Mais les meilleures sont celles qui se trouvent dans les *Mém. de* 1716; elles furent dressées par Cassini le fils, sur les observations qu'il avoit faites en 1713 et 1714, avec un objectif de 114 pieds de foyer, comparées avec les observations de 1684, etc., 1703, etc. Ces mêmes tables ont été imprimées parmi celles de Cassini, en 1740, et dans celles de Halley, qui les préféra, par l'avis même de Bradley, à celles que Pound avoit données dans les Transactions philosophiques (n°. 356); on les a réimprimées avec plus d'étendue dans les tables de Berlin.

3067. On détermine les révolutions des satellites en comparant ensemble des observations faites lorsque Saturne est à-peu-près dans le même lieu de son orbe (2917), et les satellites à même distance de la conjonction. On tient compte du mouvement de la Terre ou du changement de parallaxe dans les différentes observations qu'on emploie (2923). Cassini choisissoit aussi les temps où leurs ellipses sont les plus ouvertes, c'est-à-dire où Saturne est à 90° des nœuds des satellites, parcequ'alors la réduction est nulle, et le lieu du satellite sur son orbite le même que son vrai lieu réduit à l'orbite de Saturne. C'est ainsi que Cassini a déterminé, en 1714, leurs périodes; les voici calculées plus exactement, d'après les moyens mouvemens que j'ai déterminés, et le mouvement de Saturne $6^s\ 15°\ 45'\ 51''$ en 16 ans, d'après mes nouvelles tables (*Connois. des T.* 1791).

	Révolutions périodiques.	*Révolutions synodiques.*	*Mouvement en 16 ans, par rapport aux équinoxes.*	*Nombre de révol. périod.*
I	$1^j\ 21^h\ 18'\ 26''$ 222	$1^j\ 21^h\ 18'\ 54''$ 778	4011979356''	3095
II	2 17 44 51, 177	2 17 45 51, 013	2764692804	2133
III	4 12 25 11, 100	4 12 27 55, 239	1676555940	1293
IV	15 22 41 ~~13, 05~~	15 23 15 ~~20~~, ~~175~~	474988164	366
V	79 7 53 42, 778	79 22 3 12, 883	95473624	73

+16, 02 +23'', 153 . v. Suppl. p. ~~763~~. 735.

Cassini donna aussi leurs longitudes vues de Saturne et comptées le long de leurs orbites; mais je les ai rectifiées dans la table suivante pour l'année 1788; elles peuvent servir pour trouver leurs positions en tout autre temps (1326), comme on les trouveroit par les tables détaillées qui sont dans les Mémoires de 1716, ou dans les Elémens de Cassini. Mais, suivant les nouvelles observations de M. Bernard,

il y a plusieurs degrés d'erreur : j'ai trouvé le premier de 12° en avance, le second de 20° en avance, le 3e en avance de 3 à 7, le 4e de 0 à 6 en retard, et le 5e de 8 à 10° en retard. Une partie de ces différences peut venir des inégalités des satellites et de celles des observations; mais probablement les mouvemens dans les tables de Cassini n'ont pas été déterminés par un assez grand nombre d'observations. Au reste, M. Bernard n'a pu juger de la position des trois premiers satellites que par leur passage dans la ligne des anses, c'est-à-dire par leur plus grande digression; mais cela m'a suffi pour corriger les grandes erreurs, et pour former les nouvelles tables qui sont dans la Connoissance des temps de 1791.

Si l'on veut avoir ces positions avec exactitude, il faut les réduire au plan de l'orbite de Saturne, comme nous avons réduit les planetes au plan de l'écliptique (1130). L'argument de latitude se trouve en retranchant de la longitude du satellite, vue de Saturne, celle du nœud (3073), c'est-à-dire 4^s 29° pour le 5e, et 5^s 21° pour les quatre autres. Le sinus de la distance de Saturne au nœud, multiplié par le sinus de l'inclinaison, donnera le sinus de l'angle que fait l'orbite avec notre rayon visuel, et par conséquent la valeur du petit axe de l'ellipse que le satellite paroît décrire, vu du Soleil, le grand axe étant pris pour unité. Dans les six premiers signes de l'argument, la partie de l'orbite la plus éloignée de nous sera du côté du nord. On trouvera, parmi les tables de Cassini et celles de Halley (édition de Londres), des tables de latitude et de réduction pour les satellites de Saturne. Nous négligeons ici la latitude de la Terre par rapport à l'orbite de Saturne; nous avons donné la maniere dont on pourroit y avoir égard (2994, 3008, 3358).

3068. On a déterminé les distances des satellites au centre de Saturne avec les micrometres, lorsqu'on a pu les voir avec Saturne dans le même champ de la lunette, en mesurant leurs plus grandes digressions : cette méthode ne peut guere servir pour le 5e ; on se sert de l'intervalle de temps qui s'écoule entre le passage de Saturne et celui du satellite, par un fil horaire placé au foyer d'un télescope. Cassini vit très bien que la regle de Képler (1224) se vérifioit dans les cinq satellites (*Mém. ac,* 1716). Pound se servit de cette regle pour trouver, par la distance du 4e, celles des autres satellites; il détermina, au moyen de l'objectif de 123 pieds, la distance du 4e au centre de Saturne dans ses plus grandes digressions (3070); et, connoissant la durée des révolutions (3067), il en conclut, par la regle de Képler, les distances des quatre autres, comme je vais les rapporter, en demi-diametres de l'anneau et en

demi-diametres de Saturne (ceux-ci étant comme 7 est à 3). J'y joindrai ces mêmes distances, suivant les observations de Cassini, en demi-diametres de l'anneau, et ensuite celles qu'il en a conclues par la loi de Képler, en supposant le diametre de l'anneau de 45″ dans les moyennes distances de Saturne, et la distance du 4ᵉ de 4 diametres de l'anneau, ou de 3′. (*Elém. d'astron. pag.* 642; *Tables de Halley, édit. de Lond.; Phil. Trans.* 1718, *n°.* 355, 356; *Abr. Tom. IV, pag.* 320; *Acta erud. Suppl. Tom. VII*).

Voy. les Supplém. à la fin p. 735.

Table des longitudes et des distances des Satellites de Saturne.

Satellit.	Longitude pour le premier janvier 1788.	Mouvement diurne.	Mouvement pour 365 jours.	Dist. en demi-d. de l'Anneau, suivant Bradley.	Dist. en demi-d. de Saturne, suivant Bradley.	Dist. en demi-d. de l'Anneau, suivant Cassini.	Dist en min. et sec. déduit. de celle du quatrieme.
I.	10ˢ 27° 53′	6ˢ 10° 41′ 53″	4ˢ 4° 44′ 42″	2,097	4,893	1 14/15	0′ 43″ ½
II.	10 7 45	4 11 32 6	4 10 15 19	2,686	6,268	2 ½	0 56
III.	5 25 25	2 19 41 25	9 16 57 5	3,752	8,754	3 ½	1 18
IV.	5 12 20	0 22 34 38	10 20 ~~40 41~~ +	8,698	20,295	8	3 0
V.	6 20 22	0 4 32 17	7 6 23 37	25,348	59,154	23	8 42 ½

+ 39′37″ v. Suppl. p. 735.

Je n'ai point mis dans cette table les longitudes du sixieme et du septieme satellite, que M. Herschel a découverts en 1789, parcequ'il ne nous en a point encore donné les positions (décembre 1789); les distances sont 35″058 et 27″366.

3069. Les distances en demi-diametres de Saturne étant multipliées par 14300, donneroient les distances en lieues (1398); mais il faudra rejeter trois chiffres du produit, à cause des trois décimales qui sont jointes dans la table précédente au nombre des demi-diametres.

3070. La distance du quatrieme satellite fut trouvée de 3′ 7″ le 9 juin 1719, à 10ʰ, par Pound, avec la lunette de 123 pieds et un excellent micrometre, comme on le voit dans les tables de Halley, à la suite de celles des satellites de Saturne; il étoit à-peu-près à sa plus grande digression orientale. Bradley en conclut que la distance du 4ᵉ satellite à Saturne est, par rapport à la distance moyenne du Soleil à la Terre, 0,0825 : en calculant plus exactement, on trouve 0,082431 : il seroit aisé d'en déduire les quatre autres distances, en parties de celle du Soleil. Cette distance 3′ 7″ devient 2′ 58″21 quand on la réduit à la distance moyenne de Saturne; cependant Newton la fait de 3′ 4″ : ou c'est une faute, ou bien Pound a varié dans ses déterminations; mais c'est cette

distance 2′ 58″ dont je me servirai, comme M. de la Grange, pour trouver la masse de Saturne (3560).

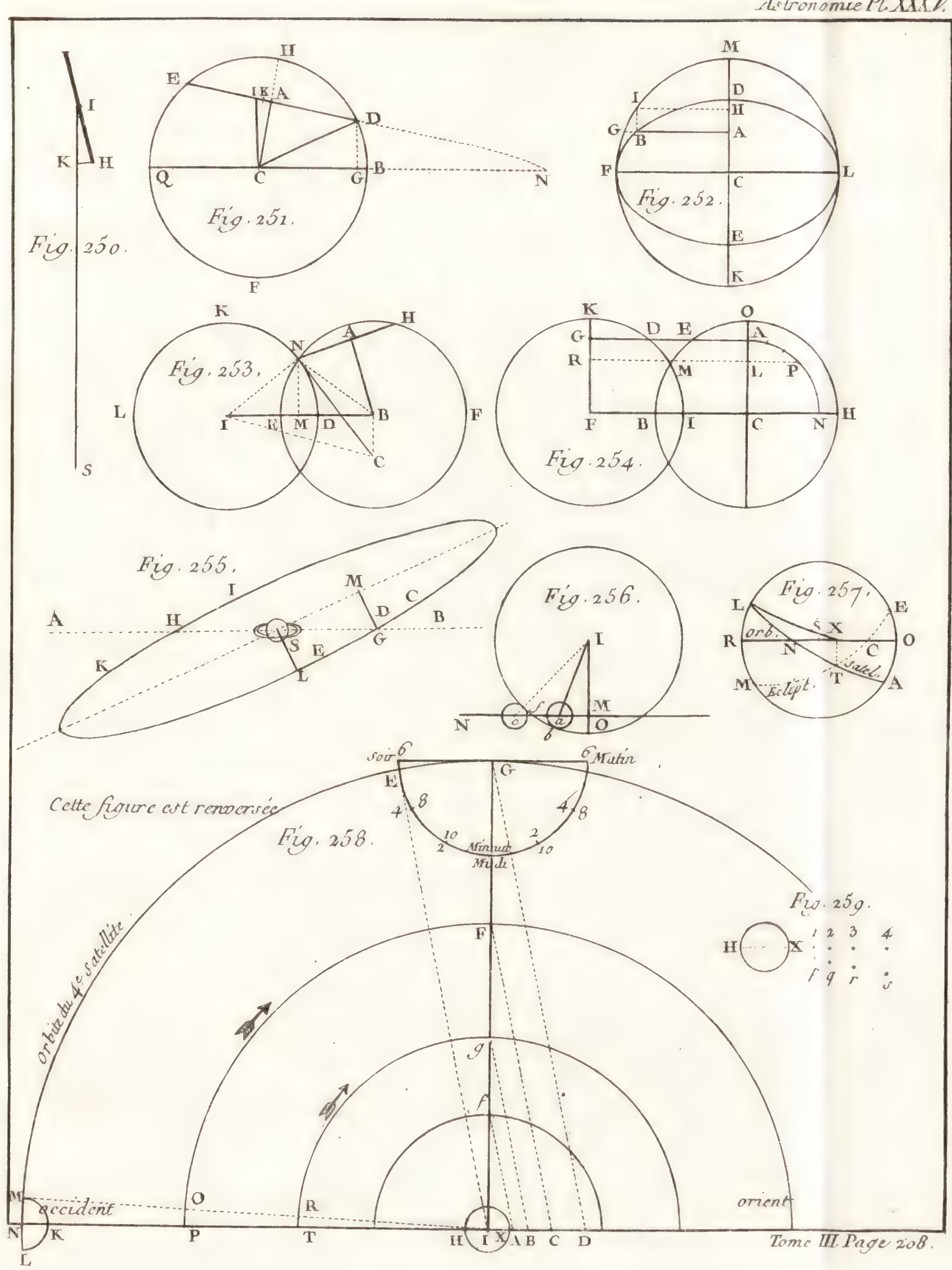
3071. En comparant les satellites avec l'anneau qui environne Saturne (3349), et en examinant l'ouverture de leurs ellipses (3005, fig. 255), on a vu que les quatre premiers décrivoient des ellipses semblables à celles de l'anneau (abstraction faite du mouvement de la Terre); elles sont situées dans le même plan que l'anneau, c'est-à-dire inclinées environ de 31° ⅓ à l'écliptique, ou de 30° sur l'orbite de Saturne (3364). En effet, le petit axe des ellipses que décrivent ces satellites, lorsqu'elles paroissent les plus ouvertes, est à-peu-près la moitié du grand axe, de même que le petit diametre de l'anneau (3371) est alors la moitié de celui qui passe par les anses, et ces satellites, dans leurs plus grandes digressions, sont toujours sur la ligne des anses; cela prouve qu'ils se meuvent dans le plan de l'anneau (3370). Ainsi l'angle des orbites des quatre premiers satellites avec l'orbite de Saturne est de 30°.

3072. On avoit cru d'abord que les cinq satellites étoient tous dans le même plan; mais on voit, dans le récit même de Domin. Cassini, que le cinquieme en différoit; et Cassini fils vit le satellite décrire une ligne droite qui passoit à-peu-près par le centre de Saturne, pendant que les autres s'en écartoient sensiblement au-dessus et au-dessous; ce qui prouvoit la différence des nœuds du 5e satellite à ceux des quatre autres, et la différence des inclinaisons. Il jugea que cette orbite étoit inclinée de 15 à 16° sur le plan des orbites des 4 satellites intérieurs, et à-peu-près autant sur l'orbite de Saturne, mais dans un autre sens. Les nouvelles observations m'ont donné un résultat un peu différent (3075).

3073. Jacques-Philippe Maraldi trouva, en 1716, le nœud de l'anneau sur l'orbite de Saturne à 5^s 19° 48′ ½ (sur l'écliptique 5^s 16° ⅓). Suivant Huygens, c'étoit, en 1655, 5^s 20° 30′ (3355); suivant Cassini, 5^s 22° (*Elém. d'astr., pag.* 643). Je l'ai trouvé, en 1773, à 5^s 20° 38′ sur l'orbite de Saturne, ou 5^s 17° 5′ sur l'écliptique (3359). Telle est la position du nœud ascendant des quatre premiers satellites et de l'anneau.

On pouvoit penser que les attractions du Soleil et du 5e satellite sur le plan de cet anneau en changeoient les nœuds; mais j'ai fait voir que du moins ce mouvement n'est pas sensible (3355). Il y a tout lieu de croire aussi que les satellites continueront de rester dans le même plan que l'anneau, parceque son attraction les y retient; car si l'on suppose que Saturne a un mouvement de rotation, et que le plan de son équateur soit le même que celui de son

anneau


Fig. 250.
Fig. 251.
Fig. 252.
Fig. 253.
Fig. 254.
Fig. 255.
Fig. 256.
Fig. 257.
orb.
Satel.
Eclipt.
Fig. 258.
Cette figure est renversée
Soir
Matin
Minuit
Midi
Orbite du 4e Satellite
occident
orient
Fig. 259.

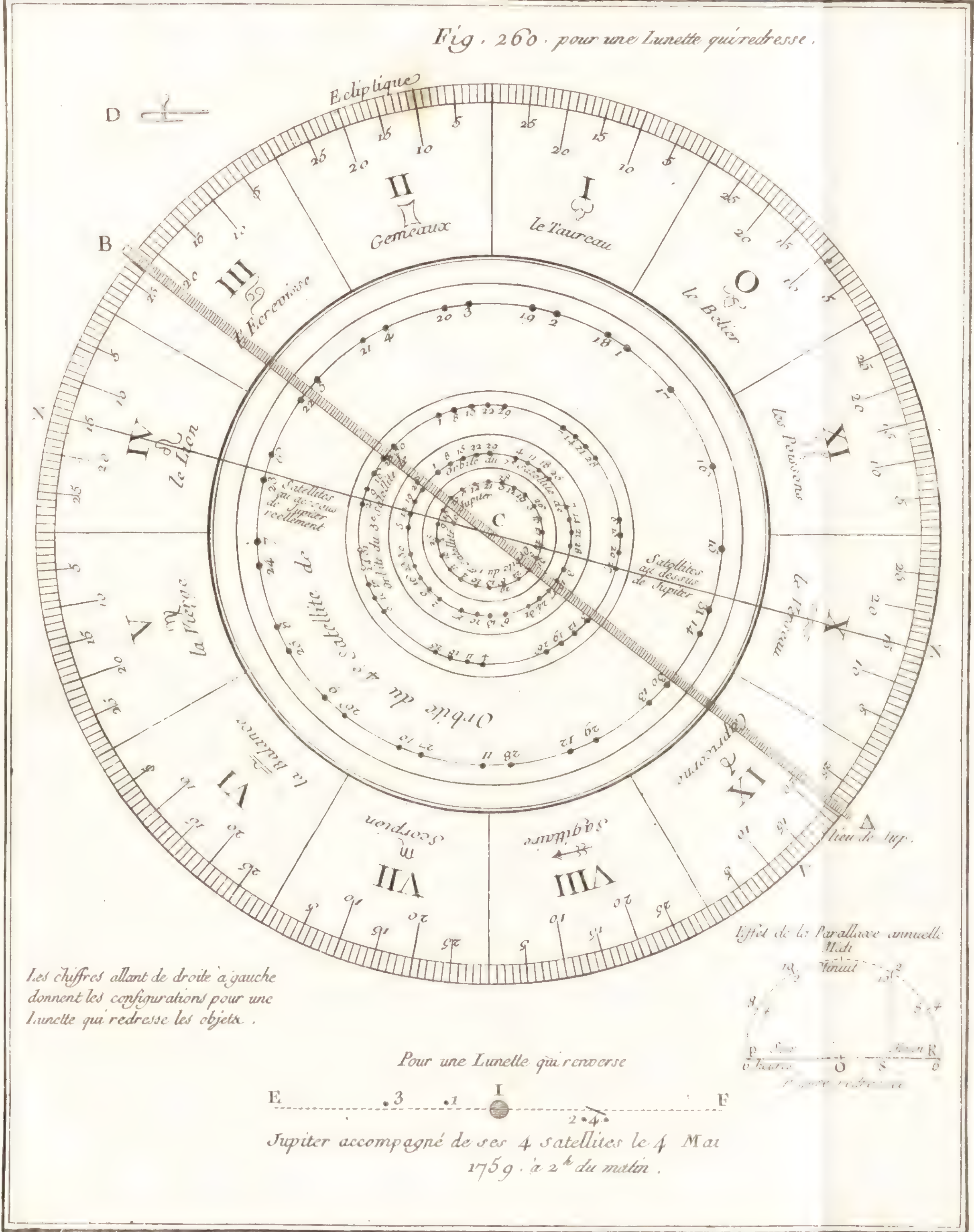

Fig. 260. pour une Lunette qui redresse.
Ecliptique
D
B
A
C
Gemeaux
le Taureau
le Belier
l'Ecrevisse
le Lion
la Vierge
la Balance
Scorpion
Sagittaire
Capricorne
le Verseau
les Poissons
Satellites au dessous de Jupiter reellement
Satellites au dessus de Jupiter
Orbite du 4.e satellite de
Orbite du 3.e satellite
Jupiter
lieu de Jup.
Les chiffres allant de droite à gauche donnent les configurations pour une Lunette qui redresse les objets.
Effet de la Parallaxe annuelle
Pour une Lunette qui renverse
E
F
Jupiter accompagné de ses 4 satellites le 4 Mai 1759. à 2h du matin.

Fig. 261.

Echelle de minutes et de secondes



anneau et de ses quatre premiers satellites, son action pourra toujours maintenir dans ce plan le systême de ces différens corps (M. de la Place, *Mém.* 1787). Dans ce cas le nœud de l'anneau ne changera que par la précession des équinoxes. Ce que je dis des quatre satellites doit s'entendre aussi des deux qui ont été découverts en 1789 (3063).

3074. Le nœud du 5ᵉ satellite est différent de celui des quatre autres; il étoit, en 1714, à $5^s\ 4^\circ$ sur l'écliptique, suivant Cassini (*Mém.* 1714), ou 17° moins avancé que celui de l'anneau qu'il supposoit à $5^s\ 21^\circ$. Cassini détermina cette position, en observant que le 5ᵉ satellite paroissoit, le 6 et le 7 mai 1714, se mouvoir en ligne droite (3008); mais comme le nœud de l'anneau (3360) n'étoit qu'à $5^s\ 16^\circ\ 17'$, j'ai recalculé l'observation; et, en rectifiant aussi l'inclinaison que j'ai trouvée de $24^\circ \frac{3}{4}$ sur l'écliptique, je vois que le nœud du 5ᵉ satellite sur l'écliptique devoit être à $5^s\ 0^\circ\ 27'$, moins avancé de $15^\circ\ 50'$ que celui de l'anneau, et le nœud sur l'orbite $5^s\ 4^\circ\ 10'$.

Les observations que M. Bernard a faites à Marseille en 1787 m'ont fait reconnoître que le nœud du 5ᵉ satellite rétrograde sensiblement. Je trouve le nœud R (FIG. 284) sur l'orbite NM $4^s\ 28^\circ\ 20'$, et l'inclinaison $22^\circ\ 42'$; le nœud H, sur l'écliptique HF, $4^s\ 25^\circ\ 5'$, et l'inclinaison H $24^\circ\ 45'$. Enfin le nœud K, sur l'anneau KO, $1^s\ 5^\circ\ 31'$, et l'inclinaison K $12^\circ\ 14'$. Ces quantités sont fort différentes de celles de Cassini (*Mém. de l'acad.* 1786).

La différence entre ces positions du nœud sur l'orbite donne $4'\ 47''$ par année; la formule de théorie (3691) donne $3'\ 38''$ par l'action seule du Soleil; c'est du moins une confirmation. Ainsi l'orbite du 5ᵉ satellite paroît sous la forme d'une ellipse qui est toujours inclinée à celle de l'anneau; leurs axes font un angle variable BSF (FIG. 255) : nous indiquerons la maniere de le calculer (3369).

3075. Les inclinaisons font que les conjonctions des satellites avec Saturne, qu'on observe naturellement au sommet du petit axe de leurs ellipses et dans un plan perpendiculaire à ces orbites et à la ligne des anses AB (FIG. 255), exigent une réduction; car la longitude de Saturne qui se compte dans l'écliptique, et la longitude du satellite qui doit être comptée sur son orbite (1132), ne sont pas égales. Cassini, qui négligeoit cette réduction (*Mém. de l'ac.* 1716), a donné, par cette raison, des mouvemens qui sont très défectueux. Par exemple, il parle de la conjonction du 4ᵉ satellite, observée le 14 mars 1659, à $8^h\ 9'$, temps moyen; Saturne étoit alors à $6^s\ 29'\ 37''$ de longitude avec $2^\circ\ 44'$ de latitude boréale;

et il en faut ôter $3^\circ\ 23'$ pour le réduire au plan de l'anneau et de l'orbite du 4e satellite, dont le nœud sur l'écliptique étoit à $5^s\ 15^\circ\ 30'$, avec une inclinaison de $31^\circ\ 30'$. Si B est le lieu de Saturne, F son lieu rapporté à l'écliptique FO (FIG. 284), BF sa latitude, GO le plan de l'anneau, OF la distance de Saturne au nœud $44^\circ\ 7'$; c'est la distance OG qu'il faut trouver (898), et elle n'est que de $40^\circ\ 44'$; c'est au point G qu'est réellement le satellite quand il paroît en conjonction ou qu'il répond perpendiculairement à la ligne des anses; et c'est la longitude du point G qu'il faut employer, et non celle du point F, dont se servoit Cassini dans ses calculs.

3076. LES SATELLITES DE HERSCHEL furent découverts le 11 janvier 1787, avec un télescope de 20 pieds, dont M. Herschel avoit supprimé le petit miroir, et qui grossissoit 460 fois.

La révolution synodique du premier est $8^j\ 17^h\ 1'\ 19''13$, et sa distance $33''09$. La révolution du second est $13^j\ 11^h\ 5'\ 1''5$, et sa distance $44''23$ (*Philos. Trans.* 1788). La premiere distance a été conclue de la seconde. Leur inclinaison a été trouvée de $89^\circ\frac{1}{2}$: mais M. Herschel n'a pas encore pu s'assurer de quel côté l'orbite est inclinée, parceque cela exige que l'on sache d'ailleurs si leur mouvement est direct ou rétrograde, ce qui est presque indéterminé, puisqu'à 90° d'inclinaison le mouvement ne seroit ni direct ni rétrograde. Leur nœud ascendant est à $5^s\ 21^\circ$, ou $8^s\ 9^\circ$, suivant qu'on supposera l'un ou l'autre. Ces résultats sont ceux que M. de Lambre a tirés des observations de M. Herschel.

3077. Ce seroit ici le lieu de traiter du satellite de Vénus, que Cassini, Short, et d'autres astronomes ont cru avoir apperçu (*Hist. de l'acad.* 1741; *Phil. Trans. n°.* 429; *Encyclopédie, tom. XVII, pag.* 837; *Mémoires de Berlin,* 1773): mais il est prouvé que c'est une illusion optique, formée par les verres des télescopes et des lunettes (*Voyez* le P. Hell, *Ephém.* 1766, et le P. Boscowich, dans sa 5e dissertation d'optique). Short, à qui j'en parlai à Londres, en 1763, me parut lui-même ne pas croire à l'existence d'un satellite de Vénus, mais plutôt à celle de quelque autre planete qui, réfléchissant moins de lumiere, ne se voyoit que difficilement et rarement. Je me persuade qu'il ne faisoit cette derniere supposition que pour ne pas abandonner tout-à-fait une opinion précipitée qu'il avoit annoncée d'une maniere trop formelle dans sa jeunesse.

3078. On peut se former une idée de ce phénomene d'optique, en considérant l'image secondaire qui paroît par une double réflexion, lorsqu'on regarde, au travers d'une seule lentille de verre, un objet lumineux placé sur un fond obscur, et qui ait un fort petit

diametre : pour voir alors une image secondaire semblable à l'objet principal, mais plus petite, il suffit de placer la lentille de maniere que l'objet tombe hors de l'axe du verre. Cette image secondaire a lieu quelquefois dans une lunette, et c'est ce qu'on a pris pour un satellite de Vénus ; elle paroît du même côté que l'objet, ou du côté opposé, et elle est droite ou renversée, suivant les diverses situations de la lentille, de l'œil et de l'objet. Si l'on joint deux lentilles, on aura plusieurs doubles réflexions de la même espece, du moins dans certaines positions ; mais elles sont insensibles la plupart du temps, parceque leur lumiere est éparse, et que leur foyer est trop près de l'œil, ou qu'elles tombent hors du champ de la lunette (Boscovich, *pag.* 286).

3079. M. Wargentin, dans le 3e volume des nouveaux Mémoires d'Upsal, dit qu'il a une lunette acromatique assez bonne, qui donne toujours à Vénus une apparence de satellite, d'une lumiere foible ; mais en tournant la lunette, on le voit dans toutes les parties du champ, ce qui décele l'illusion. Les étoiles dans lesquelles on a cru appercevoir un mouvement, sont un phénomene de même genre (*Journal de Paris* des 21 et 25 sept. 1786). Cependant M. Lambert a cru pouvoir donner une théorie du satellite de Vénus, par les prétendues observations qu'on en avoit (*Mém. de Berlin* 1773) ; mais, d'après ce que j'ai dit, on peut juger que ce sont des calculs en pure perte. On lit encore, dans le dictionnaire de Trévoux, qu'on avoit observé 30 satellites au Soleil ; mais on vouloit parler des taches du Soleil, comme nous le dirons dans la suite (3225).

LIVRE DIX-NEUVIEME.

DES COMETES.

Les Cometes (a) sont des corps célestes qui paroissent de temps à autre avec différens mouvemens, et qui, pour l'ordinaire sont accompagnés d'une lumiere éparse. Leur mouvement apparent differe beaucoup de celui des autres planetes : mais quand il est rapporté au Soleil, il se trouve suivre les mêmes loix ; car on verra que les cometes tournent autour du Soleil dans des ellipses fort excentriques (3100, 3182), suivant les regles expliquées dans le VIe livre, pour les autres planetes.

3080. C'est le mouvement des cometes qui les distingue des étoiles nouvelles ; car, dans celles-ci, l'on n'a jamais remarqué de mouvement propre (792) : d'ailleurs la lumiere des cometes est toujours foible et douce, c'est une lumiere du Soleil qu'elles réfléchissent vers nous, aussi bien que les planetes ; cela est prouvé spécialement par la phase observée dans la comete de 1744, la plus remarquable de ce siecle-ci (3209), dont la partie éclairée n'étoit visible qu'à moitié (*Mém. acad.* 1744 (b)). Si ces phases ne s'observent pas toujours, c'est que l'atmosphere épaisse, où la plupart des cometes sont noyées, disperse la lumiere, en sorte qu'elles nous semblent toujours d'une forme à-peu-près ronde. On distingue principalement les cometes par ces traînées de lumiere dont elles sont souvent entourées et suivies, qu'on appelle tantôt la *chevelure*, tantôt la *queue* de la comete (3208) : cependant il y a eu des cometes sans queue, sans barbe, sans chevelure ; celle de 1585, observée pendant un mois par Tycho, étoit ronde, elle n'avoit aucun vestige de queue ; seulement sa circonférence étoit moins lumineuse que le noyau, comme si elle n'eût eu à sa circonférence que quelques fibres lumineuses (*Tycho*, *Progymn.* *pag.* 752). La comete de 1665 étoit fort claire, suivant Hevelius,

(a) En grec κομήτης, qui vient de κόμη, *coma*, parceque les plus remarquables ont paru entourées d'une espece de chevelure.

(b) M. Dunn assure avoir vu les phases de la comete de 1769 ; mais M. Messier ne les a point vues (*Mém.* 1775, *page* 434).

et il n'y avoit presque pas de chevelure ; la comete de 1682, au rapport de Cassini, étoit aussi ronde et aussi claire que Jupiter (*Mém. acad.* 1699) ; celle qui parut depuis le 28 septembre jusqu'au 25 novembre 1763, n'avoit point de queue, quoique fort près de la Terre. Ainsi l'on ne doit pas regarder les queues des cometes comme leur caractere distinctif.

3081. Riccioli, dans son énumération des cometes, n'en compte que 154 citées par les historiens, jusqu'à l'année 1651, où il composoit son Almageste, et la derniere étoit celle de 1618. Dans le grand ouvrage de *Lubienietz*, où les moindres passages des auteurs sont scrupuleusement rapportés, toutes les fois qu'ils ont le moindre rapport aux cometes, on voit 415 apparitions jusqu'à celle de l'année 1665, qui parut depuis le 6 jusqu'au 20 avril, entre Pégase et les cornes du Bélier. M. Pingré, dans sa Cométographie (a), en cite un bien plus grand nombre, d'après une multitude de chroniques qu'il a consultées ; et cependant il n'a pas eu connoissance de toutes celles où il est parlé de cometes. M. Scheibel parle d'un manuscrit de 18 feuilles, où sont indiqués plus de 1800 cométographes. Au reste, M. Pingré réduit à 380 les apparitions qui lui paroissent bien certaines. On trouve aussi une table des cometes qui ont paru jusqu'en 1774, dans le premier volume des tables de Berlin ; et il y en a près de 700. M. de Guignes en a cité beaucoup, d'après les livres chinois (*Mém. présentés*, T. X, 1785), et M. Pingré les a rapportées.

Mais de toutes ces apparitions de cometes nous n'en trouvons aucune dont la route soit décrite avec un peu d'exactitude, avant l'année 837, et le nombre de celles dont on a pu avoir assez de circonstances pour calculer leur orbite, se réduit à 78, du moins en 1790 ; en ne comptant que pour une les cometes de 1456, 1531, 1607, 1682 et 1759, puisqu'il est reconnu que c'étoit une seule et même planete (3183) : j'ai réuni de même celles de 1532 et de 1661, et celles de 1264 et de 1556 (art. 3184).

3082. Au reste nous devons être persuadés qu'il a paru de tous les temps beaucoup de cometes dont il n'est point parlé dans les historiens, et qu'il y en a eu beaucoup plus encore qui n'ont point été apperçues : les anciens même le savoient, car Posidonius avoit écrit, suivant Séneque (*Quaest. nat. l. VII, c.* 20), qu'à la faveur de l'obscurité produite par une éclipse de Soleil, on avoit vu

(a) Cet ouvrage a paru à la fin de 1784, en deux volumes *in*-4°. L'académie a demandé qu'il fût imprimé à l'imprimerie royale ; il contient, de la maniere la plus étendue, l'histoire, la théorie et le calcul de toutes les cometes.

une comete très proche du Soleil; c'étoit vers l'an 60 avant J. C.; ce qui donne lieu de croire que, dans de pareilles circonstances, on en verroit bien d'autres.

M. Messier ayant été engagé par de l'Isle à chercher la fameuse comete de 1682, qu'on attendoit en 1758, s'attacha à ce genre d'observations; et il a découvert treize cometes, depuis le 25 janvier 1760 jusqu'au 26 novembre 1788 : dans ce nombre il y en a huit ou neuf qui nous auroient échappé sans la vigilance infatigable de M. Messier. Depuis 1781 jusqu'en 1790, M. Méchain en a découvert huit (3181). Il seroit bien utile que les amateurs d'astronomie, dans les provinces où l'on a tant de loisir, et dont plusieurs jouissent d'un si beau ciel, voulussent passer quelques soirées à chercher des cometes, et les comparer à des étoiles, ou seulement nous avertir. Cette branche de l'astronomie fera des progrès rapides, si ce genre de curiosité peut se répandre un jour parmi les gens qui ont du loisir et de l'émulation. Quand on prendra la peine de les chercher dans le ciel, on en trouvera sans doute un grand nombre. Je suis persuadé qu'il en existe plus de 300, puisqu'on en voit presque toutes les années, et que les plus longues périodes doivent passer 300 ans; Lambert conjecturoit même qu'il pouvoit y en avoir des millions (*Système du monde*, Bouillon 1772, *pag.* 49) : cependant Struyck les réduisoit à 100 (a).

3083. Alstedius observe que, dans les années qui précéderent et qui suivirent 1101, on en vit presque toutes les années (*Lubieniecii Theat. cometicum*).

Il est même arrivé plus d'une fois que l'on a vu en même temps plusieurs cometes. Riccioli en rapporte des exemples des années 729, 761, 1165, 1214, 1337, 1529 et 1618. Au mois de mai 1748, Struyck croit qu'on a vu trois cometes différentes dans une même nuit (*Suppl. de* 1753, *pag.* 100; *Phil. Trans. t.* 46; M. Pingré, tome II, *pag.* 61) : le 11 février 1760, on en voyoit deux (*Mém.* 1760, *pag.* 168); de même en janvier 1790.

3084. Les cometes dont l'apparition a été la plus longue, sont celles qui ont paru pendant 6 mois; la premiere du temps de Néron, l'an 64 de J. C. (Sen. *l.* 7, *c.* 21); la seconde vers

(a) *Algemeene Geographie, door Nicolas Struyck*, Amsterdam, 1740, *in*-4°. Il parut un supplément considérable en 1753, et il en envoya d'autres, manuscrits, à M. Pingré en 1759. M. Pingré a fait usage de ces ouvrages de Struyck. Celui-ci mourut en 1769, comme on le voit dans le second livre de la traduction de cette Astronomie, faite en hollandois, en 1773, *in*-8°, sur ma seconde édition.

l'an 603, au temps de Mahomet ; la troisieme en 1240, lors de la grande irruption de Tamerlan. De nos jours la comete de 1729 et celle de 1773 ont été observées pendant six mois ; celle de 1759 cinq mois ; celle de 1769 pendant près de 4 mois (M. Pingré, II, 125). Riccioli nous donne une table de la durée de beaucoup d'autres cometes, suivant différens historiens (*Almag. II*, 24); on y voit 4 cometes de 4 mois, savoir celles des années 676, 1264, 1363, 1433. Je ne parle point de celle qui menaça la ville de Jérusalem pendant un an, au rapport de Josephe, vers l'an 70, et que l'on a mise au nombre des mensonges d'historiens. Cependant il n'est pas impossible qu'une comete paroisse pendant un an entier, mais elle ne seroit pas au même lieu.

3085. Toutes les cometes paroissent tourner comme les autres astres par l'effet du mouvement diurne (art. 2); mais elles ont encore un mouvement propre, aussi bien que les planetes, par lequel elles répondent successivement à différentes étoiles. Ce mouvement propre se fait tantôt vers l'orient, comme celui des autres planetes, tantôt vers l'occident, quelquefois le long du Zodiaque, quelquefois dans un sens tout différent, et presque perpendiculairement à l'écliptique.

La comete de 1472 fit en un jour 120 degrés, ayant rétrogradé depuis l'extrémité du signe de la Vierge jusqu'au commencement du signe des Gémeaux, suivant l'observation de Regiomontanus (*Riccioli*, *Alm. II*, 8). La comete de 1760, entre le 7 et le 8 de janvier, changea de 41° ½ en longitude · on pourroit citer d'autres exemples d'une très grande vîtesse observée dans le mouvement apparent des cometes : on verra ci-après (3204) qu'elle pourroit être bien plus grande, si une comete passoit plus près de la Terre.

3086. Quelquefois les cometes paroissent si peu de temps que, dans la durée de leur apparition, leur situation ne change pas beaucoup ; mais il y a des cometes dont le mouvement est fort étendu : celle de 1664 parcourut 160° par un mouvement rétrograde en apparence ; et en 17 jours, c'est-à-dire du 20 décembre jusqu'au 6 janvier 1665, elle parcourut 143° (*Hevelii Cometog. pag.* 775 : *Mantissa prodromi cometici, pag.* 109) : celle de 1769 parcourut 240°, en comptant tout ce qu'elle fit avant et après sa conjonction, depuis le 8 août jusqu'au 1er décembre ; celle de 1556 un demi-cercle environ, ou 180° ; celle de 1472 fit environ 170° ; celle de 1618 parcourut 107° ½, dans l'espace de 28 jours (*Alm. II*, 28).

3087. Les anciens n'ont parlé communément de la grandeur des cometes qu'en faisant attention au spectacle de leur queue ou de leur chevelure; nous en parlerons plus bas (3208) : cependant il y a des cometes dont le diametre apparent semble avoir été très considérable, indépendamment de la queue. Après la mort de Démétrius, roi de Syrie (146 ans avant J. C.), il parut une comete qu'on a prétendu avoir été aussi grosse que le Soleil (*Sen. VII*, 15). On a porté l'exagération jusqu'à dire que celle qui parut à la naissance de Mithridate, 130 ans avant J. C., répandoit plus de lumiere que le Soleil, et qu'elle sembloit embrasser tout le ciel (*Justin*, *l.* 37).

La comete de 1006 (rapportée par erreur à l'an 1200 dans quelques livres), et qui fut observée par Haly Ben-Rodoan (*Card. Astr. l.* 2, *c.* 9), étoit quatre fois plus grosse que Vénus, et jetoit autant de lumiere que le quart de la Lune pourroit faire ; cette comete paroît être la même que celles de 1682 et 1759 (3182).

3088. Cardan dit à-peu-près la même chose des cometes de 1521 et 1556 (*de Variet. l.* 14). Nous n'avons rien de bien déterminé sur la grandeur apparente des cometes avant celle de 1577 ; son diametre apparent, suivant Tycho, étoit de 7′, c'est-à-dire, selon lui, le double du diametre de Vénus ; mais il faut rabattre beaucoup de ces sortes de mesures (1390).

Différentes opinions sur les Cometes.

3089. Après avoir parlé des principales circonstances qui ont rendu les cometes remarquables, je vais parler des différens systêmes auxquels elles ont donné lieu. Il y a eu de tout temps des philosophes persuadés que les cometes étoient des planetes dont le mouvement devoit être perpétuel et les révolutions constantes ; Anaxagore, Démocrite et quelques disciples de Pythagore mettoient les cometes au nombre des astres errans (*Arist. Meteor.* l. 1, c. 6 ; *Plut. de Plac. phil.* l. 3, c. 2) ; mais ils mêloient à cela des idées absurdes. Les Chaldéens admettoient le retour périodique des cometes (*Sen. Quaest. nat.* l. 7, c. 3 ; *Stob. Ecl. phys.* l. 1, pag. 63), et même les Égyptiens (*Diod. sic.* l. 1) ; cependant Eudoxe ne parloit point dans ses ouvrages de ces connoissances des Égyptiens à cet égard (*Sen.* ibid.). Plusieurs philosophes grecs regarderent les cometes comme de véritables astres ; tels furent Apollonius le Myndien, Hippocrate de Chio, Æschyle, Diogene, Phavorinus, Artemidore, Démocrite, qui, au jugement de Cicéron (*Tuscul.* l. v),

l. v) et de Séneque (*Quaest. nat. lib.* VII), fut le plus subtil de tous les anciens philosophes. On peut voir, au sujet des systèmes anciens, Pline, *II*, 25; Arist. *Meteor. I*, 6; Plutarque, *de Plac. Phil. III*, 2; Aulu-Gelle, *XIV*, 1; Sen. *VII*, 13; Riccioli, *Alm. II*, 35; ce que j'ai dit dans les *Mém. de* 1759; et M. Pingré, *tom. I*, *pag.* 36 et suiv.

3090. Mais on doit sur-tout à Séneque ce témoignage qu'aucun auteur n'a parlé des cometes d'une maniere aussi sublime que lui dans le VII[e] livre de ses questions naturelles. Un astronome auroit peine à s'exprimer aujourd'hui d'une maniere plus conforme à la véritable physique. « On a cru, dit-il, que les cometes n'étoient « point des astres, parcequ'elles n'ont pas la rondeur des autres « corps célestes; mais ce n'est que la lumiere qu'elles répandent « qui produit cette figure alongée; le corps de la comete est ar- « rondi. Je suppose encore qu'elles aient une autre figure que « les planetes: s'ensuit-il qu'elles soient d'une nature différente? « La nature n'a pas tout fait sur un modele unique, et c'est ignorer « son étendue et sa puissance que de vouloir rapporter tout à la « forme ordinaire; la diversité de ses ouvrages annonce sa gran- « deur. On ne peut point encore connoître leur cours, et savoir si « elles ont des retours réglés, parceque leurs apparitions sont trop « rares; mais leur marche, non plus que celle des planetes, n'est « point vague et sans ordre, comme celle des météores qui seroient « agités par le vent. On observe des cometes de formes très diffé- « rentes; mais leur nature est semblable, et ce sont en général « des astres qu'on n'a pas coutume de voir, et qui sont accompagnés « d'une lumiere inégale. Les cometes paroissent en tout temps et « dans toutes les parties du ciel, mais sur-tout vers le nord [a]: « elles sont, comme tous les corps célestes, des ouvrages éternels « de la nature. La foudre et les étoiles volantes et tous les feux de « l'atmosphere sont passagers et ne paroissent que dans leur chûte; « les cometes ont leur route qu'elles parcourent; elles s'éloignent, « mais ne cessent point d'exister. Vous prétendez que si c'étoient « des planetes elles se trouveroient dans le zodiaque: et qui donc « a fixé dans le zodiaque les mouvements des corps célestes? qui « peut assigner ainsi des limites aux ouvrages divins? le ciel n'est-il « pas libre de tous côtés? N'est-il pas plus convenable à la grandeur

(a) Cela doit être, parcequ'y ayant du côté du nord une plus grande partie du ciel que nous voyons toujours, les cometes qui s'y trouvent peuvent s'appercevoir à toute heure de la nuit, et dans toute la circonférence de leur parallele diurne.

« de l'univers d'y admettre plusieurs mouvements dans des routes « différentes, que de réduire tout à une seule région du ciel? « Dans cet ouvrage magnifique de la nature nous voyons briller « une multitude d'étoiles qui embellissent la nuit : elles nous ap- « prennent que le ciel de toutes parts est rempli de corps célestes; « pourquoi faut-il qu'il n'y en ait que cinq à qui il soit donné de « se mouvoir, et pourquoi tous les autres astres doivent-ils être « immobiles? On me demandera peut-être pourquoi donc il n'y « en a que cinq dont on ait observé le cours; je répondrai qu'il « y a beaucoup de choses dont nous connoissons l'existence, sans « savoir de quelle maniere elles sont; nous avons un esprit qui « agit et nous dirige, nous ne savons ni ce que c'est, ni com- « ment il agit. Ne nous étonnons pas que l'on ignore encore la « loi du mouvement des cometes dont le spectacle est si rare, « qu'on ne connoisse ni le commencement ni la fin de ces astres qui « descendent d'une énorme distance : il n'y a pas encore 1500 ans « que la Grece a compté les étoiles et leur a donné des noms : « il y a encore bien des nations qui n'ont que la simple vue et le « spectacle du ciel, sans savoir seulement pourquoi ils voient la « Lune s'éclipser : il n'y a pas bien long-temps que nous le sa- « vons d'une maniere certaine; le jour viendra que, par une étude « de plusieurs siecles, les choses qui sont cachées actuellement « paroîtront avec évidence. Ce seroit peu d'un siecle pour décou- « vrir tant de choses, quand même on y donneroit tout son temps; « et nous partageons le peu de momens qui nous sont accordés, « en donnant aux vices la plus grande partie... On étudie quand « on manque de spectacles ou quand la pluie empêche les prome- « nades; on conserve les noms des comédiens, mais on oublie « ceux des philosophes. Un jour viendra où la postérité s'étonnera « que des choses si claires nous aient échappé.... On démontrera « dans quelles régions vont errer les cometes, pourquoi elles s'é- « loignent tant des autres astres, quel est leur nombre et leur « grandeur. Ceux qui nous suivront trouveront des vérités nou- « velles; contentons-nous de celles qu'on a découvertes. *Nec mire-* « *mur tam tardè erui quae tam altè jacent* ». J'abrege à regret la traduction de cet ouvrage de Séneque, rempli de la plus belle morale et de la plus saine philosophie.

3091. Malgré des idées aussi lumineuses sur la nature des cometes, il s'est trouvé, parmi les anciens et parmi les modernes, jusqu'au commencement de ce siecle, et des auteurs qui ont cru que les cometes étoient des corps nouvellement formés et d'une

existence passagere; tels furent Aristote, Ptolémée, Bacon, Galilée, Hévélius, Longomontanus, Tycho, Képler, Riccioli, la Hire (*Mém. acad.* 1702, *pag.* 112). Plusieurs d'entre eux les regarderent comme des corps sublunaires ou des météores aériens. Riccioli, en 1651, après de longues dissertations, jugeoit qu'on n'avoit véritablement démontré pour aucune comete qu'elle fût au-dessus de la Lune, et qu'il étoit peu probable que ce fussent d'anciennes planetes (*Almag. II*, 43, 119). Cassini lui-même crut que les cometes étoient formées par les exhalaisons des autres astres (*Abrégé des observations sur la comete de* 1680, *pag.* xxxj).

3092. Suivant Aristote, les cometes étoient formées par les exhalaisons de la Terre (*Meteor. I*, 7 *et* 10), et son sentiment domina dans les écoles jusqu'au dernier siecle. Les astronomes regardant jusqu'alors les cometes comme des amas de vapeurs, ne daignoient pas les observer; voilà pourquoi nous n'en avons que 78 dont la route soit déterminée (3180); on n'observa même que les cometes qui firent un grand spectacle; telle fut la comete de 1472: c'est la premiere qui ait été observée avec soin; car les sept qui la précedent dans ma table (*art.* 3180), n'ont été calculées que sur des descriptions très imparfaites.

3093. On n'avoit point recherché ni calculé la vraie route des cometes, avant Tycho-Brahé: Regiomontanus avoit jugé qu'elles décrivoient des cercles; mais c'étoit moins par observation que par le préjugé général qu'on avoit pour les formes circulaires. Tycho ayant observé long-temps et avec soin la comete de 1577, composa un ouvrage considérable à cette occasion; il trouva qu'on pouvoit assez bien représenter ses apparences, en supposant qu'elle avoit décrit autour du Soleil une portion de cercle inclinée à l'écliptique de 29°, qui renfermoit les orbites de Mercure et de Vénus, de maniere que sa plus grande digression, vue de la Terre, auroit pu être de 60° (tandis que celle de Vénus n'est que de 48°); mais Tycho étoit obligé de rendre le mouvement de la comete un peu plus lent dans la partie inférieure de son cercle. (*De Com. anni* 1577, *pag.* 194).

3094. Tycho, faisant voir dans cet ouvrage que les cometes étoient des corps fort élevés au-dessus de la moyenne région, renversoit le système ancien des cieux solides; comme Newton se servit ensuite des cometes pour détruire le plein de Descartes et l'hypothese des tourbillons.

3095. Képler, ayant trouvé que les observations de la comete

de 1618 (*n*° XVII) s'accordoient mieux avec une ligne droite qu'avec un cercle, crut que le mouvement des cometes étoit purement rectiligne (*De Cometis, libri III,* 1619) : ce systême lui eût semblé bien difficile à admettre s'il avoit vu la comete de 1763 ; elle étoit le 28 septembre à 5° au midi de l'équateur ; elle s'éleva en 3 semaines jusqu'à 18° de déclinaison boréale, et le 18 novembre elle étoit revenue à 3° de l'équateur : dans cet intervalle de temps elle n'avoit pas changé son ascension droite de plus de 20° ; ce qui marque une courbure prodigieuse. En 1651, Riccioli étoit dans l'incertitude sur le mouvement rectiligne ou circulaire (*Alm. II*, 130).

3096. Cassini, dans son traité sur la comete de 1664, fit voir que le mouvement apparent et inégal de cette comete pouvoit se réduire à l'égalité par le moyen d'un cercle décrit excentriquement autour de la Terre, mais dont il n'y avoit d'observable qu'une très petite partie. Le même systême paroît dans son traité sur la comete de 1680, dans lequel il s'efforce de prouver que la comete qu'on avoit vue à la fin de novembre le matin, est différente de celle qui parut à la fin de décembre, le soir, et à l'orient du Soleil ; il croyoit que celle-ci étoit la même qu'on avoit vue en 1577, tournant en 29 mois et demi autour de la Terre. Cassini étoit encore du même avis long-temps après (*Mém. acad.* 1699, *pag.* 39). Il essayoit par ce moyen d'expliquer les retours de quelques cometes qui avoient paru suivre à-peu-près les mêmes traces ; il s'y prenoit d'une maniere ingénieuse ; et il eût réussi à prédire leur retour, s'il avoit eu l'idée de calculer leurs mouvemens vus du Soleil, au lieu d'en faire des satellites de la Terre.

3097. Hévélius me paroît être celui qui, dans cette théorie, fit d'abord le plus grand pas, puisqu'il jugea le premier, non seulement que la route des cometes étoit courbée vers le Soleil, mais encore que cette courbure étoit parabolique. Weidler dit que l'ouvrage allemand de *Doërfell*, imprimé à Plawen, dans la haute Saxe, en 1681, est le premier livre où l'on ait démontré que la parabole pouvoit représenter le mouvement des cometes. Doërfell appliqua en effet cette courbe à la comete de 1680 ; et on lui a attribué la découverte en entier (*Mém. de Berlin* 1745) ; mais il en avoit trouvé l'idée dans la Cométographie d'Hévélius, imprimée dès l'an 1668, et dont il parle dans le titre même de son ouvrage. Enfin Doërfell, n'ayant pas employé les aires proportionnelles au temps, ne pouvoit pas tirer un grand secours de cette idée. Il est vrai que Hévélius paroissoit d'abord très porté pour un mouvement presque rectiligne : *Cometae*

nullo alio motu quàm rectilineo concitantur (*Comet.* pag. 569). *Motum propemodùm rectum*, pag. 561. *Propemodùm recta trajiciuntur..... Gaudent hocce unico motu ferè recto* (p. 568). *Cometa non nihil a rectae lineae perfectione exorbitare videtur*, (pag. 641). *Pauxillùm tantùm a linea recta incurvatur* (pag. 684). Et même quand il parloit ensuite d'une parabole, il s'en falloit de beaucoup qu'il mît le Soleil au foyer. Doërfell est le premier qui en ait eu l'idée. Hévélius ne mettoit pas même le Soleil dans le plan de cette courbe. Aussi Gregory (*L. V*, *sect. I*, *prop.* 2) met Hévélius au nombre de ceux qui ont soutenu le mouvement rectiligne des cometes; et M. Pingré trouve qu'il a raison (*Cometog. p.* 140). Voici cependant ce qu'on lit dans la suite du même ouvrage. Hévélius observe d'abord que tous les projectiles décrivent des paraboles; *omne projectum et explosum motu parabolico progreditur* (pag. 660). Il décompose ensuite cette parabole pour faire voir qu'elle est le résultat d'une double impression : *motus parabolicus ex duobus motibus contrariis oritur* (p. 661). La ressemblance entre les projectiles que nous voyons sur la Terre et les cometes lui paroît évidente; il voit de part et d'autre une gravité, une tendance vers un centre commun, qui est le centre du Soleil pour les planetes, et celui de la Terre pour les corps terrestres; de part et d'autre un mouvement d'explosion, de projection en ligne droite, qui se combine avec la gravité pour former une parabole; en sorte que la comete abandonneroit la parabole pour suivre une tangente, si la gravité cessoit d'agir sur elle, comme elle retomberoit vers le Soleil si la force de projection ne l'en éloignoit pas : *Cometae in nulla alia quàm parabolica moventur linea...... nam cum iis omnibus ita comparatum est in aethere (suo tamen modo) quàm cum projectis commotisque in aere...... cometam videlicet aeternis causis necessitate manantibus, pariter ac globus e tormento explosus, vel aliquid aliud virtute seu motu extrinseco propulsum, in linea parabolica omnino commoveri ac trajici...... Alter autem (motus) pariter naturalis et intrinsecus est; non quidem ex eo quod cometis aeque ac terrestribus gravitatem attribuam; sed alia huic non prorsus dissimilis appetentia eis competat...... sub qua directione se deinceps conservant, quando nempe cometae atmosphærâ liberi exeunt, vel ex ea in aetherem expelluntur, ejiciuntur, suique juris fiunt, cujus videlicet universi aetheris Sol centrum est* (pag. 666).

3098. Hévélius ajoute même que la vîtesse des cometes est la plus grande au point de leur orbite où le rayon est perpendiculaire à la courbe, c'est-à-dire au sommet de la parabole. Il est vrai

qu'ensuite il soupçonne que le mouvement des cometes n'est pas égal à distances égales du périhélie, et que la plus grande vîtesse ne concourt pas toujours exactement avec le périhélie (*pag.* 677); d'ailleurs on trouve dans cet ouvrage des hypotheses destituées de fondement pour expliquer la formation des cometes dans l'atmosphere de Saturne ou de quelque autre planete, et le mouvement de projection qu'elles y reçoivent. Mais, quant à la partie astronomique, il ne restoit plus, sur-tout après le livre de Doërfell, qu'à appliquer aux cometes la loi de Képler, c'est-à-dire les aires proportionnelles aux temps; et ce fut Newton qui en eut la gloire.

3099. La comete prodigieuse de 1680 étonna et les savans et les peuples; elle produisit les pensées ingénieuses de Bayle, le traité de Cassini, celui de Jacques Bernoulli, qui crut pouvoir prédire son retour; enfin elle fit éclore les sublimes recherches de Newton, qui sut faire des cometes une branche de son systême général. En voyant toutes les planetes soumises à la force centrale du Soleil, il sentit que les cometes devoient être du nombre de ces planetes, et suivre les mêmes loix dans leur mouvement autour du Soleil; il falloit pour cela que leurs orbites fussent fort excentriques, c'est-à-dire très alongées, afin d'expliquer une très longue disparition.

3100. Pour voir si cela s'accorderoit avec les observations, Newton examina l'orbite de la comete de 1680: il trouva qu'une portion d'ellipse très alongée, ou, ce qui revient au même, une portion de parabole (3381), convenoit parfaitement avec toutes les observations, pourvu qu'on supposât les aires proportionnelles aux temps, comme dans les mouvemens planétaires (1227); dès lors il ne douta plus que les cometes ne fussent des planetes aussi périodiques et aussi anciennes que les autres.

3101. Halley se forma des procédés de calcul pour des orbites paraboliques (3135); il les appliqua successivement à différentes cometes, en choisissant celles qui avoient été les mieux observées; peu à peu il étendit ses calculs à 24 cometes, et en 1705 il publia les élémens de ces 24 paraboles (*Phil. Trans. n°.* 297). M. le Monnier a fait réimprimer à Paris, en 1743, la théorie de Halley; et je la publiai de nouveau en françois, lorsque je donnai une nouvelle édition des tables de Halley, en 1759: on y trouve des additions considérables qui forment une théorie du mouvement des cometes, à laquelle je renverrai plusieurs fois.

3102. Depuis ce temps-là, le nombre des cometes observées et calculées s'est augmenté jusqu'à 78 (3180); plusieurs de ces co-

metes ont été observées pendant des mois entiers, sur une très grande portion de la circonférence du ciel (3086), avec des inégalités apparentes extrêmement considérables; et cependant, quand on les réduit à une parabole décrite autour du Soleil, on trouve l'accord le plus parfait entre toutes les observations [a] : ainsi nous allons expliquer le mouvement des cometes dans une orbite parabolique, dont les dimensions sont données, et nous chercherons ensuite la maniere de trouver ces dimensions, et de connoître l'orbite d'une comete qui paroît pour la premiere fois (3125).

Du Mouvement des Cometes dans une orbite parabolique.

3103. Le calcul parabolique dont nous allons nous servir, à l'exemple de Newton et de Halley, n'est qu'une approximation que l'on adopte à cause de la facilité des calculs et du peu de différence qu'il y a entre une parabole et une ellipse fort alongée (3182, 3195). L'avantage consiste en ce que toutes les paraboles sont des courbes semblables; elles donnent une même proportion entre les rayons vecteurs semblablement placés, et il suffit de connoître les distances périhélies de différentes cometes pour les calculer toutes par une seule et même table (3118); au lieu que les ellipses exigent chacune une table particuliere (3193).

3104. Soit la parabole PCOD (*planche XXXVIII*, fig. 262), qui représente l'orbite d'une comete; le Soleil S occupe le foyer; P est le périhélie de la comete ou le sommet de la parabole; SP est la distance périhélie; on la suppose égale à la distance moyenne de la Terre au Soleil, qu'on prend toujours pour échelle de toutes les distances célestes.

Cette comete, dont la distance périhélie SP est égale à la distance moyenne du Soleil à la Terre, emploie 109 jours 15 heures à aller de P en O, ou du périhélie jusques à l'extrémité du rayon vecteur SO perpendiculaire à SP (3110). Je l'appellerai, pour abréger, comete de 109 jours; et je ferai voir comment on peut y rapporter toutes les autres cometes, en changeant seulement les temps: je suppose connues les propriétés de la parabole qui seront expliquées ci-après (3381).

3105. La premiere chose que nous avons à faire pour calculer le

(a) Après cela on est étonné de voir Cassini le fils, en 1731, s'efforcer d'établir que toutes les cometes sont directes, que leurs distances sont absolument inconnues, qu'on pourroit les réduire toutes à un très petit nombre, etc. *Mém. acad.* 1731; mais les progrès de la vérité sont toujours lents.

mouvement des cometes consiste à déterminer la vîtesse qui doit avoir lieu dans des paraboles de différentes grandeurs; car une comete dont la parabole est plus grande, emploie plus de temps à parcourir un angle de 90°, tel que l'angle PSO, c'est-à-dire à aller de P en O; de même que Saturne emploie 30 fois plus de temps à décrire un degré de son orbite que la Terre n'en emploie à décrire un degré de la sienne; voici le théorême fondamental, que je démontre d'une maniere très simple.

3106. Le rapport *des vîtesses dans le cercle et dans la parabole est celui de l'unité à la racine de deux.*

Dém. Supposons une comete en P, qui décrive la parabole PO autour du Soleil S, et la Terre en T décrivant un cercle TLM autour du Soleil F, le rayon FT étant égal à la distance périhélie SP : la force centrale, ou l'attraction du Soleil pour retenir la comete et la Terre, chacune dans son orbite, est égale, puisque la distance est la même, et que le Soleil ne peut pas avoir plus de force sur la comete que sur la Terre à la même distance. Je suppose un arc PC infiniment petit, sur la parabole, et un arc TL de l'orbite de la Terre, tels que l'abscisse PB de la parabole et l'abscisse TI du cercle soient égales, ou que l'écart CA de la tangente par rapport à la courbe soit le même que KL dans le cercle; ces abscisses ou les écarts des tangentes expriment la force centrale du Soleil, puisqu'elles sont l'inflexion du mouvement, et la quantité dont la planete obéit à l'action du Soleil en se détournant de la ligne droite (3536) [a]; ces abscisses sont donc égales dans les mêmes temps, quand la force est la même; donc si les abscisses sont égales, les arcs PC et TL sont décrits en temps égaux, et expriment les vîtesses de la comete et de la Terre. Je vais partir de cette supposition que les deux abscisses sont égales pour trouver les arcs eux-mêmes.

3107. Les arcs ne peuvent pas être égaux, puisque deux arcs égaux, pris sur des courbes très différentes, ne sauroient avoir des inflexions égales; mais, en partant de l'égalité de ces inflexions, j'en conclurai le rapport des arcs; ce sera celui des vîtesses, puisque le temps est le même de part et d'autre. Par la propriété du cercle, l'on a $TI = \frac{IL^2}{2FT}$ (3494); mais, par la propriété de la parabole, on a le carré de l'ordonnée BC égal au produit de l'abscisse PB par le parametre, qui est quadruple de SP (3381); donc PB

(a) On suppose l'écart CA égal à l'abscisse PB, parcequ'ils n'en different que d'un infiniment petit du troisieme ordre (3493).

$= \frac{BC^2}{4SP} = \frac{BC^2}{4FT}$; or PB = TI (3106); donc $\frac{IL^2}{2FT} = \frac{BC^2}{4FT}$, ou $2\ IL^2 = BC^2$; donc $IL\sqrt{2} = BC$, ce qui donne cette proportion : BC : IL :: $\sqrt{2}$: 1; or IL est égal à l'arc TL, ou du moins il n'en diffère que d'un infiniment petit du troisieme ordre (3459); ainsi IL est la vîtesse de la Terre; de même BC est la vîtesse de la comete; donc la vîtesse de la Terre est à celle de la comete à même distance du Soleil, comme 1 est à $\sqrt{2}$.

3108. De là il suit que la vîtesse de la comete en P sur la parabole PO sera les $\frac{7}{5}$ de la vîtesse de la Terre; car $\sqrt{2} = \frac{7}{5}$ environ; donc l'aire décrite en une seconde de temps par la comete sera $\frac{7}{5}$ de l'aire décrite dans le même temps par la Terre. Mais les aires sont toujours égales en temps égaux (1233): ainsi, à quelque distance que la comete parvienne par rapport au Soleil dans sa parabole PO, l'aire décrite en une seconde de temps sera toujours $\frac{7}{5}$ de l'aire décrite par la Terre, et l'aire de la Terre sera égale à l'aire de la comete divisée par $\frac{7}{5}$ ou $\sqrt{2}$. Je vais me servir de cette proposition pour démontrer que la comete doit employer 109 jours à aller de P en O, ou à parcourir 90° d'anomalie, c'est-à-dire l'angle droit PSO.

3109. Soit la distance périhélie SP ou FT = 1, la circonférence du cercle TM ou le nombre 6, 283 (3467) = c, l'aire de ce cercle sera $\frac{c}{2}$; l'aire parabolique PSO, qui est les deux tiers du produit de SP par SO (3472), sera $\frac{4}{3}$, parceque SO = 2; cette surface PSO étant divisée par $\sqrt{2}$, donnera $\frac{4}{3\sqrt{2}}$ pour l'aire que la Terre décrit dans le même temps que la comete va de P en O. Mais si l'on appelle A la longueur ou la durée de l'année, on aura cette proportion : l'aire totale $\frac{c}{2}$ de l'orbite terrestre est au temps A comme l'aire $\frac{4}{3\sqrt{2}}$ est au temps qui lui répond, et qui sera $\frac{8A}{3c\sqrt{2}}$, ou $\frac{A\sqrt{32}}{3c}$. C'est la valeur du temps que la comete emploie à décrire l'arc parabolique PO, ou les 90° d'anomalie vraie.

3110. La durée de l'année sidérale est $365^j\ 6^h\ 9'\ 10'',37$ (893, 1162), c'est-à-dire 365^j, 256370; si de son logar. 2,5625977 on ôte ceux de $\sqrt{2}$, et de trois fois la circonférence pour le rayon 1 (3467), et qu'on y ajoute le logar. de 8, on aura le logarithme 2,0398716647, qui répond à 109^j 6154243, ou $109^j\ 14^h\ 46'\ 12''6$; c'est le temps qui répond à PO. M. Cagnoli trouve 109, 61542316 4. M. de Lambre a employé dans sa table 109,6154, en négligeant les derniers chiffres.

Il ne suffit pas d'avoir trouvé le temps employé à décrire ces 90° d'anomalie ; il faut, pour calculer le lieu d'une comete en tout temps, connoître le nombre de jours qui répond à chaque portion de la parabole, comme PD, ou à chaque angle d'anomalie vraie compté depuis le périhélie, en supposant toujours les aires proportionnelles au temps, c'est la matiere du problême suivant.

3111. *Connoissant l'anomalie vraie dans une parabole, trouver le temps écoulé depuis le périhélie.* Je suppose qu'on connoît le temps employé à parcourir l'arc PO; on demande le temps employé à parcourir un autre arc PD, ou un autre angle PSD d'anomalie vraie. On tirera la ligne DP, et ayant pris ST et SR égales au rayon vecteur DS, l'on tirera DT et DR, dont l'une sera la tangente, et l'autre la normale (3382).

3112. Si nous prenons pour unité la sous-normale RQ, qui est la moitié du parametre (3382), nous aurons le parametre égal à 2: $PS = \frac{1}{2}$, et $PQ = \frac{DQ^2}{2}$. Le segment parabolique DOPQ, qui est les deux tiers du produit des co-ordonnées (3472), ou $\frac{2}{3}$ DQ. PQ, sera $\frac{1}{3} DQ^3$. Le triangle DPQ est égal à $\frac{1}{2}$ DQ. $PQ = \frac{1}{4} DQ^3$; donc, en le retranchant du segment DOPQ, il restera le segment $DOPD = \frac{1}{12} DQ^3$; on y ajoutera la surface du triangle $DPS = \frac{PS.DQ}{2} = \frac{DQ}{4}$, parceque $PS = \frac{1}{2}$; l'on aura $\frac{1}{12} DQ^3 + \frac{1}{4} DQ$ pour l'aire PSDOP.

3113. La ligne RQ ayant été prise pour unité ou pour rayon, DQ est la tangente de l'angle $DRQ = \frac{1}{2}$ DST, c'est-à-dire la tangente de la moitié de l'anomalie vraie. Si nous appellons cette tangente t, nous aurons l'aire parabolique PSDOP égale à $\frac{t^3}{12} + \frac{t}{4}$; l'aire de 90°, PSO, sera alors $= \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$. Mais il faut prendre l'aire PSO pour unité; et pour lors l'aire PSDOP sera exprimée par une quantité trois fois plus grande $\frac{t^3}{4} + \frac{3t}{4}$; ainsi l'aire de 90° étant connue, et la tangente d'une demi-anomalie vraie étant t, l'on multipliera l'aire de 90° par $\frac{t^3}{4} + \frac{3t}{4}$, et l'on aura l'aire décrite par la comete depuis son passage par le périhélie ; mais les aires sont proportionnelles aux temps : *ainsi l'on aura de même le temps qui répond à PD, en multipliant les* 109 *jours*, *ou en général le temps de* 90° *par le quart de* $t^3 + 3t$.

3114. Exemple. La comete qui emploie 109 jours à parcourir 90° d'anomalie, ayant 47° d'anomalie vraie, l'on demande com-

bien il s'est écoulé depuis le périhélie. La tangente t de 23° $\frac{1}{2}$ est 0, 4348124; donc $t^3 = 0{,}08221$, et le quart de $t^3 + 3\,t = 0$, 3467; il faut donc multiplier par 0, 3467 les 109 jours, ou le temps pour 90° (3110); l'on trouvera 38 jours : ainsi la comete de 109 jours se trouvera à 47° de son périhélie au bout de 38 jours.

3115. L'on peut donc trouver pour chaque degré d'anomalie vraie les jours correspondans ; ordinairement on a quelques fractions décimales de plus, parcequ'il est très rare qu'à un degré précis d'anomalie on ait un nombre complet de jours; mais avec des parties proportionnelles on a facilement les anomalies vraies qui répondent à chaque jour complet. C'est ainsi qu'on a calculé la table générale du mouvement des cometes, où l'on voit l'anomalie vraie qui répond à chaque jour de distance au périhélie pour la comete de 109 jours. On la trouvera dans nos tables, p. 204. On pourroit faire ce même calcul par une méthode directe, en cherchant l'inconnue t par la résolution de l'équation $t^3 + 3\,t = a$, c'est-à-dire égale au quadruple du temps, par PD ou du temps donné, c'est de 38 jours dans l'exemple précédent.

3116. La trigonométrie même fournit des moyens de résoudre cette équation du 3e degré (3845). Si l'on appelle u l'anomalie vraie, et T les jours donnés, et que l'on compare l'équation générale du 3e degré avec la nôtre $t^3 + 3\,t = 4\,T$, on aura tang. $\frac{1}{2}\,u = x$, $p = 3$, $q = \frac{4T}{109}$ ou $\frac{2T}{54}$.

Faisons tang. $B = \frac{p}{3q} \times 2\sqrt{\tfrac{1}{3}p} = \frac{1}{q} \times 2\sqrt{1} = \frac{2}{q} = \frac{54}{T}$; ensuite tang. $A = \sqrt[3]{\text{tang. } \tfrac{1}{2} B}$; et nous aurons x, ou tang. $\frac{1}{2}\,u = \text{cot. } 2\,A \times 2\sqrt{1} = 2 \text{ cot. } 2\,A$. Ce procédé exige la recherche de cinq logarithmes, qui tous appartiennent à des tangentes, et donne par conséquent toute la facilité et l'exactitude nécessaires pour trouver l'anomalie de la comete.

Exemple. Soit le temps $T = 13^j\,25$; on aura tang. $B = \frac{54{,}8077}{13{,}25}$, et $B = 76°\ 24'\ 33''34$; tang. $A = \sqrt[3]{\text{tang. } \tfrac{1}{2} B} = 42°\ 42'\ 56''72$; tang. $\frac{1}{2}\,u = 2$ cot. 2 A donnera $u = 18°\ 9'\ 33''22$.

3117. Quand on a calculé une table des anomalies, il est utile de la vérifier par les différences, et l'on peut les calculer avec la plus grande précision par la formule suivante. L'intervalle du temps, divisé par 41,105775, si c'est un jour, multiplié par l'arc égal au rayon et par la quatrieme puissance de cos. $\frac{1}{2}u$, pour le milieu de l'intervalle, donne le changement de l'anom. vraie, qui répond au temps donné.

En effet tang. $\frac{1}{2}u^3 + 3$ tang. $\frac{1}{2}u = \frac{4T}{109}$ (3115); et différenciant cette équation, l'on a (3452) $\frac{4dT}{109} = \frac{3du \text{ tang.}^2 \frac{1}{2}u}{2\cos.^2 \frac{1}{2}u} + \frac{3du}{2\cos.^2 \frac{1}{2}u} = \frac{3du}{2\cos.^2 \frac{1}{2}u}$ $(1 + \text{tang.}^2 \frac{1}{2}u) = \frac{3du}{\cos.^2 \frac{1}{2}u} \left(\frac{1}{2\cos.^2 \frac{1}{2}u}\right)$ (3808). Donc $\frac{3du}{2\cos.^4 \frac{1}{2}u} = \frac{4dT}{109}$; et $du = \frac{8}{3 \times 109}$ cos. $^4 \frac{1}{2}u$. Ainsi les $\frac{3}{8}$ des 109 jours font un diviseur constant pour un jour; il est quatre fois moindre pour six heures. Je suppose, par exemple, qu'on demande le changement d'anomalie vraie entre 50 jours et 50 $\frac{1}{4}$, on fera le calcul ci-joint; la demi-anomalie vraie, qui tient le milieu, est 28° 57', et le quadruple du logarithme de son cosinus étant ajouté au logarithme constant pour un quart de jour 3,09846, donne celui du changement d'anomalie en six heures, 12' 15"5. C'est ainsi que l'on peut appercevoir beaucoup de petites erreurs dans les tables paraboliques dont on s'est servi jusqu'à présent; mais celle que M. de Lambre a calculée n'est point exposée à ce défaut, comme on peut le vérifier.

Log. 57° . .	5,3144251
Log. 41, 10	1,6139050
Log. cons. .	3,7005199
Log. 4 . . .	0,6020600
Pour 6h . . .	3,0984599
4 log. cos. u	9,768116
12' 15"5 . .	2,866576

3118. La table générale du mouvement des cometes dans une parabole avoit été faite d'adord par Halley; celle de la Caille étoit plus commode et plus ample (*Mém. acad.* 1746); elle fut augmentée successivement par M. de Chaligny, par M. Schulze et par M. Pingré: celle-ci a été imprimée dans le second volume du traité analytique de M. du Séjour; mais M. de Lambre a fait le calcul en entier avec beaucoup plus d'étendue, et jusqu'aux dixiemes de secondes; pour cela, il a employé les milliemes; il a vérifié toutes les anomalies d'où les autres ont été déduites par interpolation; et il a employé les secondes différences calculées par une formule analogue à celles des différences premieres (3117): on trouvera sa méthode expliquée en détail dans le tome 4 des mémoires de l'académie de Toulouse, ainsi que sa méthode pour calculer les équations des planetes. La table de M. de Lambre qui est à la suite de celles des planetes (*pag.* 204), contient 2676 termes; celle de M. Pingré n'en contenoit que 1494, et c'étoit la plus complette qu'on eût publiée. On n'a pas mis dans la table les logarithmes pour la distance, comme faisoit Halley, parcequ'avec l'anomalie vraie et la distance périhélie d'une comete, il est aisé de trouver sa distance au Soleil (3122).

Cette table s'applique facilement à toutes les cometes; en effet, si l'on considere différentes cometes dans d'autres paraboles, à un même degré d'anomalie vraie, les temps écoulés depuis le passage au périhélie seront entre eux comme les temps employés à aller du périhélie jusqu'à 90°; par exemple, quand $\frac{1}{4}t^3 + \frac{3}{4}t$ sera égal à un demi, le temps correspondant sera la moitié du temps pour 90° dans toutes les paraboles possibles. De là il suit que, pour une comete quelconque, si je connois le temps des 90°, j'aurai (avec une simple regle de trois) le temps pour tout autre angle d'anomalie vraie, en me servant de la table calculée pour la comete de 109 jours. Il ne reste donc plus qu'à chercher le temps des 90° pour des paraboles plus ou moins grandes, ou le nombre de jours qu'exigera l'arc PO, quand la distance périhélie SP ne sera plus égale à la moyenne distance de la Terre au Soleil; c'est ce que je vais faire par le moyen du théorême suivant.

3119. Les carrés des temps qui répondent à une même anomalie vraie dans différentes paraboles sont comme les cubes des distances périhélies. Cette loi, analogue à celle du mouvement des planetes (1224), est également une suite nécessaire des forces centrales (3546); en effet, nous avons démontré que, sur le rayon de l'orbite terrestre (décrite en 365^j), on avoit 90° dans la parabole de 109 jours: ainsi le temps des 90° de la parabole est environ un tiers de celui du cercle entier: mais si l'on considere différens cercles ou différentes planetes à d'autres distances du Soleil, on aura différentes révolutions dont les carrés des temps seront comme des cubes des distances; donc les temps des paraboles qui en sont toujours le tiers, seront aussi dans la même proportion; donc les temps qui répondent à PO, sont comme les racines carrées des cubes des distances périhélies SP.

Une seule table servira donc pour trouver l'anomalie vraie dans toutes les paraboles, pourvu que l'on augmente les temps en raison de la racine carrée du cube de la distance périhélie; en effet, pour un même degré d'anomalie vraie, les carrés des temps de différentes paraboles doivent augmenter comme les cubes des distances périhélies, ou les temps comme les racines carrées des cubes des distances périhélies: ainsi à 90° d'anomalie vraie répondent 109 jours (3110), quand la distance périhélie est de 10, et 126 jours quand la distance périhélie est 11, parceque la racine carrée du cube de 11 est plus grande que celle du cube de 10 dans le même rapport de 126 à 109: il faut donc augmenter aussi à proportion les autres nom-

bres de jours, quand on cherchera, par le moyen de la table générale, les anomalies pour la comete de 126 jours.

3120. Je joins ici, à côté de chaque distance périhélie, le nombre par lequel il faut multiplier les jours de la table générale, pour avoir les jours qui, dans d'autres cometes, répondent à une même anomalie; je suppose la distance du Soleil à la Terre divisée en dix parties, et j'ai calculé le nombre des jours pour l'arc PO dans onze paraboles différentes.

Dist. périhél. en dixiemes de celle du Soleil.	Nomb. par lesq. on multiplie les jours de la table.	Jours pour 90°.
1	0,035	3,5
2	0,089	9,8
3	0,164	18,0
4	0,253	27,7
5	0,353	38,8
6	0,465	50,9
7	0,585	64,2
8	0,715	78,4
9	0,854	93,6
10	1,000	109,6
11	1,152	126,3

On voit, par cette table, que quand la distance périhélie d'une comete est $\frac{4}{10}$ de celle de la Terre au Soleil, il faut, au lieu des jours de la table générale, en prendre d'autres qui ne soient que 0, 25 ou le quart; voilà pourquoi cette comete n'emploie que 28 jours à parcourir les 90° d'anomalie; et nous pouvons l'appeller la comete de 28 jours, comme nous avons appellé comete de 109 jours (pour abréger) celle qui emploieroit environ 109 jours à aller du périhélie jusqu'à 90° d'anomalie.

3121. Donc, pour chaque degré d'anom., au logar. des jours de la table, il faudra ajouter une fois et demie le logar. de la dist. périhélie d'une comete donnée, pour avoir le nombre de jours qui répond à cette comete donnée pour le même degré d'anom. Au contraire, quand le nombre de jours écoulés depuis le périhélie d'une comete quelconque sera donné, il faudra ôter les $\frac{3}{2}$ du logar. de la dist. périhélie du logar. des jours donnés, qui conviennent à cette comete, et l'on aura le logar. des jours qu'il faut chercher dans la table générale.

Exemple. On suppose que la célebre comete de 1759 décrivoit une parabole dont la distance périhélie étoit 0, 5835; elle avoit passé par son périhélie le 12 mars, à $13^h 59' 24''$ temps moyen; on demande l'anomalie vraie de la comete, le 1 mai, à $8^h 54' 40''$, c'est-à-dire 49^j $18^h 55' 16''$ après le passage au périhélie. On réduit, pour plus de facilité, les heures en décimales de jours, par le moyen de la petite table qu'on trouvera avec la table générale, parceque les parties proportionnelles sont plus aisées à faire avec des décimales, et les logarithmes plus aisés à chercher: on a donc 49^j, 7884; du logarithme de ce nombre on ôte une fois et demie celui de la distance périhélie; le reste est un logarithme auquel répond dans les tables 111^j, 7034: avec ce nombre de jours qui convient à la comete de 109^j, je cher-

che l'anomalie dans la table générale, et je trouve 90° 43′ 6″ 4; c'est l'anomalie vraie cherchée. On verra le détail de ce calcul à la suite de la table générale.

3122. Le rayon vecteur de la comete, ou sa distance au Soleil, est égal à la distance périhélie SP, divisée par le carré du cosinus de la moitié de l'anomalie vraie (3384). Cette distance étoit donc, dans notre exemple, $\frac{0,5835}{(\cos. \frac{1}{2} \text{anom.})^2}$; ainsi je prends le double du log. cos. de 45° 21′ 33″, que je retranche du log. de la distance périhélie; il reste le log. de 1,18182; c'est la distance de la comete.

3123. Quand on connoît deux rayons vecteurs d'une parabole, avec l'angle compris, on peut trouver la distance périhélie et les deux anomalies qui répondent aux rayons vecteurs. Soient b et c les deux rayons, a le quart de la somme des deux anomalies vraies (je les suppose l'une avant et l'autre après le périhélie), x le quart de la différence de ces deux anomalies; on aura cette proportion : $\sqrt{b} + \sqrt{c} : \sqrt{b} - \sqrt{c} :: \text{cotang. } a : \text{tang. } x$.

Dém. Le carré du cosinus de la moitié d'une anomalie vraie est au carré du rayon comme la distance périhélie est au rayon vecteur (3384); mais la plus grande des deux anomalies est $2a + 2x$; la plus petite $2a - 2x$; ainsi $\sqrt{b} : \sqrt{c} :: \cos. (a - x) : \cos. (a + x)$; or $\cos. (a - x) = \cos. a \cos. x + \sin. a \sin. x$, et $\cos. (a + x) = \cos. a \cos. x - \sin. a \sin. x$ (3810, 3812); donc $\cos. a \cos. x \sqrt{b} - \cos. a \cos. x \sqrt{c} = \sin. a \sin. x \sqrt{b} + \sin. a \sin. x \sqrt{c}$; donc $\sqrt{b} + \sqrt{c} : \sqrt{b} - \sqrt{c} :: \cos. a \cos. x : \sin. a \sin. x :: \frac{\cos. a}{\sin. a} : \frac{\sin x}{\cos. x} :: \cot. a : \text{tang. } x$; c'est-à-dire que *la somme des racines des rayons vecteurs est à leur différence, comme la cotangente de la demi-somme des demi-anomalies vraies est à la tangente de leur demi-différence* (*Nicollic, Mém. de l'acad.* 1746, *pag.* 302; *la Caille, ib. pag.* 429). Nous ferons usage de cette regle dans la recherche des orbites cométaires (3143, 3162).

3124. Lorsqu'on a deux quantités inégales, et qu'on fait cette proportion, la plus petite est à la plus grande comme le rayon est à la tangente d'un angle : ôtant 45° de l'angle trouvé, on peut toujours dire, le rayon est à la tangente du reste comme la somme des deux quantités données est à leur différence (3850) : on dira donc aussi, dans le cas dont nous parlons; 1°. la racine du plus petit des deux rayons vecteurs est à la racine du plus grand comme le rayon est à la tangente d'un angle dont on ôtera 45°; 2°. le rayon est à la tangente du reste comme la cotangente du quart de la somme des deux ano-

malies est à la tang. du quart de leur différence; on peut dire également comme la cot. du quart de la différence est à la tang. du quart de la somme. Ainsi cette regle est très commode, en ce qu'elle sert également pour trouver la somme des anomalies, quand on a leur différence, ou pour trouver la difference quand on a la somme: il n'est pas nécessaire que les deux rayons vecteurs soient des deux côtés du périhélie; s'ils sont du même côté, l'angle donné sera la différence des deux anomalies, et la regle précédente fera trouver leur somme.

Calculer l'orbite d'une Comete par trois observations.

3125. Jusqu'ici j'ai expliqué la maniere de distribuer le mouvement d'une comete déja connue, sur les différens points de la parabole qu'elle décrit; parcequ'en effet il fallut connoître les loix de ce mouvement, comme Newton les donna, ou comme je viens de les expliquer, avant de reconnoître que ces loix s'observoient dans le ciel. Nous sommes en état de chercher actuellement quelle est la parabole qu'une comete décrit autour du Soleil, pourvu que nous ayons trois observations de son lieu apparent dans le ciel; car une parabole dont le foyer est donné peut se déterminer par trois points, aussi bien qu'une ellipse (1294). Mais la difficulté devient beaucoup plus grande pour les cometes, parceque les trois longitudes données ne sont pas des longitudes vues du Soleil. Ce problême, que Newton se proposoit, même dans sa premiere édition (en 1687), seroit extrêmement difficile, si l'on n'y employoit pas une opération graphique, ou des approximations et des méthodes indirectes. Par exemple, Newton (*Princip. mathem.* L. III. pr. 41. *Arithmet. universalis*) résout d'abord ce problême : *L'orbite d'une comete étant supposée rectiligne, et uniformément parcourue, déterminer cette ligne par le moyen de quatre longitudes observées.* Ce problême sert à trouver ensuite avec assez de facilité l'orbite entiere d'une comete: mais il faut prendre d'abord des observations peu éloignées entre elles, et assez éloignées du périhélie pour que la vîtesse soit sensiblement uniforme, et la direction rectiligne. Cette solution se réduit à trouver une ligne droite qui soit coupée par quatre lignes droites dans la raison donnée, qui est celle des temps. Le problême est à la vérité presque toujours déterminé: mais Boscovich observe, dans sa dissertation de 1746, que ce problême est indéterminé lorsqu'on suppose les 4 lignes tirées de 4 lieux de la Terre situés de même en ligne droite; et il l'a montré d'une autre maniere dans un mémoire inséré à la fin de l'édition de l'arithmétique universelle, donnée par M.

Castillon (*Amst.* 1761). Dans le même endroit, Boscovich fait voir qu'il y a un semblable défaut dans la méthode que Bouguer a donnée pour déterminer l'orbite d'une comete par trois observations très voisines, en supposant une portion d'hyperbole sensiblement rectiligne (*Mém.* 1733). Enfin il a traité complètement ce problême et tous ceux qui ont rapport aux cometes dans le 3e volume de ses œuvres. Euler suppose aussi trois lieux observés à de petits intervalles proportionnels au temps, et la distance de la comete au Soleil à peu-près connue dans l'observation moyenne. Ayant fait ainsi plusieurs suppositions, il examine laquelle représente le mieux une 4e observation fort éloignée des trois autres, et il en déduit les véritables élémens (*Euleri Theoria Motuum Planetarum et Cometarum, in*-4°, à Berlin 1744, *pag.* 57 et 139). On peut voir encore les mémoires de Fontaine; l'ouvrage de Lambert, *Insigniores orbitae Cometarum proprietates*, *Augustae Vindelic.* 1761, *in*-8°; un mémoire du P. Charles Walmesley, etc.

3126. Il y a aussi des méthodes de M. du Séjour dans son ouvrage sur les cometes et dans le second volume de son traité analytique; d'autres de M. de la Grange dans les mémoires de l'académie de Berlin pour 1778, sur-tout dans le volume de 1783, où il a donné une approximation curieuse et utile. M. le marquis de Condorcet, dans la piece qui a remporté le prix de l'académie de Berlin, et qui a été imprimée à Utrecht en 1780, a donné une autre méthode analytique. M. Grégoire Fontana en a donné une en 1780. Voyez enfin M. Lambert (*Mém. de Berlin* 1771), et M. de la Place (*Mém. acad.* 1780). M. Pingré a rassemblé plusieurs de ces méthodes dans sa cométographie, tome II. Mais la méthode indirecte que je vais expliquer est assez commode et assez générale pour que je puisse ici m'en tenir à cette méthode.

3127. Je suppose, pour guider le calcul, qu'on ait formé avec du carton 10 paraboles, sur les distances périhélies 1, 2, 3, etc., et qu'elles soient divisées en jours, comme dans la figure 267; on trouvera les dimensions de toutes ces paraboles calculées dans les mémoires de l'académie pour 1773; et, par le moyen de ces tables, on pourra les tracer aussi grandes qu'on le jugera nécessaire : on peut diviser graphiquement ces paraboles en jours, dès qu'on a le temps des 90°. On divisera SP (FIG. 262) en deux parties égales, par une perpendiculaire VZ; on divisera la partie égale à SP en autant de jours que la comete en met à faire les 90° d'anomalie; et l'on aura une échelle de parties égales, dont chaque point Z sera également éloigné de S, de P et du lieu O de la comete (*Newton*, *liv.* 1,

prop. 30) : par ce moyen l'on pourra facilement diviser un plus grand nombre de paraboles.

3128. Le cercle ABC, figure 267, représente l'orbite de la Terre le Soleil étant en S; la parabole CD est celle de la comete de 109 jours, dont la distance périhélie SC est égale à celle de la Terre au Soleil; cette parabole est divisée en jours, jusqu'à une distance 5 fois et demie aussi grande que celle du Soleil à la Terre; c'est beaucoup plus que l'éloignement dans lequel les cometes disparoissent ordinairement à nos yeux. On voit qu'au point D la comete se trouveroit à 440 jours de son périhélie; l'abscisse SE, mesurée sur l'axe de la parabole, seroit alors de 3 fois et demie la distance du Soleil à la Terre, et l'ordonnée ED = 4 $\frac{1}{4}$. Je suppose qu'on ait divisé de même les autres paraboles; on pourra aisément en former d'autres en carton, sur une échelle triple de celle de la *figure* 267 : ces courbes étant découpées, on s'en servira comme je vais l'expliquer, pour trouver celle qui convient à trois observations d'une comete nouvelle. Il seroit facile de construire un instrument plus commode pour les opérations; et M. Struyck en décrit un dans son second ouvrage en 1753. Au reste les astronomes qui ont de l'habitude dans le calcul se passeront aisément des préliminaires que je vais expliquer, et commenceront par le calcul d'une hypothese (3140).

3129. Je prendrai pour exemple la comete que j'observai et que je calculai au mois de mai 1763. Soit S le Soleil (FIG. 263), ABC l'orbite de la Terre qui étoit en A le 17 mai, en B le 30 mai, et en C le 24 juin; la différence entre la longitude de la comete observée et la longitude du Soleil calculée par les tables, c'est-à-dire l'angle d'élongation de la comete réduite au plan de l'écliptique le 17 mai, fut observée de 11° $\frac{1}{3}$, dont la comete étoit à l'orient dans la premiere observation : je fais donc l'angle SAD de 11° $\frac{1}{3}$; je fais de même les angles SBE de 25° 50′, et SCF de 35° 20′; ce sont les élongations observées le 30 mai et le 24 juin : par ce moyen j'ai les trois lignes AD, BE, CF, au-dessus desquelles répondoit perpendiculairement la comete dans les trois observations. Il faut ensuite tendre au-dessus de ces trois lignes des fils qui fassent avec les lignes et avec le plan de la figure aux points A, B, C, des angles de 44° 10′, 38° 15′, et 18° 56′; ce sont les latitudes de la comete vues de la Terre dans les trois observations; ces fils représenteront les trois rayons visuels dirigés de la Terre à la comete. Je suppose que le demi-cercle ABCL qui exprime l'orbite terrestre soit évidé d'un côté, afin que le centre S soit libre et qu'on puisse y présenter les paraboles de la FIG. 267.

3130. On prendra la parabole de 18 jours, c'est-à-dire celle

dont la distance périhélie est trois dixiemes de celle du Soleil (3119), et plaçant le foyer de cette parabole en S, on présentera sa circonférence contre les fils tendus des points A, B, C, au-dessus des lignes AD, BE, CF; alors on verra que cette parabole est trop petite pour pouvoir s'ajuster contre ces fils dans leur partie inférieure près des points A, B, C, et qu'elle est trop oblique, c'est-à-dire trop longue et trop étroite pour pouvoir y convenir dans des parties plus éloignées, du côté des points D, E, F.

3131. On prendra donc des paraboles plus larges; l'on trouvera bientôt que celle de 109 jours est la plus convenable, la plus approchante des fils, celle qui s'y ajuste le mieux; on tournera cette parabole en différens sens, pour faire en sorte que les nombres de jours qui seront interceptés entre les fils soient égaux aux intervalles des observations, qui, dans l'exemple proposé, sont de 13 et de 25 jours. On verra facilement qu'en mettant le périhélie ou le sommet de cette parabole sur le fil du milieu qui répond au-dessus de BE, le fil de la droite touche la parabole en G, 13 jours avant le périhélie, et que le fil de la gauche la touche en K, 25 jours plus loin que le périhélie : cela fait voir que la comete passoit par le périhélie lorsqu'elle paroissoit en H, aux environs du 30 mai, et que sa distance au Soleil étoit 10, c'est-à-dire égale à celle du Soleil : on verra même à-peu-près les distances réduites à l'écliptique dans les trois observations, c'est-à-dire les lignes SG, SH, SK; et l'on sera en état de former une hypothese fort approchante des observations, avec laquelle on commencera les calculs (3140).

3132. De toutes ces paraboles, que je suppose divisées en jours, et que l'on présente successivement sous les fils, il n'y en a qu'une qui puisse remplir ces deux conditions (son foyer étant au centre S du Soleil) de toucher les trois lignes menées de la Terre à la comete dans les trois observations, et d'avoir entre les trois points de contact des intervalles de temps égaux à ceux qu'on a observés.

3133. Ainsi l'on est sûr de trouver, par l'opération pratique dont je viens de donner une idée, la parabole unique, propre à satisfaire aux trois longitudes et aux trois latitudes vues de la Terre. Non seulement on a la grandeur de cette parabole, c'est-à-dire sa distance périhélie; mais on a encore sa situation, c'est-à-dire le lieu de son périhélie et celui de son nœud; car on peut voir à quel point du cercle ABCL répond la section des deux plans ou le diametre qui forme la ligne commune du cercle et de la parabole, et c'est le lieu du nœud.

3134. La situation de l'orbite sera d'autant mieux déterminée

que les intervalles des temps seront plus longs, les longitudes et les latitudes observées plus éloignées l'une de l'autre, le mouvement plus inégal, et les anomalies de la comete plus différentes (3174): mais la méthode que je vais bientôt expliquer est générale, et ne suppose aucune condition dans les observations qu'on emploie.

3135. Quand on connoît à-peu-près, par une opération graphique, les élémens d'une comete, on doit employer le calcul pour les trouver exactement. Pour cela nous ne pouvons rien faire de plus commode et de plus simple que d'employer des méthodes indirectes, comme nous l'avons fait pour déterminer les orbites des planetes par trois observations (1293). Nous supposerons donc connu ce qu'il s'agit de trouver, et, avec un petit nombre de fausses positions, nous parviendrons bientôt à trouver exactement ce que nous cherchons. Ce fut probablement la route de Halley, qui le premier entreprit ces calculs. Bradley resta seul, après la mort de Halley, dépositaire de la méthode de calculer les cometes; il calcula celles de 1723, 1737 et 1742, et, dans le mois de septembre 1742, il envoya en France les élémens de celle-ci avec une idée de sa méthode (*Théorie des Cometes* de M. le Monnier, 1743; *Instit. astr., pag.* 349). Maraldi, à l'occasion d'une petite comete qui avoit paru au commencement de l'année 1743, donna le premier calcul de comete qui ait été fait en France (*la Caille, Ephém.* 1765, *pag.* xliij). Cette méthode fut perfectionnée par la Caille (*Mém. acad.* 1746; *Leçons d'astr.* 1761). Enfin je crois l'avoir moi-même rendue plus simple, dans ma théorie des cometes (3101), et sur-tout dans l'explication suivante.

3136. On choisit d'abord deux longitudes et deux latitudes observées; on cherche les paraboles qui peuvent satisfaire à ces deux observations: quand on a deux ou trois paraboles, c'est-à-dire deux ou trois hypotheses qui s'accordent également bien avec les deux observations; on calcule dans chacune de ces trois hypotheses le lieu de la comete au temps de la troisieme observation; celle des hypotheses qui s'accorde le mieux avec le calcul de cette troisieme observation est la meilleure; et une simple regle de proportion suffit quelquefois pour trouver une autre hypothese, qui satisfait exactement à toutes trois.

3137. La premiere partie du problême des cometes consiste à trouver plusieurs paraboles qui satisfassent à deux observations (3129), c'est-à-dire avec lesquelles on ait les mêmes longitudes et latitudes que par observation, et l'intervalle de temps observé entre ces deux positions de la comete; mais, parceque ce problême est

indéterminé, et qu'il a une infinité de solutions, on suppose les distances de la comete au Soleil, telles que SG et SH (FIG. 263 et 264), données pour le temps des deux observations : et, en faisant varier une de ces dist., on trouve les dimensions d'une parabole qui satisfait aux deux observations faites quand la Terre étoit en A et en B.

3138. L'on peut commencer à lever l'indétermination de la premiere hypothese en tirant un grand cercle par les deux observations extrêmes : si la comete dans l'observation intermédiaire s'en écarte vers le côté où est le Soleil, c'est une preuve que la distance réelle de la comete au Soleil est plus grande que celle de la Terre (Lambert, *Mémoires de Berlin*, 1771). Par cette considération l'on sait du moins s'il faut supposer SG plus ou moins grande que la distance du Soleil à la Terre.

3139. Lorsqu'on suppose d'autres valeurs pour les distances SG et SH de la comete au Soleil, on trouve les dimensions d'une autre parabole qui satisfait encore aux deux premieres observations, et c'est entre plusieurs de ces paraboles qu'on cherche ensuite celle qui doit convenir à la troisieme observation, faite quand la Terre étoit en C ; alors on est sûr d'avoir trouvé la parabole qui satisfait aux trois observations, et qui représente le cours de la comete, ou du moins qui en approche beaucoup. On trouve souvent des erreurs de 3 ou 4′ dans le calcul des autres observations que l'on compare avec une parabole ainsi déterminée, soit parceque la route véritable de la comete n'est une parabole qu'à-peu-près (3103), soit parceque les observations des cometes ne sont exactes fort souvent qu'à une minute près.

3140. Je vais donner ici la suite de toutes les regles qu'il faut suivre et de toutes les analogies qu'il faut faire pour calculer une orbite ; l'exemple sera expliqué séparément (3158).

Je suppose une quantité quelconque à volonté, et même au hasard, pour la distance GS de la comete au Soleil réduite à l'écliptique, en sorte que le point G soit la projection de la comete sur l'écliptique au temps de la premiere observation ; je connois par observation l'angle d'élongation SAG (3129), et par les tables la distance AS du Soleil à la Terre ; je cherche l'angle à la comete, ou l'angle G de la parallaxe annuelle, par l'analogie suivante :

La dist. supposée GS *de la comete au Soleil dans la premiere observ.*
Est au sinus de l'élongation observée GAS
Comme la distance AS *du Soleil à la Terre*
Est au sinus de l'angle AGS *au centre de la comete.*

Cet angle peut être pris tel qu'on le trouvera dans la table des

sinus ; on peut aussi employer le supplément de la quantité trouvée, si l'on veut supposer obtus l'angle SgA (3158). On ajoutera l'angle AGS avec l'angle d'élongation GAS, et le supplément de la somme sera l'angle de commutation GSA ; cet angle, ôté du lieu de la Terre A (qui est toujours plus grand de six signes que celui du Soleil), ou ajouté, si la ligne SG étoit plus orientale que la ligne SA, donnera la longitude héliocentrique de la comete sur la ligne SG.

3141. On trouvera ensuite sa latitude héliocentrique par l'analogie suivante (1145) :

Le sinus de l'angle d'élongation observé GAS
Est au sinus de l'angle de commutation GSA
Comme la tangente de la latit. géocentrique de la comete observée
Est à la tangente de la latitude héliocentrique de la comete.

3142. Ayant fait les mêmes opérations, pour la seconde observation, avec SH supposée à volonté d'une certaine quantité et l'angle SBH, qui est la seconde élongation observée, l'on aura la longitude et la latitude héliocentrique du point H, ou de la comete, dans la seconde observation. Ayant ainsi deux longitudes de la comete, vues du Soleil, on aura leur différence, qui est le mouvement héliocentrique réduit à l'écliptique dans l'intervalle des deux observations ; il faut en conclure le mouvement sur l'orbite. Soit NMO (FIG. 265) l'écliptique, NRQ l'orbite vue du Soleil, P le pole de l'écliptique, Q et R les deux positions de la comete, OQ et MR les deux latitudes héliocentriques trouvées par les calculs précédens, OM le mouvement de la comete sur l'écliptique, ou la différence des longitudes héliocentriques trouvées ; il s'agit d'avoir le mouvement RQ sur l'orbite ; on fera les deux analogies suivantes (3915) : si les arcs sont fort petits, il faudra mettre une très grande précision dans le calcul, ou bien employer d'autres méthodes (4180, 4181). On peut aussi employer l'analogie de Neper (3984) pour trouver d'abord les deux angles Q et R par les tangentes de la demi-somme et de la demi-différence. Voici les analogies que l'on fait quand on emploie la perpendiculaire QX :

Le sinus total
Est au cosinus de l'angle P, *mouvement sur l'écliptique,*
Comme la cotangente de la plus grande latitude OQ
Est à la tangente du premier segment PX.

On retranchera ce segment du complément PR de la plus petite latitude héliocentrique calculée, et l'on aura l'autre segment RX. Si l'angle P étoit obtus, et que la perpendiculaire tombât en dehors il faudroit ajouter PX avec PR pour avoir RX.

Le cosinus du premier segment PX
Est au cosinus du second segment RX
Comme le sinus de la plus grande des deux latitudes QO
Est au cosinus du mouvement QR *de la comete sur son orbite.*

On prendra le quart de ce mouvement, dont on fera usage dans l'article suivant.

Si l'une des deux latitudes étoit boréale et l'autre australe, on mettroit le point R au-dessous de M. le nœud N seroit entre deux; PR seroit la somme de 90° et de la latitude australe.

On remarque si la longitude héliocentrique dans la seconde observation est plus grande que dans la premiere, car alors la comete est directe; si la seconde est la plus petite, la comete est rétrograde.

3143. Les distances SG, SH (FIG. 263) de la comete au Soleil, qui sont dans le plan de l'écliptique, étant divisées chacune par le cosinus de la latitude héliocentrique correspondante (3141), donnent les distances de la comete au Soleil en ligne droite dans le plan de son orbite (1137), ou les rayons vecteurs. On a donc deux rayons vecteurs de la parabole avec l'angle compris; on trouve le lieu du périhélie par la regle suivante (3123): on retranche le logarithme du plus petit rayon vecteur de celui du plus grand; on prend la moitié du reste, c'est le logarithme de la tangente d'un angle, dont il faut ôter 45°: le logarithme de la tangente du reste, moins le logarithme de la tangente du quart du mouvement (3142) donne le logarithme de la tangente d'un angle, auquel on ajoute le quart du mouvement, pour avoir la moitié de la plus grande anomalie vraie (3123); on prend aussi leur différence, et l'on a la plus petite: en doublant ces quantités, on a les deux anomalies vraies.

3144. Le logarithme du cosinus de la plus grande des deux moitiés d'anomalie vraie, ajouté deux fois avec celui du plus grand des deux rayons vecteurs, donnera le logarithme de la distance périhélie (3122); on y ajoutera sa moitié, pour avoir les $\frac{3}{2}$ du logarithme de la distance périhélie (3121), dont on fera usage dans l'article suivant.

Les deux anomalies vraies, qu'on a trouvées ci-dessus, sont du même côté du périhélie quand leur différence est égale au mouvement héliocentrique total de la comete sur son orbite (3142); elles sont l'une avant et l'autre après le périhélie, quand c'est leur somme qui fait le mouvement total de la comete. Dans le premier cas, si la seconde anomalie est plus petite que la premiere, c'est une preuve que la comete n'a point encore atteint son périhélie; mais si l'anomalie qui répond à la premiere observation étoit la

plus petite des deux, ce seroit une preuve que le périhélie a précédé les deux observations. Dans le second cas, c'est-à-dire lorsqu'il a fallu ajouter les deux anomalies pour faire la valeur du mouvement total QR de la comete sur son orbite, on est assuré que le périhélie est arrivé dans l'intervalle qu'il y a eu entre les deux observations; si la comete est directe, on saura que le périhélie est plus avancé que la premiere des deux longitudes héliocentriques trouvées, et qu'elle n'a pas encore passé par son périhélie au temps de la premiere observation, ce qui sera nécessaire dans la suite du calcul (3149).

3145. Avec les deux anomalies vraies trouvées on cherchera les jours et milliemes de jours correspondans dans la table générale; on prendra leur différence ou leur somme, suivant que les deux anomalies seront d'un seul côté ou des deux côtés du périhélie; on aura un intervalle en jours et en décimales de jours. Pour trouver celui qui convient à l'orbite de la comete il faut au logarithme de l'intervalle donné par la table ajouter les $\frac{3}{2}$ du logarithme de la distance périhélie (3120) et l'on a le logarithme du temps que donne la parabole trouvée pour l'intervalle entre les deux observations. Si cet intervalle de temps est exactement celui qui a été observé, c'est une preuve que les deux distances SG et SH, qu'on a suposées dans ce calcul, donnent une parabole qui satisfait à ces deux observations, et la premiere hypothese est finie.

3146. Mais comme ce nombre de jours n'est jamais d'accord avec celui qui a été observé, on suppose une autre distance SH dans la seconde observation; on conserve la premiere distance SG avec la longitude et la latitude qu'on en a déduites (3140, 3141), et refaisant tous les calculs des articles 3142 — 3145, on a une autre valeur pour l'intervalle de temps entre les deux observations. Si cet intervalle approche davantage de celui qui a été observé, on reconnoît que la seconde supposition est préférable; on change encore la seconde distance pour former une troisieme supposition dont on cherche l'erreur. Ainsi, par le progrès des erreurs, ou par leur diminution, l'on verra bientôt quelle distance SH il faut supposer dans la seconde observation, pour avoir une parabole qui satisfasse à ces deux observations: j'appellerai cette premiere parabole qui satisfait aux deux observations, Premiere hypothese.

3147. Pour former cette hypothese j'ai supposé connues les deux distances acourcies de la comete au Soleil, et j'en ai fait varier une jusqu'à ce qu'elles aient formé une parabole assujettie

aux

aux deux observations; mais lorsqu'un des angles à la comete approche fort d'être droit, la distance accourcie de la Terre au Soleil qui est opposée à cet angle ne peut servir à le calculer avec précision, parceque les sinus varient trop peu vers 90°; on ne sait pas d'ailleurs s'il faut supposer l'angle aigu ou obtus (3140, 3159). Pour remédier à cet inconvénient, on pourroit commencer par supposer connu ou l'angle au Soleil ou l'angle à la comete, c'est-à-dire supposer le lieu héliocentrique de la comete, au lieu de le calculer d'après la distance, comme dans l'article 3140. On peut voir un procédé semblable dans ma *Théorie des cometes (pag. 116)*, appliqué à la comete de 1757, où cette difficulté pouvoit avoir lieu.

Il est quelquefois commode pour lors de prendre une distance réduite pour former les hypotheses, et un angle de commutation qui répond à l'autre distance pour former les différentes suppositions que renferme cette hypothese : c'est ainsi que je l'ai pratiqué pour la comete de 1769. Mais il arrive communément que la premiere distance avec une seconde plus ou moins différente, sans changer l'espece de l'angle à la comete, forme une hypothese qui satisfait également à deux observations.

Lorsque le mouvement héliocentrique trouvé (3142) a produit un intervalle de jours trop grand, on peut juger aussi, du moins en général, qu'il faut diminuer ce mouvement héliocentrique, et par conséquent la seconde longitude (si la comete est directe), pour se rapprocher de l'intervalle donné, et changer en conséquence la distance pour former la seconde supposition.

Enfin il arrivera quelquefois que, soit en augmentant, soit en diminuant la seconde distance SH, on ne pourra parvenir à un intervalle de temps qui approche de l'observation; ce sera une preuve que la premiere distance SG est trop grande ou trop petite; et on l'augmentera si l'on veut trouver un plus grand nombre de jours.

3148. Lorsqu'on a une premiere hypothese complete ou une parabole qui satisfait à deux observations, on auroit la véritable orbite cherchée, si elle satisfaisoit également à la troisieme observation; mais on ne rencontre jamais cette exactitude dans une premiere hypothese, et l'on est obligé d'en faire plusieurs autres (3155) : cependant on éprouve d'abord si la premiere hypothese convient à la 3e observation, comme nous allons le dire avant que de passer à une 2e hypothese (3155); parceque le sens dans lequel est l'erreur, suffit à un astronome exercé pour juger si l'on

doit augmenter ou diminuer la distance SG pour former la seconde hypothese.

3149. La troisieme observation calculée dans cette hypothese ou dans cette parabole trouvée, nous fera connoître si elle approche de la vérité. Pour calculer cette troisieme observation, il faut d'abord trouver le temps du passage au périhélie, l'inclinaison sur l'écliptique, le lieu du nœud, et celui du périhélie sur l'orbite.

On prend l'un des deux nombres de jours qu'on a trouvés par les deux anomalies vraies; par exemple, celui qui convient à la premiere observation; le logarithme de ce nombre de jours ajouté avec les $\frac{3}{2}$ du logarithme de la distance périhélie donnera celui du véritable intervalle de temps (3121) écoulé entre la premiere observation et le passage au périhélie: on ajoutera ce nombre de jours avec le temps de l'observation, si elle a été faite avant le périhélie (3144). Il est bon de faire le même calcul par les deux nombres de jours, pour savoir si l'on trouve par chacun la même heure et la même minute pour le passage au périhélie.

3150. Le lieu du nœud N (fig. 265) et l'angle d'inclinaison RNM se trouveront par le moyen du triangle PQR, dont nous avons déja fait usage (3142), et du triangle RMN, en faisant les analogies suivantes:

I. *Le sinus du segment* RX
Est au sinus du segment PX
Comme la tang. de l'angle P *ou du mouvement sur l'éclipt.*
Est à la tangente de l'angle R (3911).

II. *Le rayon*
Est au sinus de la plus petite latitude RM
Comme la tangente de l'angle R
Est à la tang. de la dist. au nœud NM *sur l'éclipt.* (3882).

III. *Le rayon*
Est au sinus de l'angle R
Comme le cosinus de la plus petite latitude RM
Est au cosinus de l'inclinaison ou de l'angle N (3885).
Si la latitude RM *est trop petite, il faut employer* RM *et* NM (3890) *pour éviter le cosinus.*

IV. *Le sinus de l'inclinaison* N
Est au sinus de la plus petite latitude RM
Comme le rayon
Est au sinus de la dist. au nœud NR *sur l'orbite* (3873).

3151. La distance au nœud comptée sur l'écliptique ou l'arc MN s'ajoute avec la longitude héliocentrique du point M sur l'écliptique,

si la comete est directe, et que sa latitude héliocentrique soit décroissante, ou si elle est rétrograde, et que sa latitude aille en croissant; il se retranche dans les autres cas, et l'on a la longitude du nœud N. Ce sera le nœud ascendant si RM est une latitude boréale croissante ou australe décroissante; ce sera le nœud descendant, si la latitude est boréale décroissante ou australe croissante.

Si le mouvement de la comete surpassoit six signes ou 180°, comme cela est arrivé souvent, et spécialement en 1769, on prendroit pour l'angle P ce qui manqueroit pour aller à 12 signes; et pour faire la figure de maniere à ne pas se tromper dans le calcul, on supposeroit, non pas que la comete a été de Q en R, selon l'ordre des signes, l'occident étant toujours à droite; mais que la comete a été d'abord en R, et qu'ensuite ayant tourné par-dessous la figure, elle est revenue en Q pour la seconde observation. Si elle étoit rétrograde, ce seroit le contraire.

Il sera bon de chercher aussi le lieu du nœud N par le moyen de la longitude du point O, afin de voir si l'on trouvera pour le nœud la même longitude. Pour cela on ajoutera MO avec MN (à moins que le point N ne soit au milieu) pour avoir NO; et l'on ajoutera cet arc avec la longitude héliocentrique du point O, s'il est moins avancé que le nœud.

3152. Pour avoir la longitude du périhélie, on ajoutera la longitude du nœud N avec NR, si le nœud est moins avancé que la longitude héliocentrique du point M, et l'on aura la longitude du point R sur l'orbite de la comete. On y ajoutera l'anomalie de la comete pour l'observation R, si la comete, étant directe, n'avoit pas encore passé son périhélie en R, ou si, étant rétrograde, elle l'a déja passé (3144); dans les autres cas on retranchera l'anomalie de la longitude du point R, et l'on aura le lieu du périhélie, qui se compte toujours sur l'orbite de la comete, ainsi que les longitudes des aphélies et celles des planetes, chacune sur leur orbite (1132).

On fera bien de chercher également le lieu du périhélie par l'observation faite en Q : si le résultat est exactement le même par les deux observations, on sera sûr de ne s'être point trompé dans les signes pour les opérations précédentes. On ajoutera donc la longitude du nœud N avec NQ pour avoir la longitude du point Q; et l'on y ajoutera l'anomalie de la comete dans le temps de l'observation faite en Q, où l'on prendra leur différence suivant les cas; on aura le lieu du périhélie.

3153. On connoît ainsi tous les élémens de la parabole, qui satisfait à deux observations, et l'on est en état de calculer, dans la

même hypothese, le lieu de la comete vu de la Terre pour le temps de la troisieme observation, lorsque la Terre étoit en C (FIG. 263) et que la comete étoit en K; ce qui se fera par les regles suivantes.

Le logarithme de la différence entre le temps de la troisieme observation et le temps du passage par le périhélie (3149), moins les $\frac{3}{2}$ du logarithme de la distance périhélie, donnera le logarithme des jours de la table générale (3118), vis-à-vis desquels on trouvera l'anomalie vraie de la comete au temps de la 3e observation: la somme ou la différence du lieu du périhélie et de l'anomalie vraie de la comete donnera la longitude vraie de la comete dans la troisieme observation comptée sur son orbite: on prendra la somme, si la comete, ayant un mouvement direct, a déja passé le périhélie au temps de la 3e observation; les autres cas sont faciles à appercevoir. La différence entre cette longitude et celle du nœud (3151) donnera l'argument de latitude. Connoissant l'inclinaison de l'orbite (3150) et l'argument de latitude, on trouvera la longitude héliocentrique réduite à l'écliptique (1130), marquée par la ligne SK, et la latitude héliocentrique (1129). Elle sera boréale si la comete, étant directe, a une longitude plus grande que celle de son nœud ascendant, ou plus petite que celle du nœud descendant.

3154. On ajoutera le log. cos. de la latitude héliocentrique avec le log. de la distance périhélie (3144), et l'on en ôtera le double du cosinus de la moitié de l'anomalie vraie (3122); on aura le log. de la distance accourcie SK (1137) dans la troisieme observation: si cette distance est plus petite que celle du Soleil au même jour, on traitera la comete comme une planete inférieure, et l'on suivra les regles ordinaires que nous avons données dans les tables des planetes, *pag.* 112, etc. ou à l'art. 1142. Au moyen de la longitude et de la latitude héliocentriques et de la distance au Soleil, on trouvera la longitude et la latitude vues de la Terre (1142). Elles devroient être d'accord avec celles qu'on a observées, si l'hypothese étoit exacte, et que la parabole trouvée fût réellement celle que la comete a décrite.

3155. Il n'arrive jamais que la 3e observation s'accorde assez bien avec le calcul de la premiere hypothese; on passe donc nécessairement à une seconde. On suppose, pour la distance SG dans la premiere observation, une autre quantité plus ou moins grande que celle qu'on avoit supposée pour la premiere hypothese (3140); et en faisant sur la seconde distance SH diverses suppositions, on trouve celle qu'il faut prendre pour avoir une seconde parabole qui

représente encore les deux observations; et c'est la *seconde hypothese.* On calcule tous les élémens de la comete dans cette seconde parabole (3149 et suiv.); on cherche aussi le lieu de la comete vu de la Terre pour le temps de la 3ᵉ observation, dans cette seconde hypothese, ou dans la seconde parabole trouvée; et l'on voit quelle est l'erreur de cette hypothese ou combien elle s'écarte de la troisieme observation. Si les erreurs des deux hypotheses ne sont que de quelques minutes, on pourra, par une simple regle de trois, trouver quelles étoient les distances réduites SG et SH, qu'il falloit supposer; l'on formera une *troisieme hypothese*, dans laquelle on calculera tous les élémens de la comete (3149 et suiv.), et qui satisfera à la troisieme observation de même qu'aux deux premieres.

Si l'on a un plus grand nombre d'observations, on pourra les calculer aussi avec ces mêmes élémens. Il est absolument nécessaire de vérifier ainsi une parabole quand elle est calculée, de peur que, dans une des trois observations qu'on a prises, il ne se soit glissé quelque erreur qui produiroit une différence considérable dans les élémens qu'on a trouvés. D'ailleurs on parvient quelquefois à représenter un mois entier d'observations, à une ou deux minutes près; et une observation plus éloignée différera de dix ou douze minutes du calcul : il est donc nécessaire de calculer un plus grand nombre d'observations pour s'assurer de la théorie qu'on a trouvée.

3156. Lorsqu'on veut calculer le retour d'une comete ou connoître ses élémens avec beaucoup de précision, il y a deux considérations à employer dans la réduction des observations, la parallaxe et l'aberration. Pour avoir la parallaxe d'une comete, il faut avoir sa distance à la Terre (1146), et, divisant 8″ 6 par la distance de la comete (celle du Soleil prise pour unité), l'on a la parallaxe horizontale (1631), et par conséquent la parallaxe en longitude et en latitude pour l'heure de l'observation (1666). On prendra le nonagésime dans une table (1685), et l'on se contentera de prendre le premier terme de la parallaxe de latitude, si elle n'est pas fort grande.

On appliquera ces parallaxes à la longitude observée, dans un sens contraire à celui que nous avons indiqué (1866) lorsqu'il s'agissoit de trouver la longitude apparente, puisqu'ici c'est la longitude vraie que nous cherchons.

Les cometes qui approchent beaucoup de la Terre ont une très grande parallaxe, au point que, dans certains cas, on pourroit s'en servir pour déterminer avec exactitude celle du Soleil : la comete de 1770 a passé 50 fois plus près de nous que le Soleil; elle auroit pu servir à cet usage.

3157. L'aberration des cometes a été expliquée (2885); mais elle exige qu'on connoisse la distance et le mouvement diurne géocentrique par le moyen de deux longitudes observées ou calculées. Il faut ajouter l'aberration à la longitude observée, quand cette longitude va en croissant. C'est ainsi que toutes les observations dont on veut se servir pour calculer rigoureusement une orbite doivent être dégagées des effets qui ne dépendent pas simplement de l'orbite parabolique ou elliptique dont on veut faire le calcul, et qui varient dans le cours d'une seule apparition.

3158. Exemple. Pour faire l'application de ces calculs, je choisirai la comete de 1757, ainsi que je l'avois fait dans la Théorie publiée en 1759 : voici les trois observations dont je me servis pour déterminer son orbite ; il y en avoit une faite aux environs du nœud, et j'ai réduit la longitude au temps précis où la latitude auroit été nulle; c'est une attention qui simplifie les calculs.

Temps moyen à Paris.	Longit. de la comete observée.	Latitude observée.	Lieu du Soleil calculé.	Distance du Soleil à la Terre.
Sept. 15 15^h 47′	3^s 10° 22′	10°20′ Bor.	5^s 23° 23′	1,0042
Sept. 30 6 8	5 1 42	0 0	6 7 42	1,0000
Oct. 12 16 42	5 26 19	3 $3\frac{1}{3}$ Aust.	6 20 1	0,9965

L'intervalle entre les deux premieres observations est de 14^j 14^h 21′; les 14^h 21′, converties en décimales de jour par la petite table qui est à la fin de la table générale, font $\frac{60}{100}$. Nous allons essayer de trouver une parabole qui soit assujettie aux deux premieres longitudes observées, et à cet intervalle de temps 14^j 60.

3159. Ayant supposé le Soleil en S (fig. 264), la Terre en A, et formé l'angle SAD égal à l'élongation observée, il s'agit de chercher en quel point G de cette ligne doit être placé le lieu de la comete réduit au plan de l'écliptique. Mais nous ne connoissons pas, même à-peu-près, les dimensions de l'orbite que nous cherchons: supposons donc, au hasard, que la comete, le 15 septembre, étoit aussi éloignée du Soleil que la Terre dans ses distances moyennes, ou que la distance accourcie SG de la comete au Soleil étoit 1 ; d'après cette supposition nous allons déterminer tout le reste, et chercher d'abord, par differens essais, quelle doit être la distance SH dans la seconde observation, pour que l'intervalle de 14^j60 puisse avoir lieu.

Premiere supposition. Que SH soit supposée, par exemple, de 0,6000, ou six dixiemes de la distance moyenne du Soleil; dans le triangle ASG on connoît AS distance de la Terre au Soleil, le 15 septembre, = 1,0042; SG distance réduite de la comete au Soleil = 1; SAG, qui est l'élongation observée, = 2ˢ 13° 1′, ou la différence entre le lieu du Soleil et le lieu de la comete : on dira donc (3140) 1,0000 : sin. 73° 1′ : : 1,0042 : sin. 73° 49′ 23″; c'est l'angle *G*, l'angle à la comete ou la parallaxe annuelle; en l'ajoutant avec l'angle à la Terre 73° 1′, et prenant le supplément de la somme, on a l'angle au Soleil ou l'angle de commutation ASG, de 33° 9′ 37″, qui, ajouté avec la longitude de la Terre 11ˢ 23° 23′ (toujours opposée à celle du Soleil), donne la longitude héliocentrique de la comete 0ˢ 26° 32′ 37″. Si la comete étoit plus occidentale ou moins avancée en longitude que la Terre A, il faudroit retrancher la commutation de la longitude de la Terre pour avoir celle de la comete.

L'angle G ou l'angle à la comete peut être aigu ou obtus; car, au lieu du point G, on pourroit prendre le point *g*, tel que S*g* fût égal à SG : les deux conditions de la distance au Soleil et de l'élongation observée ou de l'angle A ne déterminent rien à cet égard; et toutes les fois qu'on a un triangle rectiligne ASG, dont deux côtés inégaux sont donnés avec l'angle opposé à l'un d'eux, le côté opposé à cet angle, lorsqu'il est plus petit que SA, peut avoir deux valeurs égales SG, S*g*, qui rendront pour le troisieme angle S des valeurs d'autant plus différentes que l'angle G sera plus aigu ou plus obtus : cela ne produira dans les calculs aucune incertitude, pourvu que l'on prenne l'angle G toujours de même espece dans les différentes suppositions d'une même hypothese; mais le choix que l'on fait de l'un ou de l'autre entre pour beaucoup dans le résultat. Afin de ne pas s'écarter trop des observations, il est toujours utile de faire des figures exactes, qui conduisent le calcul, et montrent à-peu-près le choix que l'on doit faire des hypotheses pour en diminuer le tâtonnement. On est obligé souvent de faire obtus l'angle à la comete, pour avoir un mouvement plus ou moins grand, et qui puisse satisfaire à l'intervalle des jours donnés.

3160. Dans la seconde observation faite en H, l'on dira 0,6000 : sin. 36° 0′ : : 1,0000 : sin. 78° 25′ 9″ (3140); c'est l'angle à la comete dans la seconde observation, c'est-à-dire BHS : mais je supposerai cet angle obtus pour ne pas avoir un mouvement trop grand, sans quoi le point *h*, dans lequel S*h* = SH, supposeroit la comete à une trop grande distance de la Terre : ajoutant donc 101° 34′ 51″ avec l'élongation observée 36° 0′ 0″, le supplément de la somme,

ou 42° 25′ 9″, est l'angle de commutation, qui, ajouté avec la longitude de la Terre 7° 42′ 0″, donne la longitude héliocentrique de la comete en H, 1^s 20° 7′ 9″, plus grande que la premiere de 23° 34′ 32″.

Pour trouver la latitude héliocentrique de la comete dans la premiere observation, on fera cette proportion (1145) : le sinus de l'angle à la Terre 73° 1′ est au sinus de l'angle au Soleil 33° 9′ 37″ comme la tangente de la latitude géocentrique observée 10° 20′ est à la tangente de la latitude héliocentrique 5° 57′ 11″.

Pour connoître la distance de la comete au Soleil dans son orbite, c'est-à-dire le rayon vecteur, on ôtera du logarithme de la distance accourcie, que l'on a supposée 1,0000, celui du cosinus de la latitude trouvée, et l'on aura le logarithme du rayon vecteur 0,00235 pour la premiere observation (3143). On feroit également ces deux opérations pour la seconde, si l'on n'avoit pas pu la choisir dans le nœud même, où il n'y a ni latitude ni réduction pour la distance; ainsi le rayon vecteur SH est la distance même que l'on a supposée 0,6000 (3159).

3161. Pour connoître le mouvement de la comete sur son orbite, on formera un triangle NRM (FIG. 265), dans lequel NM sera le mouvement de la comete, vu du Soleil et réduit à l'écliptique, 23° 34′ 32″, et MR la latitude héliocentrique dans la premiere observation, N étant le lieu de la seconde observation : on dira R : cos. NM :: cos. MR : cos. NR (3886); et l'on aura le mouvement sur l'orbite 24° 16′ 26″; c'est aussi la différence des anomalies vraies de la comete dans ces deux observations : il en faut prendre le quart, 6° 4′ 6″ $\frac{1}{2}$.

Si dans la seconde observation la comete avoit eu une latitude, comme QO, on se serviroit du triangle PQR pour trouver le mouvement QR sur l'orbite (3142).

Il y a aussi des cas où le mouvement vu du Soleil est très petit; l'usage des cosinus exposeroit alors à de trop grandes erreurs : on considere alors le triangle QRX comme un triangle rectiligne, dans lequel RX est égal à la différence des latitudes observées, et QX = P · sin. PQ (3879), et l'on cherche l'hypoténuse QR par la trigonométrie rectiligne : c'est ce que j'ai été obligé de faire en calculant l'orbite de la comete de 1769, par les premieres observations qu'on avoit faites; on peut aussi employer la formule 3917.

3162. Pour trouver les deux anomalies vraies, l'on prendra la moitié de la différence des logarithmes des deux rayons vecteurs (3123), c'est 0,11210, qui, dans les tangentes, répond à 52° 18′ 49″; on en ôtera 45°, et le log. tang. du reste, moins le log. tang. du quart

du

du mouvement ($6° 4' 6'' \frac{1}{2}$), donnera celui de la tang. de 50° 21' 50"; on en ôtera, et l'on y ajoutera séparément le quart du mouvement; on doublera chaque résultat, et l'on aura les deux anomalies vraies 88° 35' 27", et 112° 51' 53"; la plus petite répond à la plus petite distance, c'est-à-dire à la seconde observation. Il est aisé de voir que ces deux anomalies sont du même côté du périhélie, puisque c'est leur différence 24° 16' 26" qui est le mouvement de la comete (3144).

On prend donc dans la table générale les jours qui répondent à ces deux anomalies, et l'on trouve 105^j, 670, et 217^j, 674, dont la différence est 112^j, 004; il faut les convertir en un nombre de jours qui convienne à la comete dont il s'agit.

Le log. cosinus de la moitié d'une des anomalies vraies trouvées, par exemple, celui de $56° 25' 56'' \frac{1}{2}$, étant ajouté deux fois à celui de la distance ou du rayon vecteur correspondant 0,002348, donne le log. de la distance périhélie (3144); les $\frac{3}{2}$ sont 9,231512 : ce log., ajouté avec celui de 112^j 004, donne celui de 19^j 087; c'est le nombre qui devroit être égal à 14^j 60, intervalle observé, si la distance 0,6000 eût été prise telle qu'il convenoit à la premiere distance 1, pour représenter l'intervalle des deux observations. Ainsi les distances de cette comete au Soleil étant supposées 1,0000 et 0,6000 avec les longitudes et les latitudes telles qu'elles ont été observées (3158), il y auroit 19 jours d'intervalle, au lieu de 14. Ce n'est donc pas 0,6000 qu'il falloit supposer pour la distance dans la seconde observation; il faut prendre une distance moins différente de la premiere, pour que le mouvement héliocentrique soit moindre, et que l'intervalle de temps qu'on trouvera soit moins considérable.

3163. Il y a des cas où, en diminuant la seconde distance pour se rapprocher de l'intervalle donné, on parvient au point où il n'est plus possible de faire la proportion qui doit donner l'angle à la comete dans la seconde observation; c'est une preuve que l'hypothese ne peut avoir lieu, et il faudra diminuer la premiere distance supposée, c'est-à-dire former une autre hypothese. Quelquefois il suffit de rendre obtus l'angle à la comete, pour représenter l'intervalle donné.

3164. Dans notre exemple, il faudra faire une seconde supposition pour la distance SH : si l'on suppose 0,6400, on trouve 15^j, 25, intervalle qui est encore trop fort.

Troisieme supposition : si la distance SH est 0,6600, on trouve 13^j, 96, intervalle qui devient au contraire trop petit.

Quatrieme supposition, qui est entre les deux précédentes : si

l'on prend 0,6525, on trouve 14j 42, et cet intervalle est encore un peu trop petit.

Mais si l'on emploie enfin 0,6496, on trouve 14j,6026, qui approche beaucoup de l'intervalle observé [a]. Dans cette derniere supposition on trouve l'angle à la comete 115° 12′ pour la seconde observation, l'angle au Soleil 28° 48′, la longitude héliocentrique dans cette seconde observation 36° 30′; ôtant la premiere longitude 26° 32′ ½ (3159), on a, pour le mouvement MN sur l'écliptique, 9° 57′ ½; le mouvement NR sur l'orbite se trouve 11° 35′; les anomalies 124° 19′ et 135° 54′, le logar. de la distance périhélie 9,15143; les jours correspondans aux anomalies dans la table, 341, 546, et 615, 256, et l'intervalle 273j71; son log. ajouté avec les ³⁄₂ du log. de la distance périhélie, ou 8,72714, donne celui de 14j,6026, le même que dans l'observation. Telle est la premiere hypothese qui satisfait aux deux premieres observations; il ne s'agit plus que de voir combien elle s'écartera de la troisieme observation.

On peut déja remarquer, 1°. que cette comete est directe, puisque la seconde longitude héliocentrique est plus grande que la premiere; 2°. qu'elle n'avoit point encore passé le périhélie dans le temps de ces deux observations, puisque les rayons vecteurs vont en diminuant, et qu'ils sont tous deux du même côté du périhélie (3162).

3165. Pour calculer la troisieme observation dans cette premiere hypothese, il faut avoir le nœud, l'inclinaison et le périhélie. Le nœud est tout trouvé dans ce cas particulier, puisque la latitude est nulle dans la seconde observation; la longitude du nœud est celle de la comete dans cette observation, c'est-à-dire 36° 30′.

L'inclinaison se trouvera dans ce cas particulier, en disant (3882): le sinus du mouvement NM (FIG. 265) sur l'écliptique, ou de 9° 57′ ½, est au rayon comme la tangente de la latitude MR, dans la premiere observation, 5° 57′, est à la tangente de l'inclinaison N = 31° 5′, parceque, dans le triangle NMR (FIG. 265), où NM est l'écliptique (3142), R le lieu de la comete dans la premiere observation, N est le lieu de la comete dans son nœud au temps de la seconde observation; il ne s'agit donc que de résoudre le triangle NMR. Si l'une des observations n'étoit pas dans le nœud N, il y auroit deux triangles à résoudre (3150).

(a) On pourroit voir le détail de ce calcul et de ceux des articles suivans, dans le quatrieme volume de la seconde édition de cette Astronomie: M. Carouge avoit pris la peine de les faire avec un grand soin; mais cela eût été trop long pour cet ouvrage; je me contenterai de rapporter ici les principaux résultats, et seulement en minutes.

Pour trouver le lieu du périhélie, on ajoutera la longitude de la comete sur son orbite 36° 30′ avec l'anomalie qui répond à cette observation 124° 19′, et l'on aura 5^s 10° 49′ pour le lieu du périhélie dans cette hypothese. Si l'observation étoit arrivée après le périhélie, et que la comete fût également directe, il faudroit retrancher l'anomalie de la longitude pour avoir le périhélie. Si l'une des longitudes n'étoit pas sur l'orbite même de la comete, il faudroit l'y réduire, en prenant d'abord la distance au nœud comptée sur l'écliptique telle que NM, et disant : cos. N : R :: tang. NM : tang. NR (3884).

Il faut avoir encore le temps où une comete avec ces élémens auroit passé par le périhélie dans la même hypothese. Pour cela on choisit un des nombres de jours trouvés ci-dessus, par exemple, 615 256; on le convertit en jours de cette comete (3120), ce qui fait 32^j,824, ou 32^j 19^h 47′; on ajoute ce temps avec celui de l'observation, 15 sept. 15^h 47′, parcequ'elle a précédé le périhélie, et l'on trouve le 18 octobre 11^h 34′, passage de la comete par son périhélie.

3166. La 3e observation qu'il s'agit de calculer fut faite le 12 octobre à 16^h 42′; la distance au périhélie est donc de 5^j 18^h 52′, ou de 5^j, 786 : on convertit ce nombre en jours de la table, en ôtant de son log. les $\frac{3}{2}$ de celui de la distance périhélie, et l'on a 108^j, 457, avec lesquels on trouve dans la table 89° 35′ 36″ d'anomalie, pour le temps de la troisieme observation.

Cette anomalie doit être ôtée du lieu du périhélie, 5^s 10° 49′, puisque la comete n'étoit pas encore à son périhélie, et qu'elle étoit directe : il reste la longitude héliocentrique de la comete sur son orbite dans la 3e observation, 2^s 11° 13′. Pour la réduire à l'écliptique, on prend sa distance au nœud le plus proche qui étoit à 36° 30′; cette distance de 34° 43′ est l'argument de latitude, et l'on fait ces deux proportions (3899, 3898) : R : cos. 31° 5′ :: tang. 34° 43′ : tang. 30° 41′, argument de latitude réduit à l'écliptique; R : sin. 31° 5′ :: sin. 34° 43′ : sin. 17° 6′, latitude héliocentrique dans la 3e observation. Puisque la distance au nœud est 30° 41′, et que le nœud est à 36° 30′ de longitude, il s'ensuit que la longitude réduite à l'écliptique est 2^s 7° 11′; celle du Soleil est 6^s 20° 1′; on la retranchera de celle de la comete, qui d'ailleurs est dans le cas des planetes inférieures (1142), sa distance réduite étant plus petite que celle de la Terre au Soleil; et l'on aura la commutation 7^s 17° 10′ (*Voyez les tables, pag.* 119, à la fin).

Le log. de la distance périhélie étant ajouté avec celui du cosinus de la latitude 17° 6′, moins deux fois celui du cos. de la demi-ano-

malie 44° 47′ ½, on a le log. de la distance réduite de la comete au Soleil 9,42974 (3122, 1137) : ce logarithme se retranche de celui de la distance du Soleil à la Terre 9,99848, et il reste celui de la tang. de 74° 53′¾; on en ôte 45° (3850) ; le log. de la tang. du reste, ajouté avec celui de la tang. de la demi-commutation ou de son supplément 66° 25, donne celui de la tang. de 52° 47′ ; cette quantité, ôtée de 66° 25′, donne l'élongation de la comete 13° 38′; on ôte cette élongation (1143) de la longitude du Soleil 6ˢ 20° 1′, et l'on a la longitude géocentrique de la comete 6ˢ 6° 23′, plus grande de 10° 4′ que la longitude observée 5ˢ 26° 19′.

3167. Ainsi cette premiere hypothese, dans laquelle nous avions supposé 1,0000 pour la distance de la comete au Soleil le 15 sept., et dans laquelle nous avons trouvé qu'il falloit supposer 0,6496 pour 30 septembre, afin de satisfaire aux deux premieres observations, représente mal la troisieme; il faut donc former une seconde hypothese, dans laquelle la premiere distance soit plus petite, et donne à la comete un mouvement plus petit; par exemple, au lieu de 1,0000, nous supposerons 0,9700 seulement, pour le 15 de septembre.

3168. Seconde hypothese. La distance de la comete au Soleil réduite à l'écliptique dans la premiere observation étant supposée 0,9700, il faut faire, comme dans la premiere hypothese, différentes suppositions (3164) pour la distance qui convient à la seconde observation du 15 septembre; et, par de semblables calculs, on trouvera que c'est 0,6587 qu'il faut supposer le 15 septembre, pour que ces deux distances donnent une parabole où l'intervalle des deux longitudes observées soit de 14ʲ 60 : dans cette seconde hypothese on trouve le nœud à 34° 52′, l'inclinaison 15° 55′, le périhélie 4ˢ 11° 24′, le passage au périhélie pour le 20 octobre 20ʰ 59′, le log. de la distance périhélie 9,46526, la longitude pour le 12 octobre 5ˢ 28° 38′ trop grande de 2° 19′.

3169. Ces erreurs en longitude de 10° 4′ et de 2° 19′ sont trop grandes pour qu'on puisse espérer, par de simples parties proportionelles, d'avoir précisément deux distances exactes, c'est-à-dire propres à former une troisieme hypothese qui satisfasse aux trois observations : si l'on fait cette proportion, 7° 45′ différence des deux erreurs est à 300, différence des deux distances, comme la plus petite erreur 2° 19′ est à 90, et qu'on ôte cette partie proportionelle de 0,9700, on a 0,9610 pour la distance qu'il faudroit supposer; mais ayant formé une autre hypothese sur cette distance, on trouve encore une erreur sensible dans le calcul de la troisieme observation. J'ai reconnu que c'étoit 0,9643 qu'il falloit enfin adopter pour la

valeur de SG; et, par différentes suppositions, j'ai trouvé que la seconde distance SH = 0,6675 étoit celle qui convenoit à cette hypothese pour satisfaire aux deux premieres observations.

3170. DERNIERE HYPOTHESE. Avec les deux distances SG, SH, 0,9643 et 0,6675, on trouve, par le calcul des articles 3159 et suiv., les longitudes héliocentriques 15° 31′ et 33° 24′ $\frac{2}{3}$; les anomalies 107° 13′ et 88° 52′, le logarithme de la distance périhélie 9,53192, et l'intervalle qui répond à la différence des anomalies 14^j 6023, à-peu-près conforme à l'observation. Les nombres de jours qui répondent dans la table générale à ces anomalies étant réduits en jours de la comete par l'addition des $\frac{3}{2}$ du log. de la dist. périhélie, donnent 35^j 731 et 21^j 132; ces intervalles, ajoutés respectivement aux temps des deux observations, donnent chacun séparément le passage au périhélie pour le 21 octobre 9^h 20′. La seconde longitude 33° 24′ $\frac{2}{3}$, qui est aussi le lieu du nœud descendant, étant comptée sur l'orbite de la comete, on l'ajoute avec l'anomalie correspondante 88° 52′, et l'on a le lieu du périhélie, qui se compte toujours sur l'orbite 4^s 2° 17′. On la peut trouver également par la premiere observation, car le mouvement sur l'orbite, qui est de 18° 20 $\frac{1}{2}$, étant ôté de la seconde longitude sur l'orbite, on a la premiere longitude comptée sur l'orbite de la comete 15° 4′; et en y ajoutant la premiere anomalie, on trouve 122° 17′ pour le lieu du périhélie.

L'inclinaison se trouve en disant (3165) : le sinus de l'arc NM = 17° 53′ $\frac{2}{3}$, parcouru sur l'écliptique depuis la premiere observation jusqu'à la seconde qui a été faite dans le nœud, est à la tangente de la latitude MR = 4° 6′ $\frac{1}{2}$, dans la premiere observation, comme le rayon est à la tangente de 13° 9′ $\frac{1}{2}$; c'est l'inclinaison de l'orbite.

3171. La troisieme observation est éloignée du périhélie de 8^j 16^h 38′, qui, réduits en jours de la table, font 43^j,787, et répondent à 52° 27′ 44″ d'anomalie; ainsi la longitude sur l'orbite au temps de la 3e observation est 2^s 9° 49′ $\frac{1}{3}$, et le nœud étant 1^s 3° 24′ $\frac{2}{3}$, l'argument de latitude sera 36° 24′ $\frac{2}{3}$; on le réduira à l'écliptique, comme dans l'art. (3166), et l'on aura 35° 41′, qui, ajoutés avec le lieu du nœud, donneront la longitude réduite 2^s 9° 6′, et la commutation 7^s 19° 5′.

Le rayon est au sinus de l'inclinaison, comme le sinus de l'argument de latitude 36° 24′ 37″ est au sinus de la latitude héliocentrique 7° 46′; le log. de son cosinus étant ajouté à celui de la distance périhélie, on en ôtera le double du log. cos. de 26° 13′ $\frac{2}{3}$, qui est la demi-anomalie, et l'on aura pour logar. de la distance au Soleil réduite à l'écliptique 9,62228; enfin on trouvera l'élongation de la comete 23° 41′, et sa longitude géocentrique 5^s 26° 20′; elle ne

differe que d'une minute de la longitude observée, ce qui me dispensera d'étendre cet exemple plus loin.

3172. M. Pingré ayant rassemblé et combiné 42 observations de cette comete faites en différens lieux, a établi les élémens d'une maniere peu différente du résultat auquel je suis parvenu dans les calculs précédens; on le trouvera dans la table des élémens, *p.* 257.

3173. Nous n'avons employé jusqu'ici, pour faire nos hypotheses, que les mouvemens ou les erreurs en longitude : mais il y a des cas où le changement en latitude étant plus rapide, il seroit plus utile de l'employer; telle est, par exemple, la comete de 1264, qui fit plus de 40° en latitude, sans changer sa longitude de trois degrés; ou les cometes de 1593, 1672, 1683, 1707, dont les orbites sont presque perpendiculaires à l'écliptique.

Le calcul qu'il faudra faire dans ces cas-là sera le même que celui dont nous avons donné l'exemple, si ce n'est qu'on examinera les erreurs en latitude au lieu des erreurs sur la longitude. Ayant supposé une distance dans la premiere observation (3159), et cherché la distance dans la seconde observation, telle que l'intervalle de temps qui en résulte soit d'accord avec celui qui a été observé, et ayant formé deux hypotheses qui représentent chacune exactement cet intervalle, comme on l'a vu ci-devant, on calculera dans chacune de ces deux hypotheses la latitude au temps de la troisieme observation, au lieu de calculer la longitude (3166); on les corrigera par le progrès des erreurs, en faisant des parties proportionelles, jusqu'à ce qu'on ait une hypothese qui représente exactement cette latitude, et l'hypothese donnera les véritables élémens.

3174. Si l'on observe une comete fort éloignée de la Terre, si, pendant le temps de son apparition, il y a peu de changement dans la longitude ou dans la distance au Soleil, le lieu du périhélie et la distance périhélie ne sauroient guere se conclure avec exactitude (3134) : telle est la comete de 1729, sur laquelle Maraldi et M. Kies différoient beaucoup (3181) pour le périhélie, quoiqu'elle eût été observée pendant six mois.

3175. De même si les latitudes géocentriques ont été peu inégales, l'inclinaison ou le lieu du nœud en seront d'autant moins sûrs; et si les latitudes sont petites, l'inclinaison se trouvera avec moins de précision. Dans la grande comete de 1744, la latitude géocentrique n'alla pas à 20°, quoique l'inclinaison qui en résulte soit de 47°; mais le grand nombre d'observations exactes y a suppléé. Dans la comete de 1769, que je calculai le premier à Bourg-en-Bresse, la latitude observée n'avoit pas excédé 10° 37′, et l'incli-

naison de l'orbite étoit de 41° : en pareil cas le lieu du nœud est déterminé avec beaucoup plus de précision que l'inclinaison. Dans la comete de 1788 la latitude vue du Soleil n'a changé que de quelques minutes, en sorte que le nœud est sujet à quelque incertitude. Le mouvement héliocentrique étoit si petit que M. Méchain a préféré d'employer la méthode de M. de la Place (*Mém. de l'ac.* 1780).

3176. Quand une comete est très éloignée et qu'elle a peu de mouvement, on peut trouver deux paraboles très voisines du Soleil, et deux paraboles très éloignées, qui satisfassent à-peu-près à trois observations peu distantes entre elles, comme le reconnut, en 1781, M. Boscowich à l'occasion de la planete de Herschel, que l'on calculoit ainsi que les cometes (*Boscowich, T. III, pag.* 389, 403); mais une quatrieme observation leve bientôt cette indétermination apparente.

3177. C'est par des essais à-peu-près semblables à ceux que nous avons expliqués, mais bien plus longs sans doute, que Halley détermina par les anciennes observations 24 paraboles ou orbites cométaires, y compris celle de 1698. Bradley, Maraldi, la Caille, Struick, Douwes, M. Pingré, M. Méchain et moi en avons calculé plusieurs autres, en sorte que le nombre s'est accru jusqu'à 78, y compris celles de 1790.

3178. Les éléмens d'une comete sont les cinq articles qui déterminent la situation et la grandeur de l'orbite qu'elle a décrite, et qui établissent sa théorie : le lieu du nœud vu du Soleil, l'inclinaison, le lieu du périhélie, la distance dans le périhélie, et le temps moyen du passage, qui tient lieu d'époque; on y ajoute la direction de son mouvement, qui peut être direct ou rétrograde. Nous y ajouterions l'excentricité, si elle n'étoit inconnue dans la plupart des cometes. Tels sont les résultats contenus dans la table suivante, qui contient en abrégé le fruit de toutes les observations faites sur les cometes jusqu'à présent (février 1790).

3179. Les distances périhélies marquées dans la 6e colonne supposent que la distance moyenne du Soleil à la Terre est l'unité; si l'on veut la supposer de 100000, il n'y a qu'à ôter la virgule qui sépare les décimales, et prendre cinq chiffres après la virgule, en ajoutant, s'il le faut, un ou plusieurs zéros. Par exemple, on aura 41081 pour la distance périhélie de la comete de 1264, et 45000 pour celle de 1301. Mais la plupart des astronomes préferent actuellement l'usage des fractions décimales, qui supposent 1 pour la distance du Soleil; c'est ainsi que nous l'avons supposée dans nos tables des planetes.

ÉLÉMENS

Des LXXVIII *Cometes qui ont été observées et calculées jusqu'en* 1790.

Ordre des Cometes.	Années de l'appar.	Longitude du Nœud ascendant. S. D. M. S.	Inclinaison de l'Orbite. D. M. S.	Lieu du Périhélie. S. D. M. S.	Distance périhélie, celle du Soleil étant 1.	Passage au Périhélie Temps moyen à Paris. Jours.	H. M. S.	Mouvement.	Noms des Auteurs qui ont calculé ces orbites, avec la note des articles de ce Livre où il en est parlé.
I.	837	6 26 33	10 ou 12°	9 19 3	0,58	1 Mars.......		Rétrograde.	*M. Pingré*, art. (3180).
II.	1231	0 13 30	6 5	4 14 48	0,9478	30 Janvier.....	7 22 0	Directe.	*M. Pingré* (3180).
III.	1264	5 19 0	36 30	9 21 0 0	0,445	6 Juillet......	8 0 0	Directe.	*Dunthorn* (3180).
		5 28 45	30 25	9 5 45 0	0,41081	17 Juillet......	6 10 0	Directe.	*M. Pingré* (3180).
IV.	1299	3 17 8	68 57	0 3 20	0,3179	31 Mars.......	7 38 0	Rétrograde.	*M. Pingré* (3180).
V.	1301	0 15 envir.	70 envir.	9 ou 10s	0,457	22 Octob. environ.		Rétrograde.	*M. Pingré* (3180).
VI.	1337	2 24 21	32 11	1 7 59	0,40666	2 Juin.........	6 34 0	Rétrograde.	*Halley*, à-peu-près.
		2 6 22	32 11	0 20	0,6445	1 Juin	0 40 0		*M. Pingré* (3180).
49	1456	1 18 30	17 56	10 1 0	0,5855	8 Juin........	22 10 0	Rétrograde.	*M. Pingré*, à-peu-p. (3183).
VII.	1472	9 11 46 20	5 20	1 15 33 30	0,54273	28 Février	22 32 0	Rétrograde.	*Halley*, à-peu-près (3092).
49	1531	1 19 25	17 56	10 1 39	0,56700	24 Août	21 27 0	Rétrograde.	*Halley*, à-peu-près (3193).
19	1532	2 20 27	32 36	3 21 7	0,50910	19 Octobre ...	22 21 0	Directe.	*Halley*, à-peu-près (3184).
VIII.	1533	4 5 44	35 49	4 27 16	0,2028	16 Juin.........	19 39 0	Rétrograde.	*Douwes*, à-peu-près (3180).
3	1556	5 25 42	32 6 30	9 8 50	0,46390	21 Avril........	20 12 0	Directe.	*Hall.*, à-peu-p. (3184, 2202).
IX.	1577	0 25 52	74 32 45	4 9 22	0,18342	26 Octobre ...	18 54 0	Rétrograde.	*Halley* (3093).
X.	1580	0 19 7 37	64 51 50	3 19 11 55	0,59553	28 Novemb...	13 54 0	Directe.	*M. Pingré* (3180).
XI.	1582	7 5 ou 21	59 ou 61	8 5 ou 9 11	0,23 ou 0,04	7 Mai,........		Rétrograde.	*M. Pingré*, à-peu-p. (3202).
XII.	1585	1 7 42 30	6 4	0 8 51	1,09358	7 Oct. N. S.	19 29 0	Directe.	*Halley* (3080).
XIII.	1590	5 15 30 40	29 40 40	7 6 54 30	0,57661	8 Fév. N. S.	3 54 0	Rétrograde.	*Halley*.
XIV.	1593	5 14 15 0	87 58	5 26 19	0,08911	18 Juil. N. S.	13 48 0	Directe.	*La Caille*, à-peu-près.
XV.	1596	10 15 36 50	52 9 45	7 28 30 50	0,549415	8 Août........	15 43 0	Rétrograde.	*M. Pingré* (3180, 3202).
49	1607	1 20 21	17 2	10 2 16 0	0,58680	26 Octobre ...	3 59 0	Rétrograde.	*Halley* (3183).
XVI.	1618	9 23 25	21 28	10 18 20 0	0,51298	17 Août	3 12 0	Directe.	*M. Pingré*, à-peu-près.
XVII.	1618	2 16 1	37 34	0 2 14 0	0,37975	8 Novemb...	12 32 0	Directe.	*Halley*.
XVIII.	1652	2 28 10	79 28 0	0 28 18 40	0,84750	12 Novemb...	15 49 0	Directe.	*Halley*.
XIX.	1661	2 22 30 30	32 35 50	3 25 58 40	0,44851	26 Janvier	23 50 0	Directe.	*Halley* (*Hevel. comet.*).
XX.	1664	2 21 14	21 18 30	4 10 41 25	1,025755	4 Décembre.	12 1 0	Rétrograde.	*Halley* (3096).
XXI.	1665	7 18 2	76 5 0	2 11 54 30	0,10649	24 Avril........	5 24 0	Rétrograde.	*Halley*.
XXII.	1672	9 27 30 30	83 22 10	1 16 59 30	0,69739	1 Mars.......	8 46 0	Directe.	*Halley*.
XXIII.	1677	7 26 49 10	79 3 15	4 17 37 5	0,28059	6 Mai	0 46 0	Rétrograde.	*Halley*.
XXIV.	1678	5 11 40 0	3 4 20	10 27 46 0	1,23801	26 Août........	14 12 0	Directe.	*Douwes*, à-peu-près.
XXV.	1680	9 1 57 13	61 22 55	8 22 40 10	0,006030	18 Décembre.	0 10 22	Directe.	*M. Pingré* (3099, 3216).
49	1682	1 21 16 30	17 56 0	10 2 52 45	0,58328	14 Septemb...	7 48 0	Rétrograde.	*Halley*. C'est celle de 1759.
XXVI.	1683	5 23 23 0	83 11 0	2 25 29 30	0,56020	13 Juillet......	2 59 0	Retrograde.	*Halley*.
XXVII.	1684	8 28 15 0	65 48 40	7 28 52 0	0,96015	8 Juin	10 25 0	Directe.	*Halley*.
XXVIII.	1686	11 20 34 40	31 21 40	2 17 0 30	0,32500	16 Septemb..	14 42 0	Directe.	*Halley*.
XXIX.	1689	10 23 45 20	69 17 0	8 23 44 45	0,01689	1 Décembre.	15 5 0	Rétrograde.	*M. Pingré*, à-peu-près.
XXX.	1698	8 27 44 15	11 46 0	9 0 51 15	0,69129	18 Octobre ...	17 6 0	Rétrograde.	*Halley*.
XXXI.	1699	10 21 45 35	69 20 0	7 2 31 6	0,75435	13 Janvier	8 32 0	Rétrograde.	*La Caille*, à-peu-près.
XXXII.	1702	6 9 25 15	4 30 0	4 18 41 3	0,64590	13 Mars.......	14 22 0	Directe.	*La Caille*, à-peu-près.
XXXIII.	1706	0 13 11 23	55 14 5	2 12 36 25	0,426865	30 Janvier	5 5 0	Directe.	*Struyck*.
XXXIV.	1707	1 22 50 29	88 37 40	2 19 58 9	0,85904	11 Décembre.	23 52 47	Directe.	*Struyck*.
XXXV.	1718	4 7 55 20	31 12 53	4 1 26 36	1,02565	15 Janvier	1 24 36	Rétrograde.	*Douwes*.
XXXVI.	1723	0 14 16 0	49 59 0	1 12 52 20	0,99865	27 Septemb..	16 20 0	Rétrograde.	*Bradley*.
XXXVII.	1729	10 10 32 37	76 58 4	10 22 40 0	4,26140	25 Juin........	11 16 0	Directe.	*La Caille* (*Mém.* 1763).
		10 10 35 15	77 1 53	10 22 16 53	4,0698	23 Juin........	6 45 22		*Douwes*.
XXXVIII.	1737	7 16 22 0	18 20 45	10 25 55 0	0,22282	30 Janvier	8 30 0	Directe.	*Bradley*.
XXXIX.	1739	6 27 25 14	55 42 44	3 12 38 40	0,67358	17 Juin	10 9 0	Rétrograde.	*La Caille*.

ÉLÉMENS

Des LXXVIII *Cometes qui ont été observées et calculées jusqu'en* 1790.

Ordre des Cometes.	Années de l'appar.	Longitude du Nœud ascendant. S. D. M. S.	Inclinaison de l'Orbite. D. M. S.	Lieu du Périhélie. S. D. M. S.	Distance périhélie, celle du Soleil étant 1.	Passage au Périhélie, Temps moyen à Paris. Jours.	H. M. S.	Mouvement.	Noms des Auteurs qui ont calculé ces orbites, avec la note des articles de ce Livre où il en est parlé.
XL.	1742	6 5 38 29	66 59 14	7 7 35 13	0,76563	8 Février....	4 48 0	Rétrograde.	*La Caille.*
		6 5 34 45	67 4 11	7 7 33 14	0,765555	8 Février....	4 30 30	Rétrograde.	*Struyck.*
XLI.	1743	2 8 21 15	2 19 33	3 2 41 45	0,83501	10 Janvier	20 35 0	Directe.	*La Caille*, à-peu-près.
		2 8 10 48	2 15 50	3 2 58 4	0,838115	10 Janvier	21 24 57		*Struyck.*
XLII.	1743	0 5 16 25	45 48 20	8 6 33 52	0,52157	20 Septemb..	21 26 0	Rétrograde.	*Klinkenberg.*
XLIII.	1744	1 15 45 20	47 8 36	6 17 12 55	0,22206	1 Mars.......	8 26 20	Directe.	*Bliss*, très exacte.
XLIV.	1746	4 27 18 50	79 6 20	9 7 2 0	2,19851	3 Mars 1747	7 20 0	Rétrograde.	*La Caille* (*Mém.* 1748).
XLV.	1748	7 22 52 16	85 26 57	7 5 0 50	0,84067	28 Avril.......	19 34 45	Rétrograde.	*Maraldi.*
XLVI.	1748	1 4 39 43	56 59 3	9 6 9 24	0,65525	18 Juin	1 33 0	Directe.	*Struyck*, à-peu-près.
XLVII.	1757	7 4 4 0	12 48 0	4 2 49 0	0,3380	21 Octobre ...	9 56 0	Directe.	*M. Pingré* (*Mém.* 1757).
XLVIII.	1758	7 20 50 0	68 19 0	8 27 38 0	0,21535	11 Juin........	3 27 0	Directe.	*M. Pingré* (*Mém.* 1759).
XLIX.	1759	1 23 49 0	17 39 0	10 3 16 0	0,58349	12 Mars.......	13 41 0	Rétrograde.	*La Caille* (3183).
		1 23 45 35	17 40 14	10 3 8 10	0,58490	12 Mars.......	13 59 24		*La Lande.*
		1 23 49 21	17 35 20	10 3 16 20	0,58360	12 Mars.......	12 57 36		*Maraldi.* (*Mém.* 1759).
L.	1760	4 19 39 41	79 6 38	1 23 34 19	0,80139	27 Nov. 1759	0 11 57	D. au Lion.	*M. Pingré.*
LI.	1760	2 19 50 45	4 51 32	4 18 24 35	0,96599	16 Déc. 1759	21 13 0	R. Orion.	*La Caille* (3181).
LII.	1762	11 19 20 0	84 45 0	3 15 15 0	1,0124	28 Mai	15 27 0	Directe.	*La Lande, Mém* 1762, 1763.
		11 19 2 22	85 3 2	3 14 29 46	1,009856	28 Mai........	7 0 49		*Struyck.*
		11 18 55 31	85 22 21	3 15 22 23	1,01415	29 Mai........	0 27 48		*Maraldi.*
LIII.	1763	11 26 23 26	72 40 40	2 24 51 54	0,49876	1 Novemb...	19 52 58	Directe.	*M. Pingré* (*Mém.* 1774).
LIV.	1764	4 0 4 33	52 53 31	0 15 14 52	0,55522	12 Février....	13 51 36	Rétrograde.	*M. Pingré* (*Mém.* 1771).
LV.	1766	8 4 10 50	40 50 20	4 23 15 25	0,50533	17 Février	8 50 0	Rétrograde.	*P. Mém.* 1766, à-peu-près.
LVI.	1766	2 14 22 50	11 8 4	8 2 17 53	0,33274	22 Avril.......	20 55 40	Directe.	*M. Pingré* (*Mém.* 1773).
LVII.	1769	5 25 0 45	40 37 35	4 24 5 54	0,12376	7 Octobre...	12 30 0	Directe.	*La Lande, Mém.* 1769, 1775.
		5 25 6 33	40 48 49	4 24 11 7	0,12272	7 Octobre...	13 46 13		*Prosperin.*
LVIII.	1770	4 12 17 3	1 34 30	11 26 26 13	0,676893	14 Août	0 13 21	Directe.	*M. Pingré.*
		4 12 0 0	1 33 40	11 26 16 26	0,674381	13 Août.......	13 5 0	Dist. m. 3,148	*Lexell* (3199).
LIX.	1771	3 18 42 10	31 25 55	6 28 22 44	0,52824	22 Nov. 1770	5 48 0	Rétrograde.	*M. Pingré* (*Mém.* 1771).
LX.	1771	0 27 51 0	11 15 20	3 13 28 13	0,90576	18 Avril.......	22 14 27	Directe.	*M Pingré.*
LXI.	1772	8 12 43 5	18 59 40	3 18 6 22	1,01815	18 Février....	20 50 35	Directe.	*La Lande.*
LXII.	1773	4 1 15 37	61 25 21	2 15 35 43	1,1339	5 Septemb..	11 18 45	Directe.	*M. Pingré.*
LXIII.	1774	6 0 49 48	83 0 25	10 17 22 4	1,4286	15 Août	10 55 35	Directe.	*M. Méchain.*
LXIV.	1779	0 25 5 51	32 24 0	2 27 13 11	0,71312	4 Janvier.....	2 12 0	Directe.	*M. Méchain.*
		0 25 3 57	32 25 30	2 27 13 40	0,7132	4 Janvier	2 24 30		*Le Chev. d'Angos.*
LXV.	1780	4 4 9 19	53 48 5	8 6 21 18	0,09925	30 Septemb...	18 12 50	Rétrograde.	*M. Méchain.*
LXVI.	1781	2 23 0 38	81 43 26	7 29 11 25	0,775861	7 Juillet......	4 41 20	Directe.	*M. Méchain.*
LXVII.	1781	2 17 22 52	27 13 8	0 16 3 28	0,96101	29 Novemb...	12 41 46	Rétrograde.	*M. Méchain.*
LXVIII.	1783	1 24 13 50	53 9 9	1 15 24 46	1,5653	15 Novemb...	5 53 23	Directe.	*M. Méchain*, à-peu-près.
LXIX.	1784	1 26 49 21	51 9 12	2 20 44 24	0,70786	21 Janvier	4 57 0	Rétrograde.	*M. Méchain.*
LXX.	1784	2 26 52 9	47 55 8	10 28 54 57	0,650531	9 Avril.......	21 16 46	Rétrograde.	*M. le Chevalier d'Angos.*
LXXI.	1785	8 24 12 15	70 14 12	3 19 51 56	1,143398	27 Janvier	7 58 4	Directe.	*M. Méchain.*
LXXII.	1785	2 4 33 36	87 31 54	9 27 29 33	0,427300	8 Avril.......	9 8 12	Rétrograde.	*M. Méchain.*
LXXIII.	1786	6 14 22 40	50 54 28	5 9 25 36	0,41010	7 Juillet......	22 0 12	Directe.	*M. Méchain* (*Mém.* 1786).
LXXIV.	1787	3 16 51 36	48 15 51	0 7 24 9	0,34891	10 Mai........	19 58 0	Rétrograde.	*M. le P. de Saron* (*M.* 1787).
LXXV.	1788	5 7 10 38	12 28 20	3 9 8 27	1,06301	10 Novemb...	7 35 0	Rétrograde.	*M. Méchain* (*Mém.* 1788).
LXXVI.	1788	11 21 42 15	64 52 32	0 23 12 22	0,766911	20 Novemb...	9 13 45	Directe.	*M. Méchain.*
LXXVII.	1790	5 22	29 31	1 28	0,75	17 Janvier		Rétrograde.	*M. de S.*, à-peu-près
LXXVIII.	1790	8 27 8 37	56 58 13	3 21 44 37	1,063286	28 Janvier	7 45 33	Directe.	*M. Méchain.*

3180. Les cometes de 837, 1231, 1299, 1301 et 1337 ont été calculées par M. Pingré, sur des observations faites à la Chine, auxquelles il a joint aussi, pour celles de 1299 et 1301, quelques observations européennes. Pour celle de 1264, il faut voir les Transactions philosophiques de 1751 et les Mémoires de l'acad. de 1760. Celle de 1337 avoit été déja calculée par Halley; mais elle a été rectifiée par M. Pingré, sur des observations chinoises plus exactes que celles de Grégoras, dont Halley avoit fait usage. Celle de 1533 avoit été calculée par Halley, ensuite par M. Pingré; mais je n'ai rapporté que le calcul fait par Douwes, qui travailloit en Hollande avec Struyck : on mettoit auparavant 10° de plus à l'inclinaison, et 11 de plus pour le périhélie. J'ai rapporté les élémens de la comete de 1580 d'après M. Pingré, qui les a calculés plus exactement que Halley; celui-ci n'avoit pas eu connoissance des observations manuscrites de Tycho (437).

La comete de 1596 avoit été calculée par Halley, sur des observations de Mæstlin: M. Pingré y a employé les observations manuscrites de Tycho-Brahé.

Les chiffres arabes qui se trouvent dans la premiere colonne, parmi les chiffres romains, indiquent la ressemblance des cometes avec d'autres; ainsi le chiffre 49, qui est vis-à-vis de 1456, annonce que cette comete est la même que la XLIXe, qui est celle de 1759.

3181. J'ai rapporté de deux manieres différentes les élémens de quelques cometes, par exemple, de 1729; celle-ci ayant une très grande distance périhélie, et ayant fait très peu de chemin pendant six mois qu'elle fut observée, le calcul en est très délicat, comme l'observe la Caille (*Mém.* 1746), et l'on trouve une très grande différence entre les résultats des calculs; par exemple, elle avoit passé par son périhélie le 22 mai 1729, suivant Kies (*Acad. de Berlin* 1745, *Hist. pag.* 46); elle y passa deux mois plus tard, vers le 22 ou le 23 juillet, selon M. Maraldi (*Mém.* 1743). Struyck a donné des élémens calculés par Douwes, appliqués aux 44 observations de Cassini, rapportées dans les mémoires de 1730: la différence entre l'observation et le calcul n'a jamais été au-delà de $3'\frac{1}{2}$; ainsi ces élémens paroissent les meilleurs. On trouvera, dans les tables de Berlin et dans la Cométographie de M. Pingré, *Tom. II*, *pag.* 100 *et suiv.*, les résultats des différens calculs faits pour chaque comete : celle de 1769 y est rapportée de 13 manieres différentes; c'est la plus remarquable qui ait paru depuis que les astronomes se sont multipliés dans toutes les parties de l'Europe.

Les deux cometes de 1760 sont appellées cometes de 1759 par M. Pingré, parceque leur passage au périhélie étoit arrivé en effet en 1759. Il en est de même de celle qui fut apperçue le 9 janvier 1771, et qui peut être rapportée à 1770; mais j'ai conservé la date de l'apparition, qui est la plus remarquable et la plus commode.

La seconde comete de 1766 a été calculée par M. Pingré, en employant des observations faites à l'isle de Bourbon par M. de la Nux. Les élémens se sont trouvés très différens de ceux que lui avoient donnés les observations de M. Messier à Paris, parcequ'elles n'occupoient que peu de jours : avec les premiers élémens, on n'auroit pu reconnoître cette comete dans une autre apparition.

La comete de 1786 est celle que miss Caroline Herschel découvrit le 1 août. La soixante-quinzieme fut trouvée par M. Messier le 26 novembre 1788; c'est une des plus petites; elle a passé près du pole le 2 décembre. Comme sa latitude héliocentrique n'a changé que de quelques minutes, le nœud n'en est déterminé qu'à 10′ près; le 3 elle étoit quatre fois plus près de nous que le Soleil, et cependant on avoit peine à la distinguer à la vue simple.

La 76ᵉ fut découverte par miss Caroline Herschel, le 21 décembre 1788; elle passa à 2° du pole de l'écliptique le 4 février 1789 (*Connoissance des Temps*, 1791).

La 78ᵉ a été découverte le 9 janvier 1790, par M. Méchain, près du pied du Belier; c'est la 8ᵉ qui a été découverte par cet habile astronome, en comptant celle du 17 janvier 1786, dont il n'a pu déterminer les élémens, parcequ'elle n'a été observée que deux fois.

Enfin la soixante-dix-septieme a été apperçue encore par miss Herschel, le 7 janvier 1790, vers la constellation de Pégase; mais elle n'est pas encore calculée bien exactement.

Quoique dans la table il y ait des secondes à chaque colonne, il n'y a aucune orbite de comete où l'on puisse répondre des secondes, non plus que du 4ᵉ chiffre sur les décimales de la distance périhélie; mais j'ai rapporté les résultats tels que les astronomes les ont donnés.

Du retour des Cometes.

3182. Lorsque Newton eut reconnu que la comete de 1680 avoit décrit sensiblement une parabole pendant le temps de son apparition, avec des aires proportionnelles au temps (3100), il fut persuadé que cette comete étoit une véritable planete, et que l'orbite qui paroissoit une parabole n'étoit réellement que la partie inférieure d'une ellipse très grande et très alongée : *Diximus cometas*

esse genus planetarum, in orbibus valde excentricis circa Solem revolventium (*Princip. pag.* 508, *édit. de* 1687). Il savoit que ces ellipses très excentriques ressemblent à très peu près à des paraboles (3195), et en approchent d'autant plus que la distance périhélie est plus petite par rapport au grand axe de l'ellipse : *Hinc si cometae in orbem redeunt, orbes erunt ellipses* (*Princip. lib. III, prop.* 40, *cor.* 1).

Ce fut Halley qui, en 1705, eut la gloire de prouver, par le calcul des anciennes observations, ce que Newton avoit conclu des loix de sa physique. Halley démontra la ressemblance ou plutot l'identité de la comete de 1607 et de celle de 1682; et il annonça son retour pour 1759, prédiction qui s'est vérifiée sous nos yeux. J'ai donné, dans ma *Théorie des cometes,* à la suite de celle de Halley, l'histoire du retour de cette comete fameuse; on peut voir aussi ce que j'en ai dit dans les *Mémoires* de 1759, *pag.* 1. Il me suffira de retracer ici en peu de mots le progrès de nos connoissances à cet égard.

3183. Lorsque Halley eut calculé par les observations (3177) les paraboles de 24 cometes, il s'en trouva trois qui se ressembloient beaucoup, celles de 1531, de 1607 et de 1682; les trois paraboles étoient situées de même, les distances périhélies étoient égales, et les intervalles de temps étoient de 75 à 76 ans: il pensa dès lors que ce pouvoit être la même comete; cependant la différence de quelques degrés sur les inclinaisons et d'une année sur les périodes, lui paroissoit un peu trop forte, et il n'osoit prononcer sur l'identité; mais lorsqu'après les recherches qu'il fit des anciennes cometes il en eut trouvé trois autres, dont il est parlé dans les historiens sous les années 1456, 1380, 1305, à des intervalles de temps toujours à peu-près égaux, il ne douta plus que le retour ne fût certain, et il rejeta sur les attractions mutuelles des corps célestes les différences qu'il voyoit entre les diverses périodes de cette comete.

Tel fut donc le progrès de nos connoissances en ce genre. D'anciens philosophes regarderent les cometes comme des corps célestes et périodiques (3090). Newton en conclut qu'elles pouvoient décrire des ellipses très excentriques et reparoître à chaque révolution; Halley vérifia cette belle idée en calculant plusieurs cometes, parmi lesquelles il s'en trouva trois qui avoient décrit la même orbite; ce qui annonçoit trois apparitions : et cela s'est trouvé pleinement confirmé quand cette comete a reparu en 1759 dans la même orbite et après le même espace de temps. On peut même la reconnoître dans les cometes de 1230, 1155, 1080, 1006, etc. (*Voyez M. Pingré, T. II, pag.* 133). Ainsi, comme les périodes longues

et courtes sont à-peu-près alternatives, elle reviendra vers le mois de janvier 1834 à son périhélie. Dans cette saison la Terre n'est pas placée avantageusement pour qu'on puisse voir la comete dans tout son éclat.

3184. Il y a encore deux cometes dont on croit connoître les périodes et dont on espere le retour ; la premiere est celle de 1532 et de 1661 qu'on attend pour 1789 ou 1790; elle se retrouve dans les historiens, et sur-tout en 1402, 1145, 891, 245, et même l'année 11 avant Jésus-Chrit ; de maniere que ce qu'on en rapporte s'accorde avec les élémens calculés (M. Pingré, *pag.* 135). La piece de M. de la Grange qui a remporté le prix de l'académie en 1780, est relative au retour de cette comete, et le prix proposé pour 1782 avoit pour sujet la détermination de ses anciennes périodes. Mais il faut observer que si elle passoit à son périhélie dans le mois de juillet, on la verroit difficilement à son retour en 1790. Au reste M. Méchain, qui a remporté le prix de l'académie en 1782, ne trouve pas que les anciennes observations soient assez bien d'accord pour mettre ce retour hors de doute. *Mém. présentés,* Tome X.

3185. La comete de 1264 et de 1556 est attendue pour 1848 : au sujet de cette derniere on peut voir les *Mémoires de l'acad.* 1760, *et M. Pingré*, *pag.* 136 ; on peut la reconnoître dans les cometes de 975, 395 et de 874 avant notre ere.

La grande comete de 1680, suivant M. Halley, avoit paru 44 ans avant notre ere, ensuite 531 et 1106 ; dans ce cas-là ce seroit aussi celle dont parle Homere (*Iliad. IV,* 75) ; et elle auroit paru 619 ans avant notre ere. Si cette comete de 1680 acheve 7 révolut. en 4028 ans, elle a dû passer près de nous 2349 ans avant J. C. et peut servir à ceux qui veulent expliquer physiquement le déluge, comme Whiston, (*New theory of the earth*, *pag.* 186). Halley annonçoit son retour pour l'an 2254: mais il y a des doutes sur ces retours. Voyez à ce sujet ma Théorie des cometes, *pag.* 92, et M. Pingré, pag. 137.

3186. Struyck croyoit reconnoître la comete de 1652 dans celles de 1514, de 1378, 1240, 684, 132, avec une période de 138 ans ; mais cette période est fort douteuse (*M. Pingré,* T. II, pag. 143.).

Le même auteur donnoit à la comete de 1677 une période de 94 ans, et croyoit que c'étoit celle de 1582 : il trouvoit aussi des rapports entre celles de 1538 et de 1337 ; de 1577 et de 1399 ; de 1676 et de 1596 ; de 1665 et 1066 ; de 1684 et 1110 ; de 1686 et 1512 ; de 1702 et 1402 ; de 1707 et 1557 ; de 1739 et 1618 ; de 1718 et 1299 ; de 1737 et 1539 ; de 1743 et 1582 : enfin il pensoit que la belle comete de 1744 étoit celle de 1538, observée par Apian et

Gemma-Frisius ; mais ces identités sont très suspectes (*M. Pingré*, *pag.* 144, etc.). Quoi qu'il en soit de ces cometes, il est évident par le retour de celle de 1682, que les cometes sont périodiques, et que leurs orbites sont elliptiques, de même que celles des planetes (1220).

3187. Ainsi le problême de Képler, dont nous avons donné la solution (1237), a lieu également lorsqu'il s'agit des cometes ; quand la durée de la révolution est donnée on a le grand axe de l'ellipse, et par conséquent son excentricité, et le temps où la comete a passé par son périhélie : il s'agit alors de trouver pour un instant donné son anomalie vraie ; mais ce problême exige une très longue approximation.

Nous emploierons, pour trouver le vrai lieu d'une comete dans son ellipse, trois méthodes différentes ; 1°. la méthode indirecte (1238) que nous appliquerons aux cometes ; 2°. la méthode de Halley, qui a donné une table générale des segmens d'ellipses pour chaque degré d'anomalie excentrique ; 3°. celle qui consiste à réduire l'ellipse à une parabole.

Dans tous les corps qui tournent autour du Soleil les carrés des temps sont comme les cubes des distances (1224), et l'on verra que c'est une suite nécessaire des loix du mouvement planétaire (3546) : ainsi, connoissant la durée de la révolution sidérale d'une comete en jours, on doublera son logarithme, on ôtera le double du logarithme de la révolution sidérale de la Terre (3110) ; le tiers du reste sera le logarithme de la distance de la comete. Je suppose que la période soit de 28070 j. pour la comete de 1759 ; on trouvera 18,07576 pour la distance moyenne * ou le demi-axe de l'ellipse qui doit être décrite en 28070 jours. Si l'on en ôte la distance périhélie 0,58350, on aura l'excentricité de la comete 17,49226 ; pour calculer ses positions on cherchera le logarithme du demi petit axe (1246) ; ce log. est 0,6585498 ; on trouvera aussi pour les deux logarithmes constans (1243) 0,8925094 et 5,3001746.

3188. Connoissant la durée de la révolution, l'on trouve aisément l'anomalie moyenne pour un nombre de jours, en disant, 28070 sont à 360° ou 1296000″, comme le nombre de jours, compté depuis le périhélie, est à la quantité de l'anomalie moyenne en secondes et en

* La distance aphélie de cette comete de 1759 est de 1200 millions de lieues, et c'est celle qui s'éloigne le moins du Soleil ; on peut juger par-là de l'énorme distance de toutes les autres. Cette distance aphélie est 61 fois plus grande que la distance périhélie.

décimales (car on ne doit pas négliger ici les centiemes de secondes); ainsi pour $16^j\ 4^h\ 44'$, ou $16^j,19722$, on trouveroit $12'\ 27'',83$ d'anomalie moyenne.

3189. *Connoissant l'anomalie moyenne dans une ellipse très excentrique, trouver l'anomalie vraie.* Le nombre de jours écoulés depuis le périhélie fera d'abord trouver l'anomalie vraie dans la parabole (3121); on se servira de cette anomalie vraie qui est à-peu-près exacte, et on la convertira en anomalie moyenne (1244): si cette anomalie moyenne n'est pas exactement celle qui est donnée par l'intervalle de temps écoulé depuis le périhélie (3188), on augmentera ou l'on diminuera l'anomalie vraie supposée; on la convertira de nouveau en anomalie moyenne, et l'on trouvera par là quelle est celle qui produit exactement l'anomalie moyenne donnée.

3190. Exemple. Le 30 août 1762, la comete étant éloignée de son périhélie de $16^j\ 4^h\ 44'$, ou $16^j,19722$, et son anomalie moyenne $12'\ 27'',83$, on demande son anomalie vraie. Je suppose sa distance périhélie 0,5835; si du logarithme du nombre de jours 16,19722, on ôte les $\frac{3}{2}$ du logarithme de la distance périhélie, ou 9,6490613, on aura le logarithme d'un nombre de jours, avec lequel on cherchera dans la table générale, et l'on verra que l'anomalie vraie dans la parabole est de $45°\ 20'$ environ. Elle ne peut pas différer beaucoup de celle que nous cherchons dans l'ellipse: supposons-la donc de 45° juste, à compter du périhélie, ou 135°, en partant de l'aphélie; nous trouverons, pour l'anomalie moyenne qui répond à 45° dans l'ellipse, $12'\ 25'',46$, trop petite de $2'',37$.

Pour savoir combien ces $2''$ d'anomalie moyenne valent d'anomalie vraie, on peut encore se servir de la table générale; pour cela on les réduira en décimales de jours, en ajoutant au logar. de $2''$ celui de la révolution 28070^j moins celui de 360°; on ôtera les $\frac{3}{2}$ du log. de la distance périhélie; on aura le logar. de $0^j,1152$; ce qui, à proportion des différences qu'il y a vers 45° dans la table générale, donne $7'\ 1'',1$; c'est une preuve qu'il faut employer l'anomalie vraie $45°\ 7'\ 1''$, pour trouver l'anomalie moyenne $12'27'',83$ qui étoit donnée. En effet, convertissant de même l'anomalie vraie $45°\ 7'\ 1''$ de l'ellipse en anomalie moyenne, on trouve $12'\ 27'',83$.

3191. On pourroit trouver d'une autre maniere combien les $2'',37$ font de différence sur l'anomalie vraie, en répétant la même opération avec une anomalie vraie de 46°; on trouveroit $20''3$ de moins; d'où il seroit aisé de conclure, par une regle de trois, que l'anomalie vraie doit varier de $7'\ 1''$ pour $2'',37$ d'anomalie moyenne.

C'est ainsi qu'on trouve $45°\ 7'\ 0'',9$, ou $134°\ 52'\ 59'',1$ pour l'ano-

malie vraie cherchée, comptée de l'aphélie, qui répond à $12' 27'' 83$ d'anomalie moyenne, ou à $16^j\ 4^h\ 44'$ de distance au périhélie. M. Cagnoli trouve la même chose par sa méthode, Trigon., *p.* 380. On trouve aussi le rayon vecteur dans l'ellipse par la regle ordinaire (1246); il est dans notre exemple de 0,68226.

3192. Nous allons calculer le même exemple par la méthode de M. Cagnoli (1250). Il s'agit d'abord de trouver l'anomalie excentrique x, par le moyen de l'anomalie moyenne z, ou l'angle dont le sinus multiplié par l'excentricité (qui équivaut à 55°) soit égal à $z-x$, ou à $x-13'$. Au moyen de quelques tentatives avec les tables des sinus, on reconnoît facilement que le sinus de 5° 10′ satisfait à cette condition; car ce sinus multiplié par 55°, ou 0,09, donne 4°,95 ou $4^\circ\ 57' = 5^\circ\ 10' - 13'$.

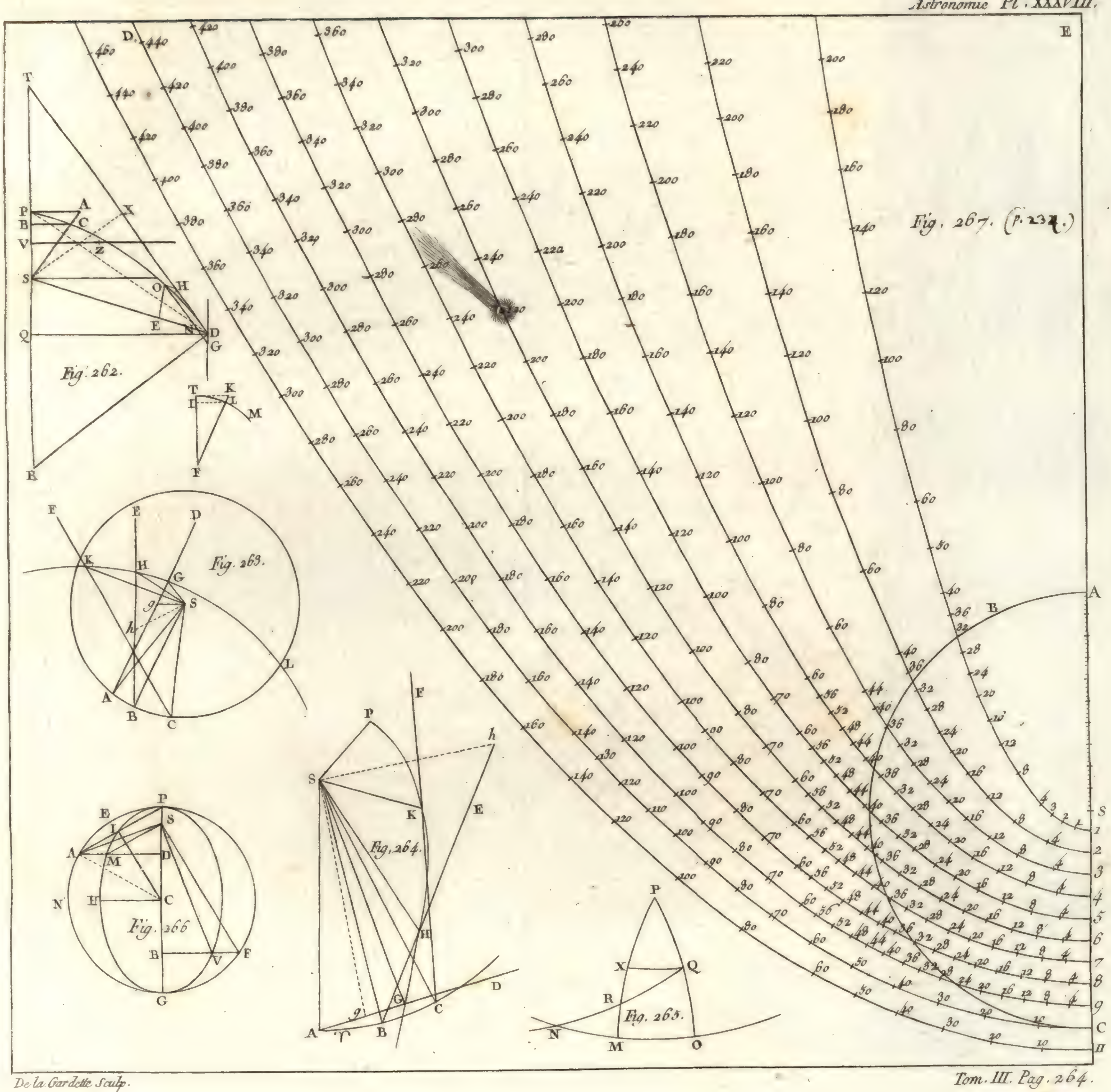
On multipliera donc le sinus de 5° 10′ par l'arc égal au rayon et l'on aura 17975″,195; mais $x-z = 5^\circ\ 10'$ moins 12′ 27″,83, ou 17852″,17; ainsi l'erreur de cette supposition est 123″,025: cette quantité, multipliée par $1 - e \cos. x$, ou 0,0362, donne 56′ 40″, correction à faire à l'anomalie excentrique 5° 10′; elle deviendra donc 6° 6′ 40″.

On recommencera le calcul avec la nouvelle anomalie excentrique 6° 6′ 40″, qui, multipliée par l'excentricité réduite en secondes, donne 21249″,478; la différence entre cette anomalie excentrique et l'anomalie moyenne 12′ 27″,83 est 21252″,170, plus grande de 2″,692 que celle qu'on a supposée; c'est l'erreur de z.

La quantité $e \cos. x = 0,96222$, et $\delta x = \frac{2'',692}{0,03778}$ (3447), le cos. x étant négatif; ainsi $\delta x = 1'\ 11'',255$; c'est la correction à faire à l'anomalie excentrique; et l'on aura 6° 5′ 29″. Si l'on emploie pour valeur de x l'anomalie qui tient le milieu entre les deux précédentes, 6° 6′ 4″, on trouvera 1′ 11″,29, correction exacte de l'anomalie excentrique 6° 6′ 40″; en sorte que $x = 6^\circ\ 5'\ 28'',71$. Son sinus multiplié par l'excentricité forme la quantité qui, ôtée de l'anomalie excentrique, donne l'anomalie moyenne 12′ 27″,83, telle qu'on la connoissoit d'avance; ainsi elle se trouve vérifiée (M. Cagnoli, *page* 380).

3193. Lorsqu'on a beaucoup d'observations à calculer dans une orbite fort excentrique, on peut faire, par cette méthode, ou par celle que nous allons expliquer, une table de l'anomalie vraie, de l'anomalie moyenne et de la distance du Soleil pour chaque degré d'anomalie excentrique dans l'ellipse: Halley en fit une pour les cometes de 1680 et 1682 (*Tables de Halley* 1759). Le choix

de



De la Gardette Sculp.

de l'anomalie excentrique donne une échelle ou une mesure moyenne qui diminue la grande inégalité qu'on trouveroit en prenant pour argument de la table, ou les jours, ou l'anomalie moyenne; d'ailleurs il en résulte une plus grande facilité pour construire cette table des anomalies vraies. Soit M le lieu de la comete dans son ellipse (FIG. 266), S le Soleil, PAN le cercle circonscrit, PA l'anomalie excentrique (1234). L'aire PSAEP, égale à l'anomalie moyenne (1235, 1239), est composée du segment de cercle PEAP et du triangle rectiligne PAS: on calculera le segment (3465) pour l'anomalie excentrique PA; Halley en a donné une table. Le triangle PSA est égal à $\frac{1}{2}$PS. AD, ou la moitié du produit de la distance périhélie et du sinus de l'anomalie excentr., le rayon CP étant l'unité; on calculera séparément ces deux parties, dont la somme formera la surface entiere PSAEP, qui est égale au secteur circulaire de l'anomalie moyenne : c'est ainsi que pour chaque degré d'anomalie excentrique on aura l'anomalie moyenne.

3194. Le rayon vecteur SM est égal à $PS + \frac{CS.PD}{CP}$ (3404); mais CP est à PD comme le rayon est au sinus verse de l'arc PA; donc $\frac{PD}{CP}$ est le sinus verse de l'anomalie excentrique; ainsi l'on aura le rayon vecteur en ajoutant à la distance périhélie le produit de l'excentricité par le sinus verse de l'anomalie excentrique.

Le sinus de l'anomalie vraie MSC est égal à $\frac{MD}{MS}$ (3803); or $MD = AD\frac{CH}{CP}$ (3387); c'est-à-dire que MD est égal au sinus de l'anomalie multiplié par le demi petit axe (1246); donc cette quantité, divisée par le rayon vecteur, donnera le sinus de l'anomalie vraie. Ainsi, par le moyen des segmens de cercle dont Halley a donné une table pour chaque degré d'anomalie excentrique, l'on peut calculer les anomalies vraies d'une comete quelconque dans son ellipse.

3195. La troisieme méthode que l'on peut employer pour trouver l'anomalie vraie dans une comete, à chaque degré d'anomalie moyenne, est fondée sur le peu de différence qu'il y a entre la parabole et une ellipse fort alongée: si la distance périhélie est la même dans les deux courbes, le parametre de l'ellipse est à celui de la parabole, comme la distance aphélie est au grand axe; et les vîtesses périhélies sont comme les racines des parametres. (Voyez ma *Théorie des cometes, pag.* 95). Il est aisé de calculer dans plusieurs points la petite différence entre la parabole et l'ellipse pour les réduire l'une à l'autre; c'est la méthode que j'ai employée dans le calcul de la comete de 1759 (*Ib. pag.* 115). Il suffit pour cela de

calculer l'anomalie vraie et le rayon vecteur, soit dans la parabole (3122), soit dans l'ellipse (3194), pour en avoir la différence à chaque degré d'anomalie moyenne. Quand on a un certain nombre de ces différences, on est en état de former une table des anomalies vraies dans l'ellipse, par le moyen des anomalies paraboliques. Afin qu'on le pût faire avec plus de facilité, Simpson a donné des formules et une table, avec lesquelles on peut réduire la parabole à l'ellipse (*Miscellaneous Tracts*, 1757). La Caille s'en est servi dans ses leçons d'astronomie; mais cette formule n'étant exacte qu'à une minute près, je me dispenserai d'en faire usage, et je supposerai qu'on suive la route ordinaire.

3196. EXEMPLE. Pour l'orbite de la comete de 1759 je suppose 28070 jours pour la durée de la révolution, et 0,5835 pour la distance périhélie: le point qui est à 100° d'anomalie vraie dans la parabole répond à 144^j 3614 de distance au périhélie dans la table générale, ce qui fait 64^j 344 dans la parabole donnée (3121); le nombre de jours fait 49′ 30″ 80 d'anomalie moyenne dans une ellipse de 28070 jours. Or 100° 23′ 14″ d'anomalie vraie dans cette ellipse, convertis en anomalie moyenne, donnent aussi 49′ 30″ 80; donc, pour le même nombre de jours, l'anomalie vraie de l'ellipse est plus grande de 23′ 14″ que celle de la parabole. M. Bailly a donné une table de ces différences depuis 90° jusqu'à 105 d'anomalie (*Mémoires présentés*, etc. *Tom.* V, *p.* 14).

Ces anomalies sont égales, dans les deux courbes, à 78° 26′ 30″ d'anomalie vraie, ou 28′ 7″ 48 d'anomalie moyenne: mais les rayons vecteurs sont fort différens; celui de la parabole est 0,96169, celui de l'ellipse est 0,97220; la différence est de plus d'un centieme de la distance totale. Si l'on change la durée de la révolution, le point où les deux anomalies sont égales devient fort différent: dans une ellipse de 27700^j, c'est à 77° 56′ que les anomalies sont les mêmes.

3197. Cette méthode, qui sert à trouver l'anomalie vraie dans une ellipse, procure une facilité pour trouver les élémens de l'ellipse. On calcule les différences qu'il y a entre la parabole et l'ellipse et les longitudes géocentriques de la comete pour chaque jour, soit dans la parabole, soit dans l'ellipse: par exemple: je trouvai que le 1 mai 1759, il falloit ajouter 3′ 25′ 14″ à la longitude de la comete calculée dans une ellipse de 28070 jours, pour avoir la longitude qu'on auroit observée si la comete eût tourné dans une vraie parabole décrite sur la même distance périhélie, et dans le même plan; l'on réduit ainsi les observations à l'état où elles doivent être pour qu'on puisse

déterminer les vrais élémens de l'orbite, par trois observations, sans supposer autre chose que l'orbite parabolique avec les regles précédentes (3140). *Théorie des cometes, pag.* 115.

Quoique l'on voie ici une fort grande difference entre la parabole et l'ellipse, en supposant la même distance périhélie, cependant il suffiroit de changer un peu cette distance périhélie pour former une parabole qui approcheroit beaucoup de cette ellipse de 2807$0^{l}$, et qui se confondroit avec elle sur un assez long espace, de maniere qu'on auroit peine à les distinguer par les observations d'une comete, faites dans une seule apparition; mais alors on n'auroit pas les véritables élémens de l'orbite.

3198. Cependant il est possible, si l'on avoit vu une comete long-temps, et qu'on l'eût observée avec une grande précision, d'avoir une idée de sa révolution, ou de déterminer à-peu-près son ellipse. On cherchera d'abord, dans l'hypothese parabolique, la distance périhélie, et le temps du passage au périhélie, par des observations qui n'en soient pas fort éloignées, afin que cette distance périhélie convienne également et à l'ellipse et à la parabole, et soit indépendante de l'hypothese; on calculera ensuite la différence entre la parabole et l'ellipse, pour les observations les plus éloignées, dans différentes hypotheses de révolutions elliptiques. Les différences calculées étant comparées avec l'erreur observée, c'est-à-dire avec la différence qu'il y a entre l'observation et le résultat de l'hypothese parabolique, on jugera laquelle des différentes ellipses supposées convient à ces observations éloignées: mais comme de semblables calculs exigeroient une fort grande précision, il faudroit employer les dixiemes de seconde.

Dans les recherches d'Euler sur la comete de 1769, on trouve une méthode analytique pour déterminer l'ellipse entiere d'une comete par le moyen de sa partie inférieure. M. de la Grange a donné aussi une méthode pour trouver la révolution d'une comete par une seule apparition. *Mém. de Berlin*, 1778, *Éphém. de Berlin*, 1783.

3199. J'ai reconnu, par un calcul fait seulement à-peu-près pour la comete de 1759, que si l'on eût déterminé le périhélie par trois observations faites le 12 mars, le premier avril et le 1 mai, on auroit trouvé, le 31 mai, 2' d'erreur pour trois ans de différence sur la révolution: ce qui prouve qu'il n'est pas impossible de trouver la période d'une comete, à trois années près, par une seule apparition de trois mois, quand son orbite n'est pas extrêmement grande.

Pour la comete de 1769, Lexell, après des calculs immenses, reconnut qu'en supposant une minute d'erreur dans chacune des trois observations, on pourroit trouver 519 ans au lieu de 449 pour la durée de la révolution ; et M. Pingré, avec d'autres observations, trouve 1231 ans (Tome II, *page* 85).

La comete de 1779, calculée par M. Prosperin, lui paroît avoir une période de 1150 ans. Il a aussi cherché à découvrir la période de la comete de 1773 (*Ephémérides de Berlin* 1777).

3200. La comete de 1770 a exercé singulièrement les calculateurs. M. Prosperin reconnut d'abord qu'il falloit employer trois portions de parabole différentes pour représenter son apparition tout entiere (*Brevis Comment. de motu cometae an.* 1770). Cette dissertation a été insérée dans les Mémoires de l'académie d'Upsal. On peut voir aussi sur cette comete le livre de M. Slop (*Theor. com.* 1769, 1770; les Transactions de la société américaine de Philadelphie, Tome I, 1771 ; Mémoires de l'académie 1770, 1777; et M. du Séjour, *Traité analytique des mouv. des corps célestes*, T. *II*). Lambert pensoit qu'elle avoit été dérangée par l'attraction de la Terre (*Mémoires de Berlin* 1770). M. du Séjour (*Essai sur les cometes*) crut que ces différences tenoient à la parallaxe. Enfin Lexell, après des calculs immenses, trouva qu'on ne pouvoit représenter ces observations que par une révolution de cinq ans et demi, chose très extraordinaire, et qui vient, ou des grands dérangemens que cette comete a éprouvés par des attractions étrangeres, ou des erreurs commises sur les positions des étoiles dont on s'est servi. Quoi qu'il en soit, voici les élémens qu'il a donnés (*Mém. de l'acad.* 1776, *pag.* 639, *et* 1777, *pag.* 352 ; *Mém. de Pétersbourg* 1777, *p.* 370).

Nœud	4^s	12°	$0'$	$0''$
Inclinaison		1	33	40
Périhélie le 13 août à $13^h\ 5'$	11	26	16	26
Distance périhélie		0,6743815		
Distance moyenne, demi-axe de l'ellipse		3,1478606		

Temps périodique 5 ans et $\frac{585}{1000}$ d'année.

Le calcul fait sur ces élémens ne s'écarte presque jamais de 2 min. de l'observation ; et en supposant seulement une période de sept ans, on trouve pour quelques observations des erreurs qui ne sont pas vraisemblables.

Comme cette comete dans son aphélie est presque dans la région de Jupiter, il peut se faire qu'elle ait été dérangée par cette planete

(3205), et qu'elle ait eu une orbite très différente de celle-ci (*Mém.* 1776, *page* 648); sans cela elle auroit été vue plusieurs fois. M. du Séjour a recalculé cette orbite, et il a déterminé les limites des erreurs que donne le calcul parabolique.

M. Méchain, calculant la comete qu'il avoit découverte le 26 novembre 1783, ne put accorder ses observations avec une parabole, soit que la courbure elliptique fût trop sensible, ou que la comete eût éprouvé quelque dérangement (*Connoissance des temps* 1788; *Mém.*, 1783).

Diverses Remarques sur les cometes.

3201. L'inégalité du mouvement des cometes dans des ellipses fort excentriques peut se représenter par le moyen d'une machine assez simple, que Desaguliers a donnée sous le nom d'*instrument cométaire;* il a été aussi décrit par Ferguson (*Astronomy explained*, 1764): cet instrument consiste en deux poulies elliptiques, mobiles chacune autour de leur foyer; l'une conduit l'autre par le moyen d'une corde qui les embrasse toutes deux en se croisant entre elles: les poulies se touchent continuellement; d'où il résulte que si la premiere tourne uniformément, la seconde tournera plus vîte quand son périhélie touchera l'aphélie de la premiere, que quand son aphélie touchera le périhélie de la premiere. Si la seconde ellipse, qui tourne inégalement, porte une alidade au dehors de la boîte, et que cette alidade enfile un petit globe retenu dans une coulisse elliptique, il représentera très bien la vîtesse du périhélie et la lenteur de l'aphélie.

3202. On avoit reconnu long-temps avant Tycho que le mouvement apparent des cometes observé pendant la durée de leur apparition n'étoit pas uniforme; cependant Tycho n'étoit pas assez frappé de ces inégalités pour y reconnoître l'effet de la parallaxe annuelle et du mouvement de la Terre: j'en ai fait la remarque (1101), et j'ai annoncé qu'on trouveroit ici de quoi se convaincre du fait que Tycho révoquoit en doute.

La comete de 1556, après avoir eu un mouvement rétrograde, prit ensuite un mouvement direct suivant l'ordre des signes. Celles de 1566 et 1582 furent d'abord directes et ensuite rétrogrades. Ce que nous avons dit des stations et rétrogradations des planetes (1183) suffit pour faire comprendre que ces inégalités apparentes étoient une suite du mouvement de la Terre, qui, en nous faisant changer

de place, nous fait voir, sous une forme irréguliere et bizarre, des mouvemens qui sont en eux-mêmes très réguliers.

3203. Képler reconnut très bien dans les cometes l'effet de la parallaxe annuelle; et, dans son Traité des cometes, il dit qu'ayant supposé le mouvement de celle de 1618 dans une ligne droite, avec une diminution uniforme, on reconnoissoit l'effet du mouvement de la Terre, soit sur la longitude, soit sur la latitude de la comete (*pag.* 91), et que le mouvement qui parut tortueux, ne pouvoit le paroître qu'à raison de celui de la Terre (*pag.* 97): il termine même son premier livre en disant: Autant qu'il y a de cometes dans le ciel, autant il y a de preuves du mouvement de la Terre autour du Soleil, indépendamment de celles que l'on tire du mouvement des planetes.

Il faut pourtant avouer que Tycho auroit pu nous faire une réponse à laquelle il ne paroît pas avoir songé; c'est que si les cometes tournoient autour du Soleil, et étoient emportées avec lui autour de la Terre par un mouvement annuel, comme les planetes, on expliqueroit toutes les apparences de même qu'avec le mouvement de la Terre. Mais quoique cela soit vrai astronomiquement, il y a toujours une absurdité physique, à laquelle on ne sauroit se prêter, de faire tourner le Soleil, accompagné d'un si grand nombre d'astres, autour d'un petit corps comme la Terre.

3204. La comete de 1729, que Cassini observa pendant plusieurs mois, après avoir fait plus de 15° vers l'occident, se courba subitement pour retourner vers l'orient; ce qui montroit d'une maniere frappante l'effet de la parallaxe annuelle. Celle qui fut apperçue le 8 janvier 1760 près de κ d'Orion, fit autant de chemin du 8 au 9 en un seul jour qu'elle en fit dans les trois jours suivans du 9 au 12, suivant les observations que nous fîmes tous à Paris. Une semblable inégalité marque bien sensiblement l'effet de la parallaxe annuelle. Il pouroit arriver des cas où cet effet seroit bien plus grand: si une comete rétrograde, et dont la distance à la Terre seroit égale à la distance moyenne de la Lune, se trouvoit périhélie et en opposition, elle auroit 140° de mouvement par heure: il pourroit arriver par là qu'on vît cette comete aller depuis l'horizon jusqu'au zénith en moins de trois quarts d'heure, et employer ensuite plus de quatre heures à gagner l'horizon occidental (La Caille *Mém.* 1760).

Les inégalités dont je viens de parler sont purement apparentes; mais je dois dire un mot d'une autre irrégularité qu'on a reconnue en 1759, et qui affecte le mouvement réel et intrinseque de toutes les cometes dans leurs ellipses; c'est l'attraction des autres corps

célestes; celle de Jupiter et de Saturne est la plus remarquable : mais il y a grande apparence que les attractions des autres planetes et des autres cometes peuvent y influer sensiblement.

3205. On a vu un exemple bien évident de ces dérangemens dans le retour de la comete de 1682, observée en 1759. Sa période entre le passage par le périhélie du 26 octob. 1607 et celui du 14 sept. 1682 a été plus petite de 585 jours que la période suivante qui s'est terminée au 13 de mars 1759. On devoit bien s'attendre à des inégalités, à en juger par celles de Saturne; car une comete qui s'éloigne du Soleil quatre fois autant que Saturne, et dont la vîtesse et la tendance vers le Soleil deviennent beaucoup plus petites dans la partie supérieure de son orbe, se trouve bien plus susceptible des modifications et de l'impression des autres forces, c'est-à-dire des attractions qu'exercent sur elle toutes les planetes qu'elle rencontre.

3206. Lorsqu'on commença de parler en 1757 du retour de cette comete, prédit par Halley, on remarqua que les inégalités de ses périodes précédentes nous laissoient près d'une année d'incertitude sur le temps de son apparition: Halley avoit dit que cette comete, en 1681, passant fort près de Jupiter, en avoit dû être fortement attirée, et que cela pourroit retarder l'apparition suivante jusqu'au commencement de 1759. Mais cette considération étoit trop vague pour qu'on dût y compter, et Halley n'y comptoit pas lui-même. Je proposai à Clairaut d'y appliquer sa théorie de l'attraction, ou du problême des trois corps, en lui offrant tous les calculs astronomiques dont il auroit besoin : je lui donnai les situations de la comete, et les forces que Jupiter et Saturne avoient exercées sur elle pendant l'espace de 150 ans ou de deux révolutions, soit dans la direction des rayons vecteurs, soit perpendiculairement aux rayons (3597), avec les ordonnées et les surfaces de toutes les courbes qui représentoient les intégrales des équations du problême (3661, 3669). Par ce moyen Clairaut trouva que la révolution de la comete devoit être de 611 j. plus grande que celle de 1607 à 1682, dont 100j pour l'action de Saturne, et 511 pour celle de Jupiter. Suivant ces premiers calculs la comete devoit passer dans son périhélie au milieu d'avril (Voyez ma *Théorie des cometes* 1759, *pag.* 110); elle y passa le 13 mars : et malgré l'immensité des calculs que nous fîmes à cette occasion, Clairaut et moi, les quantités négligées produisirent environ un mois d'erreur dans la prédiction. Mais Clairaut l'avoit prévu; et il a fait voir ensuite que l'erreur se réduisoit à 22 j., et qu'il y auroit des moyens de pousser l'approximation assez loin pour rendre l'erreur encore moindre. Les recherches de Clai-

raut sur cette matiere se trouvent en abrégé dans une piece qui a remporté le prix de l'académie de Pétersbourg en 1762, et plus en détail dans sa *Théorie du mouvement des cometes, in-8°*, 1760. On trouvera aussi des recherches de d'Alembert sur le même sujet, dans le second volume de ses *Opuscules mathématiques*, *pag. 97 et suiv.* et dans la piece de M. *Albert Euler*, qui a remporté, en 1762, le prix proposé par l'académie de Pétersbourg, concurremment avec Clairaut. Celles de M. de la Grange et de M. Fuss sont dans le tome X des *Mémoires présentés*, publié en 1785.

3207. Toutes les cometes que j'ai vues étoient d'une lumiere si foible, si pâle, si éteinte, qu'il y a lieu de croire que leur substance a peu de densité, et qu'elles ont très peu de masse; ainsi les dérangemens que peuvent causer leurs attractions sont peu considérables.

Cependant il y a plusieurs cometes dont les nœuds sont assez voisins de la circonférence de l'orbite de la Terre pour que les attractions étrangeres puissent les faire coïncider; et, dans ce cas, les cometes pourroient, par leur rencontre avec la Terre, et même par leur approche, occasionner d'énormes révolutions. C'est ce que je fis voir, pour la premiere fois, en 1773, dans mes *Réflexions sur les cometes.* Ce mémoire, avant d'être publié, occasionna dans Paris, et même au-delà, des terreurs fort étranges : je le fis imprimer pour rassurer le public. M. du Séjour a achevé de dissiper ces terreurs dans un ouvrage exprès, intitulé, *Essai sur les cometes*, 1775, in-8°, où il fait voir combien il est difficile que les cometes approchent assez de la Terre pour y causer des révolutions. Euler a fait la même chose dans les *Mémoires de Pétersbourg* pour 1774. M. Prosperin a donné, dans les *Mémoires de Stockholm*, une table de la plus proche distance à la Terre pour les cometes qui ont paru jusqu'à 1774; et je l'ai insérée dans les Mémoires de l'académie pour 1773. La continuation est dans les Mémoires de Stockholm pour 1785. On voit qu'il n'y a aucune de ces cometes qui ait pu passer assez près de la Terre pour y causer des révolutions : mais les attractions qui changent les nœuds des orbites peuvent diminuer cette distance et la réduire à rien; ainsi ces événemens sont possibles, mais d'une possibilité trop éloignée pour donner lieu à aucune crainte raisonnable.

Whiston attribuoit le déluge à la queue d'une comete (3185) et à son attraction sur les eaux souterraines; mais il n'avoit pas démontré la possibilité de ces approches.

La comete de 1680 n'étant éloignée du Soleil, dans son périhélie, que

que de la 6ᵉ partie du diametre solaire, il pourroit arriver, par la résistance de l'atmosphere du Soleil, qui diminueroit sa vîtesse et par conséquent sa distance, ou par l'attraction des autres cometes dans son aphélie, qui changeroit sa direction, qu'elle retombât ensuite dans le Soleil. C'est ainsi, dit Newton, que la belle étoile de 1572 a pu paroître tout d'un coup, étant ranimée et augmentée par une abondance de matiere nouvelle.

3208. Les anciens ont tiré le nom des cometes de cette lumiere inégale dont elles paroissent communément environnées, et ils les ont distinguées par ce moyen en plusieurs especes. (Pline II, 25; Hevelius, *in Cometographia.*) Cependant il en a paru quelquefois sans queue ni chevelure (3080); mais celles dont les queues ont paru les plus longues sont les suivantes. Une comete, dont parle Aristote, parut vers l'an 371 avant notre ere; elle occupoit le tiers de l'hémisphere, ou environ 60°. Celle qui parut à la naissance de Mithridate (3087) occupoit 45°: Justin dit qu'elle étoit terrible. Une autre comete, au rapport de Séneque (*VII,* 15), égaloit toute la voie lactée; c'étoit vers l'an 135. La comete de 1456 occupoit 60° (Pontanus *in Centiloquio*); et celle de 1460 en occupoit environ 50, suivant le même auteur. La comete de 1618 avoit une queue de 70° au moins, suivant Kepler, et même, suivant Longomontanus, de 104°, le 10 décembre 1618. On peut voir les mesures d'un grand nombre d'autres queues de cometes dans Riccioli, (*Alm. II,* 25): mais depuis ce temps-là on a vu la comete de 1680, l'une des plus étonnantes qui eussent jamais paru, par l'étendue de sa queue (Voyez le Traité de Cassini sur la comete de 1680, page xxxiij): Kirche l'avoit vue le 14 novembre au matin (Newton L. 3, prop. 41): sa queue avoit 26° le 26 décembre, et même 90 à Constantinople; on la vit jusqu'au 5 de mars 1681.

3209. La comete de 1744 s'est montrée de nos jours avec une queue d'un éclat extraordinaire, elle étoit divisée en plusieurs branches comme un immense éventail; elle s'étendit le 19 de février jusqu'à 30°; on en voit la figure dans le Traité de la comete de 1744, de Cheseaux, à Lausanne et à Geneve, *in*-8°. 1744, *pag.* 155; c'est la plus belle qu'il y ait eu dans ce siecle-ci; aussi fit-elle une sensation extraordinaire, et l'on en parle encore très souvent.

3210. Dans les pays méridionaux où l'on jouit d'un air pur et serein, les queues des cometes se distinguent mieux et paroissent plus longues; la comete de 1680 avoit une queue plus grande à Constantinople de 28° qu'à Paris. Celle de 1759 nous parut presque sans queue; on avoit beaucoup de peine à en distinguer une légere

trace d'un ou de deux degrés à Paris, tandis qu'à Montpellier, suivant M. de Ratte, la queue avoit 25^{d} le 29 avril, la partie la plus lumineuse étant de 10°; la Nux, à l'isle de Bourbon, la vit même beaucoup plus grande. Enfin la queue de la comete de 1769 paroissoit d'environ 60° à Paris (*Mém.* 1775), de 70° à Bologne, de 97° à l'isle de Bourbon, de 90° à M. Pingré, qui étoit sur mer, entre Ténériffe et Cadix (*Mém. acad.* 1769); mais elle étoit très foible. C'est ainsi que dans la zone torride la lumiere zodiacale paroît constamment, et de 120° de longueur (846), quoiqu'on ait peine à la voir à Paris.

3211. Séneque savoit que les queues des cometes étoient transparentes, et qu'on voyoit les étoiles au travers (*Liv. VII, c.* 18). Newton fit voir qu'elles étoient d'une substance infiniment plus ténue et plus rare qu'on ne sauroit imaginer: on sait qu'une matiere très rare peut encore réfléchir de la lumiere, à en juger par le crépuscule (2271).

Pierre Apian fut le premier qui prouva que les queues des cometes étoient toujours à-peu-près opposées au Soleil (*Astronomicum Caesareum*, 1540); cette regle fut confirmée alors par Gemma Frisius, Cornelius Gemma, Fracastor, Cardan: cependant Tycho ne croyoit pas que cette loi fût générale et démontrée (*De com. an.* 1577, *p.* 180); mais elle est actuellement reconnue. On apperçoit seulement une courbure et une deviation, qui sont une suite de la position de la Terre hors du plan de l'orbite de la comete et du mouvement de celle-ci, car la déviation se fait du côté de l'endroit que la comete occupoit auparavant (*Hevelius, in Cometog.*; Cassini, Traité de la comete de 1680, *pag.* x; Newton, L. III, prop. 41; Boscovich, T. III, *pag.* 360): on voit la queue d'autant plus grande que la comete est plus éloignée de la ligne qui passe par le Soleil et la Terre.

3212. Les queues des cometes, suivant Newton, viennent de l'atmosphere propre de chaque comete. Les fumées et les vapeurs peuvent s'en éloigner, dit il, ou par l'impulsion des rayons solaires, comme le pensoit Kepler, ou plutôt par la raréfaction que la chaleur produit dans ces atmospheres; il confirme ce sentiment par la comete de 1680, qui, au mois de décembre, après avoir passé fort près du Soleil, avoit une trace de lumiere beaucoup plus longue et plus brillante qu'elle n'avoit eu au mois de décembre, avant son périhélie: cette regle est même générale, et lui paroît suffisante pour prouver que la queue des cometes n'est qu'une vapeur très légere élevée du noyau de la comete par la force de la chaleur quand elle approche du Soleil. Euler emploie sur-tout l'impulsion de la lumiere (*Mém. de Berlin*, 1746).

3213. Boscovich, dans une dissertation imprimée à Rome en 1746, réimprimée dans le troisieme volume de ses œuvres, compare la queue d'une comete à la fumée qui s'éleve par la pesanteur de l'air; l'atmosphere du Soleil pese vers le Soleil; les vapeurs de la comete ont moins de pesanteur, elles s'éloignent du Soleil (*pag.* 357). Il observe aussi que l'atmosphere prodigieuse des cometes doit nécessairement empêcher qu'elles ne s'échauffent autant que d'autres corps. La partie supérieure est trop rare pour recevoir beaucoup de chaleur; elle garantit la partie inférieure (*pag.* 354).

3214. Cette atmosphere conserve aussi la chaleur dans le grand éloignement de la comete; elle la distribue à ses différentes parties; elle conserve une lumiere uniforme, et la rend peut-être habitable; mais cette lumiere est trop dispersée pour qu'elle puisse paroître dans un grand éloignement; et voilà pourquoi les cometes ne paroissent point quand elles sont parvenues seulement à la distance de Jupiter.

3215. Cette atmosphere empêche qu'on ne distingue les phases des cometes; et Cassini jugeoit la grande comete de 1680 beaucoup plus éloignée que le Soleil, tandis qu'elle étoit beaucoup plus près; il se fondoit sur ce que sa lumiere étoit pleine et n'avoit point la forme de croissant; mais ordinairement on ne distingue point de phases dans les cometes à cause de la dispersion de la lumiere causée par l'atmosphere (3080).

3216. On n'a guere vu de queue plus grande que celle de la comete de 1680 et 1681, parcequ'on n'a guere vu de cometes passer si près du Soleil: le 18 décembre 1680 elle en étoit 166 fois plus près que la Terre. Cette comete recevoit alors une chaleur 28000 fois plus forte que celle du solstice d'été; la chaleur de l'eau bouillante est trois fois plus grande que celle qu'une terre seche reçoit du Soleil au solstice, et la chaleur d'un fer rouge trois ou quatre fois plus grande que celle de l'eau bouillante suivant l'estimation de Newton, (on pourroit dire 7 à 8 fois): il en conclut que la comete de 1680 auroit dû être échauffée environ deux mille fois plus qu'un fer rouge; un globe de fer de même diam. auroit conservé sa chaleur plus de 50000 ans (Newt. L. 3, prop. 41; Phil. Trans. 1701, n°. 270). M. de Buffon fait voir que ce calcul de Newton doit être réformé dans plusieurs points; il auroit fallu, par exemple, que la comete restât plusieurs siecles à la même distance pour contracter cette chaleur. On peut voir les expériences curieuses sur la chaleur et le refroidissement des corps, que M. de Buffon a données dans le premier volume des ses Supplémens, publié en 1774. Mais Newton ne vou-

loit donner qu'une idée de la chaleur qui avoit lieu dans le périhélie, pour faire voir que les matieres susceptibles d'évaporation avoient dû être volatilisées ; il donnoit ainsi l'explication de cette queue immense que traînoit la comete de 1680.

3217. L'atmosphere du Soleil a été employée par Mairan pour expliquer la formation des queues des cometes, dans son Traité sur les aurores boréales (848). On peut voir les différentes opinions sur cette matiere dans la Cométographie de M. Pingré (Tome II, page 200).

3218. La maniere d'observer les cometes est la même que pour les planetes ; mais leur peu de lumiere fait qu'on est obligé souvent de se contenter du réticule rhomboïde (2513), et même de la méthode des hauteurs (2580, 3991).

Les cometes étant ordinairement fort pâles, on ne doit pas faire grossir beaucoup les lunettes avec lesquelles on les observe (*M.* 1774, *pag.* 275; 1775, *pag.* 295) : on les cherche avec des lunettes de nuit à grandes ouvertures, de 18 pouces de long, et qui grossissent très peu.

3219. Les petites cometes ressemblent souvent à des nébuleuses (835), et il faut bien connoître le ciel pour ne pas y être trompé le premier jour ; mais bientôt on distingue les cometes par leur mouvement d'un jour à l'autre.

LIVRE VINGTIEME.

DE LA ROTATION DES PLANETES ;

ET DE LEURS TACHES.

Nous voyons que le Soleil, la Lune, Jupiter, Mars et Vénus tournent sur leur axe[a]; ce sont ces mouvemens qui font l'objet de ce vingtieme livre.

3220. La rotation des planetes est absolument indépendante de leur révolution (1100): une planete peut suivre son orbite par un mouvement de translation d'occident en orient, sans tourner sur son axe ; et elle peut tourner sur un axe quelconque en sens contraire et avec une vîtesse quelconque. Une toupie tourne sur une table ou sur son pivot, quoiqu'on l'ait jetée en l'air à une assez grande distance et quoiqu'on transporte la table d'un côté ou d'un autre ; ainsi le mouvement de rotation est absolument indépendant du mouvement de révolution que nous avons considéré dans le VIe livre : ce n'est que par les observations qu'on peut le déterminer. Nous avons prouvé que l'axe de rotation doit toujours rester parallele à lui-même, quel que soit le mouvement de révolution (1100), et nous le supposerons dans les calculs suivans.

3221. Jean Bernoulli, dans un mémoire de dynamique où il considere les centres spontanés de rotation , fait voir qu'une force de projection appliquée, non pas au centre de la Terre, mais un peu plus loin du Soleil, et cela de $\frac{1}{150}$ du rayon[b], donneroit à la Terre, supposée ronde et homogene, deux mouvemens assez conformes à ceux que l'on observe : pour Mars il trouve $\frac{1}{418}$, pour Jupiter $\frac{7}{19}$ (Bern. *Op. T.IV, p.*283) ; pour la Lune on trouve $\frac{1}{150}$ (3303). Si l'impulsion primitive eût été appliquée à de plus grandes distances de chaque centre, le mouvement de rotation seroit plus rapide.

(a) On ne sait rien sur les rotations de Mercure et de Saturne.

(b) Je trouve $\frac{1}{64}$ en rectifiant ses élémens ; il ne faut que multiplier le sinus de la parallaxe du Soleil par $\frac{2}{5}$ de l'année exprimée en jours 366,2562.

3222. Nous ne voyons aucune liaison nécessaire entre les durées des rotations et celles des revolutions; cependant M. le chevalier de Goimpy, dans le Journal des Savans (janvier 1769), a donné des rapports qu'il croyoit pouvoir tenir à une loi générale; et Mairan s'en étoit déja occupé (*Mém. acad.* 1729) : mais je crois que ces rencontres ne tiennent qu'au hasard.

3223. La rotation du Soleil est la premiere qui ait été découverte, et c'est aussi la plus sensible; les taches qui paroissent de temps en temps sur le Soleil ont fait découvrir ce mouvement, et nous servent encore à l'observer. Elles furent découvertes en 1610 ou en 1611.[a] Le premier ouvrage qui parut sur les taches du Soleil est celui de Fabricius, intitulé: *Joh. Fabricii Phrysii de maculis in Sole observatis, et apparente earum cum Sole conversione narratio. Wittebergae* 1611, petit *in*-4°. L'épître dédicatoire est datée du 13 juin. Dans cet ouvrage qui a 43 pages, il n'y en a que 8 où il soit question des taches du Soleil: voici un extrait où j'ai renfermé tout ce que l'auteur dit sur ce sujet.

« Après que les lunettes ont été découvertes en Hollande, on a commencé à regarder la Lune, ensuite Jupiter et Saturne; et Galilée y a trouvé des choses singulieres. Poussé par la même curiosité, je m'occupois à regarder le Soleil, dont les bords me paroissoient avoir des inégalités remarquables, que mon pere David Fabricius avoit déja remarquées, comme je l'ai appris par ses lettres. Dans le temps que je m'en occupois, j'apperçus une tache noirâtre sur le Soleil, plus rare et plus pâle d'un côté, et assez grande par rapport au disque du Soleil. Je crus d'abord que c'étoit un nuage; mais l'ayant regardée dix fois avec différentes lunettes, et ayant appellé mon pere pour la lui faire voir, nous fûmes assurés que ce n'étoit point un nuage. Le Soleil s'élevant de plus en plus, nous ne pouvions plus le regarder; car lors même qu'il est à l'horizon, il affecte les yeux au point que pendant plus de deux jours la vue des objets est altérée; c'est pourquoi j'avertis ceux qui voudroient faire de pareilles observations, de commencer à recevoir la lumiere d'une petite portion du Soleil, afin que l'œil s'y accoutume peu à peu et puisse supporter la lumiere du disque entier du Soleil.[b]

Nous passâmes le reste de la journée et la nuit suivante avec une

[a] M. Zach a vu, dans les papiers d'Harriot en Angleterre, des observations de taches qui commencerent au 8 de décembre 1610 (Ephémér. de Berlin 1788, page 154).

[b] On ne connoissoit pas encore l'usage des verres noirs (2477).

extrême impatience et en rêvant sur ce que pouvoit être cette tache : si elle est dans le Soleil, disois-je, on la reverra sans doute ; si elle n'est pas dans le Soleil, son mouvement la rendra invisible : enfin je la revis dès le matin avec un plaisir incroyable ; mais elle avoit un peu changé de place, ce qui augmenta notre incertitude. »

« Cependant nous imaginâmes de recevoir les rayons du Soleil par un petit trou, dans une chambre obscure, et sur un papier blanc, et nous y vîmes très bien cette tache en forme de nuage alongé. Le mauvais temps nous empêcha de continuer ces observations pendant trois jours. Au bout de ce temps-là nous vîmes la tache qui étoit avancée obliquement vers l'occident. Nous en apperçûmes une autre, plus petite, vers le bord du Soleil, qui, dans l'espace de peu de jours, parvint jusqu'au milieu ; enfin il en survint une troisieme : la premiere disparut d'abord, et les autres quelques jours après. Je flottois entre l'espérance et la crainte de ne pas les revoir ; mais, dix jours après, la premiere reparut à l'orient. Je compris alors qu'elle faisoit une révolution ; et, depuis le commencement de l'année, je me suis confirmé dans cette idée, et j'ai fait voir ces taches à d'autres qui en sont persuadés comme moi. Cependant j'avois un doute qui m'empêcha d'abord d'écrire à ce sujet, et qui me faisoit même repentir du temps que j'avois employé à ces observations. Je voyois que ces taches ne conservoient pas entre elles les mêmes distances, qu'elles changeoient de forme et de vîtesse ; mais j'eus d'autant plus de plaisir lorsque j'en eus senti la raison. Comme il est vraisemblable, par ces observations, que les taches sont sur le corps même du Soleil, qui est sphérique et solide, elles doivent devenir plus petites, et ralentir leur mouvement lorsqu'elles arrivent sur les bords du Soleil. »

« Nous invitons les amateurs des vérités physiques à profiter de l'ébauche que nous leur présentons. Ils soupçonneront sans doute que le Soleil a un mouvement de conversion, comme l'a dit Jordan Bruno[a], et, en dernier lieu, Kepler, dans son livre sur les mouvemens de Mars ; car, sans cela, je ne sais ce que nous ferions de ces taches. Je ne suis pas d'avis que ce soient des nuages ; je ne suis pas non plus de l'avis de ceux qui ont placé les cometes dans le Soleil, comme des émissaires destinés à y revenir bientôt : j'aime mieux me taire sur tout cela que de parler au hasard ; je suis même tenté de regarder ce mouvement du Soleil comme la cause des autres mouvemens célestes, suivant les paroles d'Aristote, qui dit, dans ses pro-

(a) C'est celui qui fut brûlé, comme convaincu d'athéisme ou d'irréligion, en 1600.

blêmes, que le Soleil est le pere et l'auteur des mouvemens.»

3224. La premiere découverte des taches du Soleil est revendiquée par le P. Scheiner, et il a fait sur cette matiere un grand ouvrage intitulé : *Rosa*[a] *ursina, sive Sol ex admirando facularum et macularum suarum phœnomeno varius, a Christophoro Scheiner, Germano Suevo, e societate Jesu,* 1630, *in-folio,* 774 pages. L'impression de cet ouvrage fut commencée en 1626, à Bracciano en Italie, et finie au mois de juin 1630.

Le P. Scheiner étoit professeur de mathématiques à Ingolstadt, au mois de mars 1611, lorsqu'en regardant un jour le Soleil avec une lunette d'approche, au travers de quelques nuages, il apperçut pour la premiere fois les taches du Soleil, et les fit voir au P. Cysati et à plusieurs de ses disciples : le bruit s'en répandit bientôt. On sollicita le P. Scheiner de publier cette découverte ; mais comme ce phénomene paroissoit fort contraire aux principes de la philosophie de ce temps-là, son provincial, Théodore Busæe, craignit qu'il ne vînt à se compromettre ; et ses premieres observations ne furent publiées que sous un nom supposé, *Apelles post tabulam*, par un magistrat d'Ausbourg nommé Velser, à qui le P. Scheiner en avoit écrit le détail aux mois de novembre et de décembre 1611, et qui publia ses trois lettres le 5 janvier 1612 (*Rosa ursina,* pag. 18).

3225. Galilée, dans la préface d'un livre intitulé, *Istoria, Dimostrazioni, intorno alle macchie solari, Roma* 1613, dit qu'étant à Rome, au mois d'avril 1611, il avoit fait voir les taches du Soleil à plusieurs personnes, dans le jardin quirinal du cardinal Bandini, et qu'il en avoit parlé, quelques mois auparavant, à ses amis de Florence; ce qui remonte à-peu-près au commencement de 1611, ainsi que les premieres observations de Fabricius ; au lieu que l'anonyme caché sous le nom d'Apelles (ou le P. Scheiner) ne cite que des observations du mois d'octobre 1611.

On voit aussi, dans l'ouvrage de Galilée, que Marc Velser, duumvir d'Ausbourg, avoit envoyé à Galilée, le 6 janvier 1612, les trois lettres qui portoient le nom d'Apelles, sur les taches du Soleil, en lui demandant son avis à ce sujet. Galilée, qui craignoit les ennemis des nouveautés, n'osoit qu'à peine s'expliquer, et encore moins faire imprimer ses idées sur les choses qu'il n'avoit pas parfaitement approfondies. Cependant on voit, dans sa lettre à Velser, du 4 mai 1612, des raisonnemens solides contre l'idée de Scheiner, qui ne croyoit pas possible que les taches fussent dans le corps même du Soleil, et

(a) Le nom de *Rosa ursina* vient de la rose qui étoit une partie des armoiries d'un duc de Bracciano, de la maison des Ursins, à qui ce livre fut dédié

les

les regardoit alors comme des planetes tournant autour du Soleil à une petite distance, ainsi que Mercure et Vénus [a]. Galilée le réfute, quoiqu'en lui donnant beaucoup d'éloges et le traitant de génie sublime (pag. 28) : il observe que ces taches ne sont pas permanentes; qu'elles se condensent ou se divisent, s'augmentent et se dissipent. Il les compare à des fumées ou à des nuages ; quelquefois, dit-il, il y en a beaucoup, quelquefois point du tout.

Il pense qu'elles sont à la surface du Soleil ; qu'elles n'ont pas de hauteur sensible; qu'elles décrivent toutes des cercles paralleles entre eux, quoiqu'il y en ait quelquefois une trentaine à la fois ; que le Soleil, en tournant chaque mois, les ramene à notre vue ; qu'il y en a qui durent un ou deux jours, d'autres trente ou quarante et plus ; qu'elles se rétrécissent et se rapprochent les unes des autres sur les bords du Soleil, sans changer de longueur ou de distance du nord au sud, et que ce rétrécissement est celui des différentes parties d'un globe vu de loin. Galilée y parle des poles de la rotation du Soleil : mais il n'avoit pas encore remarqué la différence de 7° qu'il y a entre ces poles et ceux de l'écliptique, et il croyoit que l'écliptique même étoit le plus grand cercle de leur conversion.

3226. Dans sa lettre du 14 août 1612, Galilée observe que les taches ne s'écartent pas de plus de 30° de l'équateur solaire, ce qui a été confirmé par la plupart des observations, quoique j'en aie vu au-delà (3236).

Il y donne la maniere d'observer les taches en recevant sur un papier l'image du Soleil au travers d'une lunette (2481). Il ajoute que les plus belles taches se voient sans instrumens, en faisant entrer par un petit trou l'image du Soleil dans une chambre obscurcie, ce qu'il avoit fait sur-tout le 20 août 1612. Il explique, par les taches du Soleil, le prétendu passage de Mercure sur le Soleil dont il est parlé dans la vie de Charlemagne (3232).

Dans sa troisieme lettre, du 1 décembre 1612, Galilée dit que les taches sont visibles le même espace de temps, un peu plus de quatorze jours ou quatorze et demi (pag. 131), quoique Scheiner prétendît en avoir vu qui employoient quatorze jours, et d'autres seize, à traverser le disque du Soleil, et qu'il en voulût conclure qu'elles étoient éloignées du Soleil. Galilée dit s'en être assuré par plus de cent dessins faits en grand et avec soin (pag. 116).

Il assure (pag. 132) que l'on voit quelquefois dans le Soleil de

[a] Dans le temps qu'on ne connoissoit pas encore la nature de ces taches, on voulut leur donner des noms; Tarde, *borbonia sidera,* 1620; Maupertuis, *austriaca sidera,* 1633. Cette ineptie est même restée dans le dictionnaire de Trévoux, édition de 1772, au mot *Satellite.*

petits endroits plus clairs que le reste (3229) et dans lesquels s'observe le même mouvement que dans les taches; ce qui étoit bien suffisant pour démontrer le mouvement de rotation du Soleil et par conséquent la cause du mouvement des taches. Ainsi il ne manquoit dès lors à la théorie des taches du Soleil qu'une suite d'observations détaillées pour bien constater la durée de la rotation du Soleil et l'inclinaison de son équateur; c'est ce que fit le P. Scheiner.

Galilée écrivit encore contre Scheiner, en 1619, dans son Discours sur la comete de 1618; en 1623, dans son livre qui a pour titre *il Saggiatore* (c'est-à-dire *Trutinator,* celui qui pese); et en 1632, dans ses Dialogues: il l'accusa de plagiat, et prétendit avoir découvert ces taches le premier. Scheiner s'en justifie fort au long dans son grand ouvrage; mais Képler pense que Fabricius les avoit vues avant Scheiner (*Ephém.* pag. 17; Weidler, *pag.* 435); et peut-être Harriot les avoit encore devancés (3223).

3227. Quoi qu'il en puisse être de celui à qui le hasard les a fait voir pour la premiere fois, il est sûr que personne ne les observa aussi bien et n'en donna la théorie d'une maniere aussi complete que Scheiner: son ouvrage a 774 pages sur cette seule matiere; et cela suffit pour faire voir avec quelle assiduité il s'en occupa et combien il donna d'étendue à ses recherches. Hévélius le cite avec les plus grands éloges: *Incomparabilis et omnigenae eruditionis.... ut hac in materia omnibus palmam quasi præripuisse dici possit* (*Selenog.*, p. 82).

3228. Les taches du Soleil sont des parties noires, irrégulieres, qu'on apperçoit de temps en temps sur le Soleil, qui paroissent tourner uniformément en $27^j\ 7^h\ 37'$, et tournent réellement en 25^j et 10^h comme le Soleil (3276): on en voit une représentée en N (fig. 268), sur le disque du Soleil, environnée de son atmosphere (3231). Le milieu paroît ordinairement très noir; cependant M. Schroeter, avec un télescope de 7 pieds, assure l'avoir vu comme un brouillard divisé en plusieurs petites parties nébuleuses (*Beobachtungen*, etc., 1789, *in*-4°.

3229. Les facules[a] dont Scheiner et Hévélius parlent souvent, *faculae, luculi,* sont les endroits plus clairs que Galilée avoit déja remarqués; des parties qui semblent un peu plus lumineuses que le reste du disque solaire (Scheiner, *pag.* 517), mais que l'on a de la peine à distinguer. Il sembleroit, dit Cassini, que le Soleil y est plus épuré qu'ailleurs (*Anciens Mémoires,* X, 605-662). La Hire les appelle taches lumineuses (*Journal des savans,* 1686), et M. Messier nua-

(a) Ce nom vient du diminutif de *fax,* flambeau.

ges de lumiere : elles environnent chaque amas de taches ; on les voit encore dans les endroits où les taches ont paru, et souvent la facule qui enveloppoit un amas de taches se distingue alors du reste du Soleil par un plus grand éclat (*Hist. acad.*, 1705, *p.* 126.) : c'est une atmosphere plus claire qui succede quelquefois à l'atmosphere obscure (*Mém.* 1703, *pag.* 130). Les facules redeviennent des taches (*Anciens Mém.* 663). M. Silberschlag les compare à des vapeurs lumineuses ; il les observoit très distinctement, sur-tout près des bords du Soleil, au mois d'octobre 1768 (*M. Bernoulli, Lettres astron.*, 1771, *pag.* 5). M. Schroter les a remarquées dans presque toutes les parties du bord du Soleil, mais sur-tout depuis 20° de déclinaison solaire boréale jusqu'à 20° de déclinaison australe : elles ont jusqu'à 2 ou 3′ de longueur ; elles paroissent toujours mieux quand elles sont vers les bords, et disparoissent avant d'avoir atteint le milieu du disque (*Beobachtungen*, 1789).

Les facules contiennent ordinairement des taches avec la pénombre qui les environne. M. Messier a sur-tout observé les nuages de lumiere ; il les a vus entrer sur le disque du Soleil, y disparoître avant d'atteindre le centre, et reparoître avant leur arrivée à l'autre bord ; il en a observé d'assez considérables pour employer plus de 24 heures à entrer totalement sur le disque du Soleil, et autant de temps pour sortir à l'autre bord. Ces facules sont des traits de lumiere claire, inégalement dirigés, se croisant quelquefois, laissant entre eux la lumiere du Soleil, comme elle paroît hors de ces nuages : elles ont quelquefois à-peu-près la forme des taches de *Copernic* et de *Képler* dans la Lune ; elles ne restent visibles, sur le disque du Soleil que trois jours environ, à compter de leur entrée, disparoissent ensuite pour ne reparoître que le même espace de temps avant d'en sortir. C'est dans ces nuages de lumiere que se forment ou se trouvent ordinairement, les taches. Cependant M. Messier a observé quelquefois des taches qui n'étoient pas renfermées dans ces nuages ; peut-être les nuages se trouvoient-ils trop foibles pour être apperçus à la lunette. Il a remarqué souvent aussi que plus les taches du Soleil sont grandes, plus le nuage de lumiere qui les contient est apparent et sensible : il a vu de ces nuages entrer sur le Soleil sans contenir de taches, paroître pendant deux à trois jours, ensuite disparoître : mais comme ces facules de lumiere ont le même mouvement que les taches, il jugeoit des lieux où les facules devoient être sur le disque du Soleil les jours suivans, et à ces mêmes lieux soupçonnés il voyoit se former des taches très apparentes, et quelquefois assez grandes, qui parcouroient le reste du disque ; mais, avant de quitter le Soleil,

elles paroissoient dans le nuage de lumiere qui étoit entré sans contenir de taches, et disparoissoient étant encore sur le Soleil : le nuage de lumiere redevenoit visible sans taches, comme à son entrée, et restoit visible jusqu'à sa sortie du disque solaire.

3230. Le résultat le plus curieux qu'ait procuré à M. Messier l'observation de ces nuages de lumiere a été la facilité de prévoir l'entrée des taches au bord du Soleil vingt-quatre heures plus ou moins avant qu'elles y fussent : en effet ces nuages, par leur étendue, précédoient l'entrée des taches au bord du Soleil quelquefois de plus d'un jour; ainsi l'entrée du commencement des nuages de lumiere au bord du Soleil annonçoit d'avance celle des taches, et même, par la lumiere plus ou moins brillante de ces nuages, indiquoit si les taches seroient grandes ou petites (*Mém. acad.*, 1784).

3231. Les ombres ou nuages sont une nébulosité ou une atmosphere blanchâtre qui environne toujours les grandes taches. Hévélius les compare à l'impression que l'haleine fait sur la glace d'un miroir, en ternissant son éclat, *halo* (*Selen.*, pag. 84): quelquefois, dit-il, cette atmosphere des taches est jaunâtre *instar halonis,* et il en donne un exemple (*pag.* 500). Quelquefois ces ombres se trouvent toutes seules, et donnent ensuite naissance à des taches, comme il l'observa au mois d'août 1643 (*ibid.*, pag. 86 et 508). Ces ombres sont souvent d'une très grande étendue : Hévélius a vu une traînée d'ombres et de facules, le 20 juillet 1643, qui occupoit près du tiers du diametre du Soleil (*pag.* 87 et 506).

On voit spécialement la maniere dont Hévélius se représentoit les ombres et les facules, dans l'exemplaire de sa Sélénographie qu'il envoya à Louis XIV et qui est à la bibliotheque du roi, toutes les planches y ayant été enluminées avec beaucoup de soin par l'auteur même ou sous ses yeux.

3232. Les taches du Soleil servent à expliquer divers phénomenes racontés dans les historiens. Voyez Pline, Plutarque, Virgile, *Cùm caput obscurâ nitidum ferrugine texit;* Georg. I, 441-446, *Edit. ad usum*, *pag.* 122; Scheiner, *pag.* 609; Riccioli, *Almag.* I, 97; Costard, *pag.* 182. Dans les Annales de France imprimées à Paris en 1588 (*Vie de Charlemagne*, *p.* 62), on trouve que l'an 807, xvj *kal. april.* Mercure parut sur le Soleil comme une petite tache noire, qu'on apperçut en France pendant huit jours, et que les nuages empêcherent d'observer dans quel temps se firent l'entrée et la sortie. Il a été prouvé (2000) que ce ne pouvoit être autre chose qu'une grosse tache; il en faut dire autant de ce que crut voir Scaliger (*Exerc.* 72 *contra Card.*), et Képler même le 28 mai 1607.

C'est à d'énormes taches du Soleil qu'il faut rapporter, si on veut les admettre, les deux faits qui sont dans Albufaradge (*Historia Dynast.*, *pag.* 94, 99). L'an 535 le Soleil eut une diminution de lumiere, qui dura 14 mois, et qui étoit très sensible : l'an 626 la moitié du disque du Soleil fut obscurcie, et cela dura depuis le mois d'octobre jusqu'au mois de juin. On voit quelquefois ces taches sans lunettes avec un simple verre fumé. Le 15 avril 1764 M. Darquier à Toulouse en vit une grosse, tout le monde la voyoit avec lui ; et cela arrive de temps en temps (3235) : voilà pourquoi on les avoit remarquées au Pérou, suivant Joseph a Costa (*Hist. des Indes occid.*, L. I, c. 2), avant qu'on les eût découvertes en Europe.

Scheiner observa assidument les taches du Soleil depuis 1618 jusqu'en 1627 : il avoit soin de les rapporter à l'écliptique lorsqu'il avoit observé leur situation par rapport au vertical ou aux paralleles à l'équateur : par ce moyen il décrivoit sur un carton la route d'une tache pendant les 13 j. de son apparition. On en trouve un très grand nombre de gravées dans son ouvrage, et elles lui firent reconnoître les regles suivantes (*Rosa Urs.*, *pag.* 225).

3233. A la fin de mai et au commencement de juin les taches décrivent des lignes droites inclinées sur l'écliptique du nord au sud, c'est-à-dire qu'elles vont de A en B (FIG. 268) : à la fin de novembre ou au commencement de décembre, elles décrivent des lignes droites en allant du midi au septent. ou de C en D : pendant l'hiver et le printemps leur route est concave vers le midi et convexe du côté du nord ; mais dans les six autres mois ou depuis le commencement de juin jusqu'au commencement de décembre la concavité est tournée vers le nord comme dans l'ellipse RXVMO.

La plus grande ouverture de ces ellipses arrive au commencement de mars et de septembre; alors le petit axe de chaque ellipse est $\frac{13}{100}$ du grand axe. Toutes les taches du Soleil, même les ombres et les facules, décrivent des routes semblables, depuis le moment où elles paroissent jusqu'à celui de leur disparition. On observe la même chose dans les grandes et dans les petites, dans celles qui ne durent que quelques jours comme dans celles qui font plusieurs révolutions, dans celles qui traversent le Soleil par le centre comme dans celles qui en sont éloignées. Cette régularité seule suffit pour démontrer que ces taches sont adhérentes au corps du Soleil, et qu'elles n'ont d'autre mouvement que celui du Soleil même autour de son axe. Les taches prouvent donc la rotation du Soleil ;et Scheiner en tira bientôt cette conclusion.

3234. Presque toutes les observations de Scheiner furent ensuite

confirmées par celles d'Hévélius (*Selenog.*, *pag.* 96) : Dominique Cassini en fit beaucoup aussi ; il en parla dans un petit ouvrage publié en 1673 (3064), et dans plusieurs volumes des Mém. de l'acad. Picard fit quelques observations des taches du Soleil en 1676 et 1679 (*Histoire céleste* 1741). La Hire en donna aussi quelques unes. On peut voir sur les taches du Soleil les Mémoires et l'Histoire de l'acad. depuis 1700 jusqu'à 1720, ceux de 1776, 1778.

Il résulte de toutes ces observations que les taches du Soleil sont très variables. Scheiner en a vu changer de forme, croître, diminuer, se convertir en ombres, disparoître totalement. La Hire a vu aussi des taches qui se sont dissipées dans le temps qu'elles étoient sur le disque du Soleil et avant de passer dans l'hémisphere opposé.

Il y a des taches qui, après avoir disparu long-temps, reparoissent au même endroit ; du moins Cassini pensoit que la tache du mois de mai 1702 étoit encore la même que celle du mois de mai 1695 (*Mém. ac.* 1702, *p.* 140), c'est-à-dire qu'elle étoit au même point ; et j'ai trouvé la même chose pour plusieurs autres (3241, 3276). On n'en a guere vu qui aient paru plus long-temps de suite que celle qui fut observée à la fin de 1676 et au commencement de 1677 ; elle dura pendant plus de 70 jours et parut dans chaque révolution (Cassini, *Elémens d'Astron.*, *pag.* 81).

3235. Les apparitions des taches du Soleil n'ont rien de régulier. Vers l'année 1611 qu'elles furent découvertes, on ne trouvoit presque jamais le Soleil sans quelques taches ; il y en avoit souvent un très grand nombre. Le P. Scheiner en a compté 50 tout à la fois. Bientôt elles devinrent plus rares ; depuis l'année 1650 jusqu'en 1670 il n'y a pas de mémoire qu'on en ait pu trouver plus d'une ou deux, qui furent observées fort peu de temps (Cassini, *Elémens d'Astronomie*, *pag.* 82) ; depuis le mois de décembre 1676 jusqu'au mois d'avril 1684 Flamsteed n'en vit point (*Philos. Trans. Abr. I*, 279) ; depuis 1686 jusqu'en 1688 Cassini n'en put découvrir (*Anciens Mém.* X, 727). De 1695 à 1700 l'on n'en vit aucune ; de 1700 à 1710, les volumes de l'académie en parlent continuellement : en 1710 on n'en vit qu'une seule ; en 1711 et 1712 on n'en observa point du tout : en 1713 on n'en vit qu'une, ce fut au mois de mai[a] (*Mém. acad.* 1713) : de 1716 à 1720 on en vit un nombre considérable ; il y en eut dix dans le mois de janvier 1720. Depuis ce temps-là on en a presque toujours vu. Cassini écrivoit en

[a] On en a vu plus souvent dans le mois de mai que dans les autres mois (*Mém.* 1703, *pag.* 110).

1740, « Elles sont présentement si fréquentes qu'il est très rare d'observer le Soleil sans en appercevoir quelques unes et même souvent un assez grand nombre à la fois» (*Elém. d'Astr.*, *p.* 182). Pour moi je puis dire que, depuis 1749, je ne me rappelle pas d'avoir jamais vu le Soleil sans qu'il y eût des taches sur son disque et souvent un grand nombre. C'est vers le milieu de septembre 1763 que j'ai apperçu la plus grosse et la plus noire; elle avoit une minute au moins de longueur, en sorte qu'elle devoit être quatre fois plus large que la Terre entiere: j'en ai vu aussi de très grosses le 28 février 1752, le 15 avril 1764, le 11 avril 1766, et le 17 avril 1767.

3236. Toutes les taches remarquables paroissent être renfermées dans une zone de 60° (Scheiner, *p.* 568, Hévélius *p.* 88); mais le 5 juillet 1780 j'en ai observé une à 40° degrés de l'équateur solaire. Les taches vont réellement d'occident en orient; mais elles paroissent aller à l'occident parceque nous ne les voyons que dans la partie inférieure de leur cercle : celle-ci est opposée à la partie supérieure qui est celle que nous considérons dans les cercles célestes pour juger de leur direction : sans cette regle nous dirions que le Soleil pendant la nuit va de l'occident à l'orient, et que pendant le jour il va de l'orient vers l'occident.

3237. Les taches du Soleil paroissent sur le bord de son disque extrêmement étroites, comme un trait fort délié; ce qui prouve qu'elles ont peu de hauteur ou plutôt qu'elles sont à la surface même du Soleil. Il faut cependant considérer que, quand elles auroient une certaine hauteur, elles pourroient bien ne paroître pas au bord ou à l'extrémité du Soleil, parcequ'elles n'ont aucune lumiere et qu'on ne les voit que quand elles interrompent la lumiere du disque solaire; mais du moins on verroit la hauteur tout entiere aussitôt qu'elle commenceroit à être toute projetée sur le Soleil. Il est vrai que la tache du mois de décembre 1719 étoit si grosse que quand elle arriva au bord occidental du Soleil elle y fit une échancrure noire, au lieu de disparoître comme les autres (*Hist. acad.* 1720, *p.* 96); celle du 3 juin 1703 avoit paru de même (*Mém.* 1703, *pag.* 122); mais sa largeur suffit pour expliquer cette apparence.

3238. Quelques physiciens crurent d'abord que les taches du Soleil étoient des corps solides qui faisoient leur révolution autour du Soleil[a] (3225): mais si cela étoit, les taches nous cacheroient à-peu-près la même portion du Soleil, soit sur les bords, soit au milieu; et le temps qu'elles paroissent sur le Soleil seroit plus court que le temps où on les perd de vue; au lieu que nous voyons ces

[a] Tarde les nomma *sidera borbonia*, et Maupertuis *sidera austriaca* (*Hevelii Selenog.*, *pag.* 83).

taches employer autant de temps à parcourir la partie antérieure du Soleil que la partie postérieure, sauf la petite différence que doit produire la grosseur du diametre du Soleil et la proximité de ces taches à l'un des poles du Soleil : enfin ces planetes ne pourroient point disparoître tout-à-coup et devenir invisibles pendant des années entieres (3234), changer de forme et faire toutes leurs révolutions chacune dans le même intervalle de temps.

3239. Galilée, qui n'étoit point attaché au systême de l'incorruptibilité des cieux, pensa que les taches du Soleil étoient une espece de fumée, de nuage, ou d'écume qui se formoit à la surface du Soleil et qui nageoit sur un océan de matiere subtile et fluide ; Hévélius étoit aussi de cet avis (*Selenog.*, *pag.* 83); et il réfute fort au long à cette occasion le systême de l'incorruptibilité des cieux.

3240. Mais si ces taches étoient aussi mobiles que le supposent Galilée et Hévélius, elles ne seroient point aussi régulieres qu'elles le sont dans leur cours. La force centrifuge que produit la rotation du Soleil les porteroit toutes vers un même endroit, au lieu que nous les voyons tantôt aux environs de l'équateur solaire, tantôt à 20 et 30 degrés de l'équateur, sur-tout au midi ; d'ailleurs elles reparoissent quelquefois précisément au même point où elles avoient disparu (3234, 3276). Ainsi je trouve beaucoup plus probable le sentiment de la Hire (*Histoire acad.* 1700, *pag.* 118, *Mémoire* 1702, *pag.* 138): il pense que les taches du Soleil sont les éminences d'une masse solide, opaque, irréguliere, qui nage dans la matiere fluide du Soleil et s'y plonge quelquefois en entier.

Peut-être aussi ce corps opaque n'est que la masse du Soleil recouverte communément par le fluide igné, et qui, par le flux et le reflux de ce fluide, se montre quelquefois à la surface et fait voir quelques unes de ses éminences. On explique par là d'où vient que l'on voit ces taches sous tant de figures différentes pendant qu'elles paroissent, et pourquoi, après avoir disparu pendant plusieurs révolutions, elles reparoissent de nouveau à la même place qu'elles devroient avoir si elles eussent continué de se montrer. On explique aussi les nébulosités blanchâtres dont les taches sont toujours environnées (3231) et qui sont les parties du corps solide sur lequel il ne reste plus qu'une très petite couche de fluide. Cependant la Hire pensoit, d'après quelques observations, qu'il falloit admettre plusieurs de ces corps opaques dans le Soleil, ou supposer que la partie noire pouvoit se diviser et ensuite se réunir.

3241. Quoi qu'il en soit, je pense qu'il y a des endroits déterminés pour la formation des taches du Soleil ; du moins, cela me

semble

semble prouvé par les grosses taches visibles sans lunettes en 1752, 1764, 1776, 1778, qui me paroissent avoir été au même point physique du disque solaire, suivant les observations et les calculs que j'ai donnés dans les Mémoires de l'académie pour 1776 et 1778.

3242. M. Alex. Wilson, professeur d'astronomie à Glasgow, ayant observé plusieurs taches qui, en approchant à une minute du bord du Soleil, perdoient leur nébulosité dans la partie tournée du côté du centre du Soleil, en conclut que les taches sont des cavités ou des gouffres, dans lesquels se précipite la matiere lumineuse sous la forme de nébulosité (*Philos. Trans.* 1774). Mais j'ai observé plusieurs fois que ce phénomene n'a pas lieu; d'ailleurs il n'est jamais assez sensible et assez certain pour pouvoir servir de base à un systême (*Mém.* 1776, *pag.* 508). M. Wilson a répondu à mes observations dans les Transactions Philosophiques de 1783. Au reste le P. Ximenès avoit déja proposé cette idée de volcans en 1771.

De l'Equateur solaire, et de la rotation du Soleil.

3243. Les taches du Soleil ont fait connoître que le Soleil tournoit sur lui-même autour de deux points qu'on doit appeller les poles du Soleil; le cercle du globe solaire qui est à même distance des deux poles (15) s'appellera l'équateur solaire: c'est par le mouvement apparent des taches qu'on déterminera la situation de cet équateur, c'est-à-dire son inclinaison et ses nœuds sur l'écliptique. Dominique Cassini communiqua à l'académie, dès l'année 1675, sa méthode pour trouver la révolution du Soleil, la situation de ses poles, et le mouvement apparent des taches (*Du Hamel, Histoire acad.*, *pag.* 144. *Anciens Mém. tome* 10, *pag.* 578 et 727).

De l'Isle, qui, en 1713, observoit beaucoup les taches du Soleil au Luxembourg à Paris, se forma une méthode qu'il explique en détail dans ses *Mémoires.* On trouvera aussi, dans les Elémens de Cassini le fils, une méthode graphique pour le même objet, mais dans laquelle il ne fait point entrer le mouvement de la Terre, se contentant d'avertir qu'il faut y avoir égard. Je vais bientôt expliquer plusieurs manieres de déterminer exactement l'équateur solaire, et la durée de sa rotation, lorsqu'on a trois observations d'une même tache sur le Soleil.

3244. La maniere d'observer les taches du Soleil est la même que pour les passages de Vénus; on y emploie le quart de cercle (2117) ou le micrometre (2136). Scheiner et Hévélius recevoient l'image

du Soleil dans une chambre obscure au travers d'une lunette (2481). Nous préférons aujourd'hui de regarder directement le Soleil, et de déterminer la différence de hauteur et d'azimut ou la différence d'ascension droite et de déclinaison entre la tache et le centre du Soleil, pour en déduire la différence de longitude et de latitude; car c'est toujours là qu'il faut parvenir (2130, 2138).

3245. Quand on aura observé plusieurs jours de suite la différence de longitude et de latitude entre la tache et le centre du Soleil, on les rapportera sur un carton, pour juger de leur progrès. Soit S (FIG. 268) le centre du disque solaire, SE une portion de l'écliptique, M une tache, SL la différence de longitude, et ML la différence de latitude entre le Soleil et la tache; X, V, M, O, les positions successives de la tache sur son parallele apparent RO; l'on verra facilement que ces positions forment à-peu-près une ellipse, si ce n'est vers le commencement de juin et de décembre où cette ellipse se réduit à une ligne droite; ce qui indique le lieu du nœud.

3246. L'ouverture apparente des ellipses que décrivent les taches du Soleil est proportionnelle à l'inclinaison du rayon visuel ou à l'élévation de la Terre au dessus du plan de l'équateur solaire, et cette élévation doit se mesurer au centre du Soleil. Soit S le centre du Soleil (FIG. 269), EAQV le plan de l'équateur solaire, ST la ligne dirigée vers la Terre, qui est toujours dans le plan de l'écliptique et qu'il faut concevoir relevée au-dessus de la figure; l'angle TSV est l'élévation de notre œil au-dessus du plan de l'équateur solaire; c'est l'obliquité sous laquelle nous voyons ce cercle équatorial, et le sinus de cet angle sera le petit axe de l'ellipse, le grand axe ou le diametre du Soleil étant le sinus total (1815, 2967). Ainsi en voyant que le petit axe de ces ellipses est $\frac{13}{100}$ de leur grand axe, au temps où elles sont le plus ouvertes, c'est-à-dire au commencement de mars et de septembre, on en peut conclure que l'équateur du Soleil n'est jamais incliné à notre œil de plus de $7°\frac{1}{2}$: l'angle TSV est la latitude héliocentrique de la Terre par rapport à l'équateur du Soleil; l'argument de cette latitude est la distance de la Terre au nœud de l'équateur solaire ou au 18e degré du Sagittaire (3278). Pour trouver en tout temps l'ouverture des ellipses que décriront ces taches, il suffit de multiplier le sinus $7°\frac{1}{2}$ par le sinus de la distance de la Terre ou du Soleil à l'un des nœuds (3875).

3247. La regle précédente, pour trouver l'ouverture de ces ellipses, suppose que la Terre soit immobile pendant la durée de l'apparition d'une tache; le mouvement de la Terre rend le grand

axe plus long, ou plutôt il empêche que la trace ne soit réellement une ellipse : et les regles précédentes ne sont bien exactes qu'après qu'on a réduit les observations à ce qu'elles donneroient si la Terre ou le Soleil eût été immobile pendant l'intervalle de ces observations. En effet, la Terre, qui s'éleve continuellement au-dessus du plan de l'équateur solaire ou s'abaisse en s'en rapprochant, ne permet pas que le cercle décrit par la tache paroisse jamais exactement sous la forme de la ligne droite ni de l'ellipse qui auroit lieu si la Terre étoit immobile ; ou du moins c'est une ellipse qui change tous les jours de forme : ainsi cette trace apparente ou cette courbe décrite sur un carton ne nous sert qu'à reconnoître le progrès ou l'exactitude des observations, et à nous conduire dans le calcul.

3248. La différence de longitude SL (FIG. 268) et la différence de latitude LM étant connues (2131), on en déduira la ligne SM et l'angle LSM. La ligne droite SM, prise sur le disque apparent du Soleil, est la projection ou le sinus d'un arc du globe solaire dont le centre est au centre S de ce globe, ainsi que nous avons vu dans le calcul des éclipses de Soleil que les arcs de la circonférence de la Terre, projetés sur un plan, devenoient égaux à leur sinus (1813). Pour connoître l'arc du globe du Soleil qui répond à la ligne droite SM ou l'arc de distance, on fera cette proportion: le rayon du Soleil réduit en secondes est au sinus total ou à l'unité comme la longueur SM est au sinus de l'arc qui lui répond : et l'on aura l'arc ou l'angle sous lequel un observateur situé au centre du Soleil verroit la tache M éloignée de la Terre ; car la Terre paroît répondre au point S ou au pole même du cercle ACBD qui est le limbe du Soleil vu de la Terre.

3249. Il faut retrancher de l'arc qui répond à SM autant de minutes que la ligne SM, prise sur le disque apparent du Soleil, en contient, parceque les rayons visuels qui vont aboutir en S et en M n'étant pas paralleles, SM est un peu plus grande que le sinus de l'arc qui lui répond. Soit TC (FIG. 270) le rayon mené de la Terre au Soleil, TBD le rayon mené à la tache, CF le demi-diametre du Soleil, CD la distance observée entre la tache et le centre du Soleil; c'est le sinus de l'arc AE, en supposant DE parallele à CT : mais l'arc AB est la vraie distance de la tache, et il est plus petit que l'arc AE de la quantité de l'angle CTD ou BDE. Pour avoir la valeur de cet angle, on considérera que le sinus BDE $= \frac{EK}{ED}$, et que EK $=$ BE cos. AB (3446) ; donc sin. BDE $=$ BE : il faut donc retrancher l'arc BE$=$CTD de l'arc AE dont on a le sinus CD. Il

est vrai que l'angle CTD ne va jamais qu'à 16 ou 17 minutes, même pour la Lune, et qu'ainsi l'on pourroit le négliger sans se tromper de plus de 5″ sur la distance apparente des taches ; mais il est trop aisé d'y avoir égard pour qu'on doive le négliger.

Je néglige ici la petite différence qu'il y a entre le demi-diametre CF du Soleil perpendiculaire au rayon TC et le demi-diametre CG perpendiculaire au rayon TG ou à la tangente menée de la Terre au bord du Soleil. La différence n'est pas d'un centieme de seconde.

3250. Nous pouvons actuellement déterminer la longitude héliocentrique de la tache, et sa latitude vue du Soleil. Soit P et E (FIG. 271) les poles de l'écliptique sur le globe du Soleil, PREK le grand cercle qui sépare l'hémisphere tourné vers la Terre de l'hémisphere opposé, T le point du globe solaire où répond la Terre, c'est-à-dire le point du Soleil qui a la Terre à son zénit, ou qui nous paroît répondre au centre même du disque solaire, M le point où est la tache, TM l'arc de distance déduit de l'observation (3248). L'angle sphérique LTM est le même que l'angle plan LSM de la figure 268, déterminé par observation. Dans le triangle sphérique LMT, formé sur la convexité du globe solaire, l'on connoît TM qui est l'arc de distance, et l'angle LTM : on cherchera TL et LM ; l'un est la différence de longitude entre le lieu de la Terre et le lieu de la tache qui répond au point L de l'écliptique ; l'autre la latitude héliocentrique de cette tache : on en verra l'exemple ci-après (3266). S'il s'agissoit d'une tache de la Lune, il y auroit quelques considérations de plus (3308).

3251. On ajoutera la différence de longitude trouvée avec la longitude de la Terre (c'est-à-dire celle du Soleil augmentée de 6 signes), si le point L est à la droite ou à l'occident du centre du Soleil ; on aura la longitude de la tache vue du centre du Soleil, c'est-à-dire le point de l'écliptique où un observateur situé au centre du Soleil verroit répondre cette tache.

3252. Lorsque, par cette méthode, on a déterminé trois positions de la tache vue du Soleil, on connoît, par longitudes et latitudes, trois points, X, V, M, (FIG. 271) d'un petit cercle parallele à l'équateur solaire : on peut déterminer le pole de ce petit cercle ; et c'est aussi le pole de l'équateur solaire GHK. Le problême seroit le même si l'on demandoit de trouver la déclinaison d'une étoile et la hauteur du pole par le moyen de trois hauteurs observées avec deux différences d'azimut, sans avoir de méridienne ; ce sont trois triangles sphériques qui ont deux côtés communs, que l'on cherche par le moyen du troisieme côté qui est donné avec la différence des

angles adjacens à ce côté connu. Nous en donnerons bientôt la solution (3258).

3253. Si la longitude héliocentrique d'une tache étoit la même dans les trois observations, ce seroit une preuve que le Soleil ne tourne point sur son axe; car le centre du Soleil ne peut voir une tache répondre toujours au même point du ciel, si cette tache est entraînée par la circonférence du Soleil. La longitude héliocentrique d'une tache que nous venons de déterminer (3251) ne change donc que par le mouvement du Soleil; mais elle ne change pas uniformément, parceque l'écliptique, sur laquelle nous comptons les longitudes, n'est pas l'équateur même du Soleil, autour duquel se fait le mouvement du Soleil, et sur lequel seulement on peut trouver des progrès uniformes.

3254. Si la latitude d'une tache dans les trois observations étoit constante, tandis que la longitude change, on seroit assuré que la tache tourne parallèlement à l'écliptique, c'est-à-dire autour des poles mêmes de l'écliptique, qui, dans ce cas, seroit confondue avec l'équateur du Soleil.

Si la longitude et la latitude de la tache changent tout à la fois, comme on l'observe réellement, c'est une preuve que la tache décrit un parallele à quelque autre cercle que l'écliptique; d'où il suit que l'équateur du Soleil est incliné sur l'écliptique.

3255. Si nous avons une suite d'observations d'une tache pendant une demi-révolution autour du Soleil, dans le temps où le Soleil est dans les nœuds de son équateur, nous verrons cette tache à sa plus grande et à sa plus petite latitude : la différence de ces deux latitudes donnera le double de l'inclinaison de l'équateur solaire; car soit AB (FIG. 268) le diametre de l'équateur solaire, KE l'écliptique, RO le parallele de la tache, les latitudes OE et KR de cette tache (quand elle est sur le cercle AROE, ou le cercle de ses latitudes extrêmes) different entre elles du double de EB, c'est-à-dire du double de l'inclinaison de l'équateur solaire, puisque, dans l'une des observations, la latitude EO de la tache est plus grande que BO de la quantité BE, et que, dans l'autre observation, la latitude KR est au contraire plus petite que AR ou BO de la même quantité AK=EB. Si l'une des latitudes observées étoit boréale, et l'autre australe, ce seroit la demi-somme des deux latitudes extrêmes, ou de la plus grande et de la plus petite, qui donneroit l'inclinaison de l'équateur solaire. C'est ainsi que nous trouverons l'inclinaison de l'équateur lunaire, parceque les taches de la Lune peuvent s'observer pendant toute la durée d'une rotation lunaire. Mais comme

les taches du Soleil paroissent à peine pendant une moitié de leur révolution, nous cherchons l'inclinaison de l'équateur solaire par l'inégalité des trois latitudes observées.

3256. Les observations les plus concluantes pour déterminer les nœuds et l'inclinaison de l'équateur solaire sont celles qui se font aux environs des nœuds, c'est-à-dire vers le commencement de juin et de décembre, parcequ'alors la route des taches est plus inclinée sur l'écliptique, la latitude change plus rapidement, et l'on a, au commencement et à la fin de l'apparition, deux latitudes extrêmes.

Si l'on observoit les taches dans le temps que le Soleil est à 90^{d} des nœuds, leur route étant une ellipse dont on voit difficilement les extrémités, et dont le milieu est parallele au diametre du Soleil qui représente l'écliptique, les plus petites erreurs dans les observations nous rejetteroient fort loin, sur-tout pour la détermination du nœud.

L'ellipse de l'équateur solaire a son grand axe incliné différemment sur l'écliptique, suivant la position de la Terre; quand le Soleil est dans le nœud de l'équateur, l'ellipse est réduite à une ligne droite; et cette ligne est inclinée de 7° sur l'écliptique, puisque alors nous sommes dans le plan des deux cercles, et nous voyons leur inclinaison tout entiere.

A mesure que le Soleil s'éloigne du nœud, l'ellipse s'ouvre, mais son inclinaison diminue: nous voyons le cercle obliquement; son grand axe est le diametre perpendiculaire à notre rayon visuel, et le petit axe qui est perpendiculaire au grand est aussi dans le plan perpendiculaire au cercle de l'équateur solaire; ainsi il fait, avec le cercle de latitude perpendiculaire à l'écliptique, le même angle que le grand axe de l'ellipse avec l'écliptique.

Donc, pour avoir l'angle du grand axe avec l'écliptique, il suffit de calculer l'angle des deux cercles célestes, dont l'un est perpendiculaire à l'équateur solaire, et l'autre à l'écliptique; la tangente de cet angle est comme le cosinus de la distance du Soleil au nœud (3887).

3257. M. Boscovich fut le premier qui résolut le problême de la rotation, dans une dissertation publiée à Rome en 1737; il en donna deux solutions, dont l'une se trouve dans la premiere édition de mon Astronomie. Il en traite plus au long dans le cinquieme volume de ses Œuvres. De l'Isle avoit résolu ce problême de deux manieres, par les triangles sphériques et par la projection; mais ses mémoires ne parurent qu'en 1738.

Depuis ce temps-là, plusieurs personnes se sont exercées sur ce problême: M. de Saint-Jacques de Sylvabelle (*Mém. présentés*, tom. V); sa méthode a été perfectionnée par M. Hédin, dans une

dissertation publiée à Upsal en 1776 : le P. Pezenas, (*Astron. des marins, Mém. présentés,* T. VI) ; celle-ci est dans la seconde édition de mon Astronomie : M. Jean-Albert Euler, dans les Mémoires de Pétersbourg, T. XII : M. de la Grange, dans sa piece sur la nutation (*Pieces des prix,* T. IX, *p.* 47) : M. du Séjour, dans les Mémoires de l'Académie pour 1776, *p.* 278, et dans son Traité analytique, *p.* 601 : M. Hausen, M. Beckmarck, M. Duval le Roy, M. Kæstner, enfin M. Cagnoli (*Mém. présentés,* T. X, 1785.)

Je vais expliquer trois méthodes, en commençant par une méthode analytique déduite des regles de la trigonométrie. Toutes ces méthodes peuvent servir également pour l'équateur lunaire, en réduisant au centre de la Lune les longitudes et les latitudes d'une tache : mais on verra ci-après (3310) une approximation qui est meilleure pour la Lune.

3258. CONNOISSANT *3 longitudes et 3 latitudes héliocentriques d'une tache, trouver la position de l'équateur solaire.* Soit E le pole de l'écliptique (FIG. 272), P le pole de l'équateur solaire, T, B, C les trois positions de la tache. Dans un triangle sphérique tel que PEC, cos. PC = cos. PE . cos. EC + cos. E . sin. PE . sin. EC (3947) ; il en est de même des triangles PEB et PET ; ainsi l'on a ces trois équations :

EC	$= a$
EB	$= b$
ET	$= c$
BEC	$= m$
TEC	$= n$
EP	$= x$
PT = PB = PC	$= y$
PEC	$= z$

$$\text{Cos. } y = \text{cos. } x \,.\, \text{cos. } a + \text{cos. } z \,\text{sin. } x \,.\, \text{sin. } a.$$
$$\text{Cos. } y = \text{cos. } x \,.\, \text{cos. } b + \text{cos. } (z+m)\, \text{sin. } x \,.\, \text{sin. } b.$$
$$\text{Cos. } y = \text{cos. } x \,.\, \text{cos. } c + \text{cos. } (z+n)\, \text{sin. } x \,.\, \text{sin. } c.$$

De la premiere équation on retranche la seconde, et l'on a $\text{cos. } x \,.\, (\text{cos. } a - \text{cos. } b) + \text{sin. } x\, (\text{sin. } a \text{ cos. } z - \text{sin. } b \text{ cos. } \overline{z+m}) = 0.$ De la premiere on ôte la troisieme, et l'on a $\text{cos. } x\, (\text{cos. } a - \text{cos. } c) + \text{sin. } x\, (\text{sin. } a \text{ cos. } z - \text{sin. } c \text{ cos. } \overline{z+n}) = 0.$ Divisant la premiere par la seconde, multipliant ensuite par sin. a.cos. z — sin. c. cos. $(z+n)$, et divisant par cos. a — cos. b, on a cette équation $\frac{\text{sin. } a \text{ cos. } z - \text{sin. } b \text{ cos. }(z+m)}{\text{cos. } a - \text{cos. } b} = \frac{\text{sin. } a \text{ cos. } z - \text{sin. } c \text{ cos. }(z+n)}{\text{cos. } a - \text{cos. } c}$. On peut avoir aussi cette équation en égalant la premiere valeur de cos. y à la 2e et à la 3e pour en tirer deux valeurs de cos. x.

Mais on a $\text{cos. }(z+m) = \text{cos. } z \,.\, \text{cos. } m - \text{sin. } z \text{ sin. } m$ (3810), et $\text{cos. }(z+n) = \text{cos. } z \,.\, \text{cos. } n - \text{sin. } z \,.\, \text{sin. } n$; substituant ces valeurs, divisant par cos. z, et mettant tang. z au lieu de $\frac{\text{sin. } z}{\text{cos. } z}$, on trouvera l'équation suivante $\frac{\text{sin. } a - \text{sin. } b \,.\, \text{cos. } m + \text{sin. } b \,.\, \text{sin. } m \,.\, \text{tang. } z}{\text{cos. } a - \text{cos. } b} = \ldots\ldots$

$\frac{\sin. a - \sin. c . \cos. n + \sin. c . \sin. n . \operatorname{tang}. z}{\cos. a - \cos. c}$; donc $(\sin. a - \sin. b . \cos. m) \times (\cos. a - \cos. c) + \sin. b . \sin. m . \operatorname{tang}. z (\cos. a - \cos. c) = (\sin. a - \sin. c . \cos. n)(\cos. a - \cos. b) + \sin. c . \sin. n . \operatorname{tang}. z \times (\cos. a - \cos. b)$; d'où il est facile de dégager l'inconnue, et l'on aura $\operatorname{tang}. z = \frac{(\sin. a - \sin. c . \cos n)(\cos. a - \cos. b) - (\sin. a - \sin. b . \cos. m)(\cos. a - \cos. c)}{\sin. b . \sin. m (\cos. a - \cos. c) - \sin. c . \sin. n (\cos. a - \cos. b)}$. C'est une des quantités cherchées, savoir, la différence de longitude entre le pole de l'équateur solaire et la premiere longitude observée, complément de la longitude de la tache comptée sur l'écliptique depuis l'intersection de l'équateur solaire avec l'écliptique.

Connoissant l'angle z, on trouvera EP ou l'inclinaison x de l'équateur solaire sur l'écliptique par l'équation, $\cos. x (\cos. a - \cos. b) + \sin. x (\sin. a . \cos. z - \sin. b . \cos. \overline{z + m}) = 0$, ou $\frac{\sin. x}{\cos. x} = \operatorname{tang}. x = \frac{-(\cos. a - \cos. b)}{\sin. a . \cos. z - \sin. b . \cos. (z + m)}$; enfin on trouvera y ou la distance de la tache au pole solaire par le moyen du triangle EPC, dont on connoît deux côtés et l'angle compris, ou par le moyen de la premiere équation $\cos. y = \cos. x . \cos. a + \cos. z . \sin. x . \sin. a$.

Il ne faut pas oublier, dans l'usage de ces formules, les changemens de signes qui arrivent aux sinus et aux cosinus (3794) : il sera bon de placer sur un globe les longitudes et les latitudes dont on voudra faire le calcul.

3259. M. Cagnoli, en 1782, a trouvé une méthode plus courte par les formules de Neper et les angles de positions (*Trigon.*, pag. 448; *Mém. présentés* T. X, 1775) : c'est la plus simple de toutes les méthodes directes; elle n'exige que 21 logarithmes, tandis que celle du P. Pezenas, dont lui-même avoit fait l'application, en supposoit 46, et celle de M. Boscovich 37, ou du moins 27 pour avoir l'inclinaison et le nœud. La nouvelle méthode suppose les différences finies qui seront expliquées (4049) : on verra que, dans un triangle ABC, dont deux côtés AB et BC sont constans, on a $-\sin. \frac{1}{2} \delta BC : \operatorname{tang}. \frac{1}{2} \delta B :: \sin. (BC - \frac{1}{2} \delta BC) : \cot. (C + \frac{1}{2} \delta C)$ (4050). Mettant pour ABC les lettres PET (FIG. 272) et changeant les signes parceque ET est supposé augmenter, on a $- \sin. \frac{1}{2} \delta ET : - \operatorname{tangente} \frac{1}{2} \delta PET :: \sin. (ET + \frac{1}{2} \delta ET) : \cot. (PTE - \frac{1}{2} \delta PTE)$, ou $\sin. \frac{1}{2}(EB - ET) : \operatorname{tang}. \frac{1}{2} BET :: \sin. \frac{1}{2}(EB + ET) : \cot. \frac{1}{2}(PTE + PBE)$; proportion où tout est connu excepté le dernier terme. On fera deux autres analogies pareilles pour le triangle PCE comparé avec les triangles PBE, PTE; l'on aura la demi-somme du second et du troisieme angle de position et celle du premier et du troisieme. Nous n'emploierons ci-après que ces demi-sommes des angles de positions.

Il faut

Il faut en conclure l'angle PEC ; l'on dira (4049) pour le triangle PCE, tang. ½ ♋ PEC : tang. ½ ♋ PCE :: tang. (PEC + ½ ♋ PEC) : tang. (PCE + ½ ♋ PCE) ; ou convertissant le triangle PCE en un triangle PBE, tang. ½ CEB : tang. ½ (PBE — PCE) :: tang. (PEC + ½ CEB) : tang. ½ (PBE + PCE) : le troisieme terme est le seul inconnu, et donnera la valeur de l'angle PEC, qui marque le lieu du pole du Soleil.

Alors, dans le triangle PEC, connoissant CE, PEC et PCE, l'on trouvera PE et PC. M. Cagnoli a donné un exemple de cette méthode (*Mém. prés.*). Mais voici les formules disposées pour l'opération, et appliquées au même exemple par M. de Lambre, qui a refait tous les calculs avec un nouveau soin, sur trois de mes observations.

3260. Soient les trois longitudes de la tache, vues du centre

	1775, 14 juin.	18 juin.	21 juin.
du Soleil	$7^s\ 8°\ 34'\ 21''$	$9^s\ 5°\ 48'\ 51''$	$10^s\ 19°\ 0'\ 14''$
dist. au pole	90 38 6	97 30 8	101 35 16

Appellant les trois longitudes L', L'', L''', et les distances au pole D', D'', D''', on aura la demi-somme a des deux premiers angles de position par cette formule : tang. $a = \frac{\text{cot.} \frac{1}{2}(L''-L') \text{ sin.} \frac{1}{2}(D''-D')}{\text{sin.} \frac{1}{2}(D''+D')} = 6°$ $16'\ 45''$. On trouvera la demi-somme b du premier et du troisieme, et la demi-somme c des deux derniers, par les équations : tang. $b = \frac{\text{cot.} \frac{1}{2}(L'''-L') \text{ sin.} \frac{1}{2}(D'''-D')}{\text{sin.} \frac{1}{2}(D'''+D')} = 4° 34' 10''$, et tang. $c = \frac{\text{cot.} \frac{1}{2}(L'''-L'') \text{ sin.} \frac{1}{2}(D'''-D'')}{\text{sin.} \frac{1}{2}(D'''+D'')}$ $= 5°\ 13'\ 2''$.

Pour avoir le lieu du pole, on reprendra l'équation tang. (PEC + ½ CEB) = tang. ½ (PBE + PCE) tang. ½ CEB. cot. ½ (PBE — PCE), et l'on considérera que CEB est la différence des deux dernieres longitudes ; que ½ (PBE + PCE) est la demi-somme c des deux derniers angles de position, et ½ (PBE — PCE) = $a - b$; car si de la demi-somme a des deux premiers on ôte celle du premier et du troisieme qui est b, il reste la demi-différence du second et du troisieme. On cherchera donc la valeur de tang. (PEC + ½ CEB) ou de PEC + ½ (L'''—L'') ; tang. c tang. ½ (L'''—L'') cot. $(a-b) = 50° 26' 50''$; et, y ajoutant ½ (L'''+L''), on a PEC + L''' = $11^s\ 17°\ 51'\ 20''$, qui est la longitude du pole P du Soleil ; ainsi le nœud est à $2^s\ 17°\ 51'\ 20''$.

Dans ces différentes formules, il suffit d'observer la regle des signes (3794), et de faire obtus l'arc trouvé par une opération, lorsque les facteurs négatifs sont en nombre impair dans l'expression qui sert à en trouver la tangente ; par ce moyen, l'on n'a pas besoin de construire une figure, ni de faire aucune attention à la situation du nœud par rapport aux lieux de la tache.

3261. On peut ensuite trouver les deux autres côtés PE et PC par la regle de Néper (3987). Pour le cas dont il s'agit, on a le côté EC$=\frac{1}{2}D'''$; et, nommant P la longit. du pole P, on a l'angle PEC$=$ P$-$L$'''$; l'angle PCE, ou le troisieme angle de position, est égal à $b+c-a$; ainsi la différence des angles PCE,PEC est P$-$L$'''-b-c+a$; leur somme P$-$L$'''+b+c-a$; on fera P$-$L$'''=m=28°\ 51'\ 6''$, et $n=b+c-a=3°\ 30'\ 27''$; on aura la tangente de la demi-différ. des côtés cherchés PE,PC $=\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}D'''\ \text{sin.}\frac{1}{2}(m-n)}{\text{sin.}\frac{1}{2}(m+n)}=43°\ 59'\ 0''$, et celle de la demi-somme $=\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}D'''\ \text{cos.}\frac{1}{2}(m-n)}{\text{cos.}\frac{1}{2}(m+n)}=51°\ 14'\ 10''$. En ajoutant les deux valeurs, on trouve 95° 13′ 10″; c'est le plus grand côté ou la distance PT de la tache au pole boréal de l'équateur solaire; leur différence 7° 15′ 10″ est le petit côté PE, inclinaison de l'équateur solaire, qui résulte de ces trois observations.

3262. Après avoir expliqué deux méthodes géométriques et directes, je vais employer à cette recherche une méthode indirecte qui est plus aisée et plus courte : voici d'abord un exemple des calculs nécessaires pour trouver d'après l'observation la position d'une tache (3248), auquel je joindrai celui de la déclinaison solaire qui sert à reconnoître l'identité des taches, et celui de l'ascension droite solaire qui sert à trouver la durée de la rotation (3274). Soit S le centre du disque solaire (FIG. 272 n° 2), PDCR sa circonférence, T le lieu d'une tache, EQ un parallele à l'équateur de la sphere sur lequel on observe les différences d'ascension droite, DSG le cercle horaire qui lui est perpendiculaire, HI une portion de l'écliptique, PSL le cercle de latitude qui lui est perpendiculaire et qui passe par le centre du Soleil, CMNF l'équateur solaire, N le nœud descendant de l'équateur solaire qui est celui que nous voyons en été, TR le parallele à l'équateur solaire décrit par la tache, PKT le cercle de latitude qui passe par la tache, TK sa latitude, TM sa distance à l'équateur du Soleil ou sa *déclinaison solaire.*

3263. Le 15 juin 1775, à midi, j'observai la différence de passages entre la tache T et le bord oriental Q du Soleil de 32″ $\frac{3}{4}$ de temps : multipliant par quinze fois le cosinus de la déclinaison du Soleil (3879), et retranchant le produit du demi-diametre du Soleil, j'ai la distance SA parallèlement à l'équateur ou la différence d'ascension droite sur le parallele du Soleil, 8′ 16″. J'observai aussi la différence de déclinaison AT de 10″ au midi; j'en conclus l'ang. AST de 1° 9′ et l'ang. TSG de 88° 51′; je cherche aussi l'hypoténuse ST de 8′ 16″. On divise cette quantité par le demi-diametre du Soleil diminué de 3″ (1395), et l'on a le sinus de l'arc du globe solaire,

dont ST est la projection, compris entre la tache et le point de la surface solaire qui nous paroît répondre au centre du Soleil : il faut en ôter 8′ pour plus de précision (3249) ; mais cela ne produit pas une minute sur la déclinaison solaire.

3264. Quand la tache est fort près du bord du Soleil, et qu'on a mesuré la petite distance avec beaucoup de précision, il vaut mieux employer cette distance observée que de la déduire des différences d'ascension droite et de déclinaison. La distance au centre du Soleil, divisée par le rayon solaire, donne alors directement le sinus de l'arc ST ; c'est ce que j'ai fait pour d'anciennes observations de la Hire qui avoit mesuré avec un micrometre la distance au bord le plus proche.

J'ôte l'angle de position DSP 2° 35′ de l'angle TSG ; il reste TSL. Après le solstice d'été, le point A est au-dessous à gauche et à l'orient du point D jusqu'au solstice d'hiver.

En général, l'angle de position s'ajoute à l'angle TSG AVANT le 21 juin, si la tache est AU-DESSUS du centre, et A GAUCHE, ou avant son passage par le milieu du Soleil : si une de ces trois conditions change, ou toutes les trois ensemble, il faut le retrancher ; s'il y en a deux qui changent, c'est toujours le signe + qui subsiste.

Si la somme surpasse 90°, c'est une preuve que la tache qui étoit au nord du centre par rapport à l'équateur, passe au midi par rapport à l'écliptique, ou au contraire ; c'est-à-dire que si la différence de déclinaison, par raport au centre du Soleil, étoit du côté du midi, sa différence de latitude seroit du côte du nord.

Dans le triangle PST, considéré comme triangle sphérique sur le globe du Soleil, on connoît l'angle TSP, le côté ST et le côté PS qui est toujours de 90°(3250) ; on cherche l'angle P, ou ce, qui revient au même, dans le triangle TSK on cherche l'arc SK de l'écliptique : le log. tang. de P est la somme des logarithmes de tang. ST et cos. TSK (3899) ; cet angle P se trouve ici de $1^s\,1°\,33'$, qui, ôté de la longitude de la Terre, $8^s\,24°\,4'$, parceque la tache n'étoit pas encore parvenue au cercle de latitude PSL, donne la longitude héliocentrique de la tache $7^s\,22°\,31'$ sur l'écliptique. On pourroit également chercher l'arc SA de l'écliptique par le moyen du triangle TSK dont on connoît l'hypoténuse et un angle.

On juge que la tache n'est pas encore arrivée au cercle de latitude quand elle est à gauche du centre dans les différences de passages, ou plus près du second bord que du premier ; si ce n'est lorsque l'angle de position s'étant trouvé plus grand que l'angle S, on en a retranché celui-ci ; car alors la tache qui étoit à gauche du cen-

tre par rapport au cercle de déclinaison, devient à droite par rapport au cercle de latitude.

3265. Pour trouver le côté PT ou la latitude TK de la tache, on ajoute les log. sin. ST et sin. S (3898), et l'on a le logar. sin. de la latitude, qui est ici de 1° 57′ 24″. Pour trouver la déclinaison solaire, je suppose que l'on connoisse à-peu-près le lieu du nœud et l'inclinaison (3245); par exemple, le nœud N étant supposé à 8^s 17°, la distance NK de la tache au nœud est de 24° 29′ sur l'écliptique: dans le triangle sphérique TKN, connoissant TK et KN, on trouve l'hypoténuse TN et l'angle TNK = 4° 43′; j'y ajoute l'angle KNM, inclinaison de l'équateur solaire MN sur l'écliptique KN que j'ai trouvée d'environ 7° 30′, et j'ai l'angle TNM. Il faudroit le retrancher si la tache étoit plus avancée que le nœud, et que sa latitude fût également méridionale (900). Enfin, dans le triangle TMN, connoissant l'hypoténuse TN et l'angle TNM = 12° 13′, je trouve la déclinaison solaire TM = 5° 3′ australe, comme l'indique la figure (ou la regle de l'article 901). On cherchera aussi la distance au nœud sur l'équateur solaire ou le côté MN 24° 3′; on l'ôtera de la longitude du nœud N, parcequ'elle est plus grande que celle de la tache, et l'on aura l'ascension droite solaire MN de la tache 7^s 22° 57′.

3266. Ce calcul n'exige pas 10 minutes de temps, comme je l'ai souvent éprouvé sans me presser; en voici le type.

Diff. asc. d. 8′ 16″	269548		
Diff. déclin. 10	100000		
Tangente.	169548…	88° 51′	TSG
		2 35	angle de posit.
Sinus	—999991…	86 17	angle S.
Hypoténuse . . .	269557…	8′ 16″	
Demi-diametre . .	—297451…	15 43	
Sinus ST	972106…	31° 44′	
		8	ôtez
		31 36	ST

Tang. ST.	978902.	. sin. ST	971932
Sin. S. . . +	999905.	. cos. S	881388
Tangente P .	978807.	. sin. lat.	853320
Diff. long. .	1^s 1° 33′		1° 57′ 24″
Long. Terre.	8 24 4		lat. de la tache.
Long. de la tache	7 22 31		
Nœud . . .	8 17 0		
Dist. au nœud	0 24 29		

Cosin. lat. . . .	999975 . . .	cotang. lat. . .	146655 . . .	sin. hypot.	961856
Cosin. dist. . .	995908 . . .	sin. dist. . . .	951745 . . .	sin. som. .	932553
Cosin. hypot. .	995883 . . .	cot. angle. . .	108400 . . .	sin. déclin.	894409

Angle 4° 43′. Déclinaison solaire 5° 3′.

Inclinaison 7 30

Somme ou différence	12 13	Tangente hypoténuse. . . .	965971
Cherchez le sin. et le cos.		Cosinus somme	999005
		Tangente distance MN. . .	964976
		= 0^s 24° 3′	
		Nœud. . . 8 17 0	
		Ascens. droite solaire. . . 7 22 57.	

3267. Quand, parmi les observations d'une même tache, on en aura ainsi calculé trois, il ne restera que peu de travail à faire

pour parvenir à les représenter exactement, c'est-à-dire pour trouver l'inclinaison et le nœud. L'usage des méthodes ou des formules directes que nous avons indiquées, seroit incomparablement plus long, plus difficile et plus sujet à erreur.

3268. La rotation du Soleil n'étant pas parfaitement connue, on ne peut supposer autre chose si ce n'est l'uniformité du mouvement de la tache dans un parallele à l'équateur du Soleil : et l'on ne peut pas supposer, comme on le fait pour les élémens des planetes, que leur moyen mouvement, dans un intervalle de temps donné, soit exactement connu.

Je suppose donc qu'on ait trouvé par observation trois longitudes et trois latitudes d'une tache, et qu'on en ait conclu trois fois la déclinaison solaire. Si ces trois déclinaisons sont parfaitement égales, c'est une preuve que le nœud et l'inclinaison sont véritablement tels qu'on les a supposés, ou du moins qu'ils satisfont aux trois observations; car si l'inclinaison est défectueuse, elle influera beaucoup plus sur les observations qui sont loin du nœud, et produira des erreurs contraires dans celles qui sont avant et après le nœud : de même si le lieu du nœud a été mal supposé, la déclinaison solaire sera fort différente pour les observations voisines du nœud, et ne changera pas pour celles qui sont vers les limites : ainsi l'on ne sauroit trouver la même déclinaison solaire; celle-ci changera d'environ 8′ dans certains cas pour chaque degré d'erreur sur le lieu du nœud.

3269. Je prendrai donc pour exemple les trois observations suivantes, que j'ai faites les 14, 18 et 21 juin 1775, et dont j'ai donné le calcul par cette méthode (*Mém.* 1776, *pag.* 464).

Jours.	Longitude vue du Soleil.	Latitude vue du Soleil.	Déclinaison solaire.
Juin 14	7ˢ 8° 34′	0° 38′ A	5° 17′
18	9 5 49	7 30	5 2
21	10 19 0	11 35	4 57

Premiere hypothese. En supposant le nœud à 8ˢ 17° et l'inclinaison de 7° 30′, je trouve pour les trois déclinaisons, qui devroient être égales, 5° 17′, 5° 2′ et 4° 57′ : je commence d'abord par accorder les deux extrêmes qui different de 20′; pour cet effet je change

l'inclinaison seulement, et la troisieme analogie qui, dans l'exemple précédent, sert à trouver la déclinaison solaire : je trouve que dix minutes de moins sur l'angle d'inclinaison réduisent ces déclinaisons à 5° 11′ et 5° 6′, qui ne different plus que de 5′; ainsi j'ai diminué de 15′ leur différence en diminuant l'inclinaison de 10′; or 16 : 10 :: 5 : 3; donc, ôtant encore 3′ de l'inclinaison 7° 20′, j'aurai deux déclinaisons égales : en effet, avec l'inclinaison 7° 17′, je trouve dans les deux observations 5° 9′ de déclinaison solaire. Avec cette même inclinaison 7° 17′, je calcule l'observation intermédiaire du 18 qui est plus près du nœud, et je trouve 5° 6′ pour l'inclinaison solaire, c'est-à-dire 3′ de moins que par les deux autres observations. Voilà donc une premiere hypothese qui satisfait à deux observations, et qui differe de 3′ pour l'autre.

3270. Seconde hypothese. Je prends un autre lieu du nœud pour trouver encore une inclinaison qui satisfasse de même aux deux observations extrêmes : j'augmente donc de 5° le lieu du nœud ; et le supposant 8ˢ 22°, je recommence les calculs indiqués dans la premiere hypothese ; et je trouve qu'il faut employer l'inclinaison 7° 10′ afin d'avoir pour le 14 et le 21 une même déclinaison, 5° 33′ ; mais pour le 18, cette hypothese donne 5° 47′ ou 14′ de plus.

3271. Je dispose donc le résultat de ces deux hypotheses de maniere à en voir la différence pour chacun des cinq articles, et juger du changement qu'il faut faire à la premiere hypothese pour accorder les trois observations.

Nœud.	Inclinais.	Déclinaison le 14 et 21.	Déclinaison le 18.	Différences des déclinaisons.
8ˢ 17° 0′	7° 17′	5° 9′	5° 6′	3′ de moins.
8 22 0	7 10	5 33	5 47	14 de plus.
Diff. 5° 0′	7	24	41	17 de différ.

Si les erreurs étoient égales et en sens contraire dans les deux hypotheses, il ne faudroit, pour les rendre nulles, que prendre le milieu entre les longitudes du nœud, les inclinaisons et les déclinaisons, pour former la troisieme hypothese où les déclinaisons seroient d'accord ; mais puisqu'un changement de 5° dans le nœud a fait passer la différence de — 3′ à + 14′, c'est-à-dire l'a fait augmenter de 17′; il faut, pour faire évanouir la différence de trois minutes, aug-

menter le nœud de 46′ ; car 17′ : 5° 0′ :: 3′ : 0° 52′ ; ainsi le lieu du nœud sera 8ˢ 17° 53′. De même, 17′ : 7′ :: 3 : 1 ; ainsi l'inclinaison correspondante sera 7° 16′.

Troisièmement, 17 : 24 :: 3 : 4, qu'il faut ajouter à la premiere déclinaison ; donc la déclinaison du 14 et du 21 sera 5° 13′.

Enfin 17 : 41 :: 3 : 7 ; c'est ce qu'il faut ajouter à la déclinaison le 18 ; et l'on aura 5° 13′ pour la déclinaison solaire le 18, d'accord avec les deux autres.

Donc le nœud 8ˢ 17° 53′ et l'inclinaison 7° 16′ représenteront ces observations, en donnant pour toutes les trois la même déclinaison solaire de la tache, 5° 13′.

3272. Il est nécessaire en général de refaire le calcul en entier, avec cette troisieme hypothese, tant pour prévenir les erreurs de calcul, que pour remédier à l'inexactitude des parties proportionnelles qui, sur un changement de plusieurs degrés, ne sont pas rigoureusement exactes ; mais il ne faut pas 10′ de temps pour le calcul entier d'une hypothese.

Au reste, comme 3′ sur la déclinaison solaire supposent à peine une seconde dans l'observation, il est, pour ainsi dire, superflu de chercher des hypotheses plus exactes que 3′, à moins qu'on n'ait des observations faites avec le plus grand succès et des instrumens de la plus grande perfection.

Cette méthode a l'avantage d'éviter toute incertitude sur les signes, et toute occasion d'erreur dans l'application des formules ; de faire voir, par le calcul même, ce qu'il peut y avoir de discordance ou d'erreur sur chaque observation, et de quelle maniere elle influe sur le résultat ; enfin elle n'est pas aussi longue que les méthodes directes, dont j'ai parlé ci-dessus, malgré le tâtonnement qu'elle renferme.

3273. C'est autour de l'équateur solaire que tournent les taches ; et leur mouvement ne peut paroître uniforme que quand il est rapporté à l'équateur solaire, comme nous l'avons fait (3265) : ainsi, quand on a plusieurs longitudes d'une tache comptées sur l'écliptique, il faut les rapporter à cet équateur. Nous avons donné une méthode pour avoir l'ascension droite solaire, en même temps que la déclinaison ; mais si l'on avoit beaucoup d'observations d'une tache dont la déclinaison fût déja connue, il suffiroit de faire cette analogie dans le triangle EPT (FIG. 272) dont nous avons parlé (3258). Sin. TP : sin. E :: sin. TE : sin. P ; ainsi le cos. ascension droite de la tache $= \frac{\text{cos. dist. au nœud. cos. lat. hélioc.}}{\text{cos. déclin. solaire.}}$

3274. En calculant ainsi deux positions de la tache réduites à l'équateur solaire, on aura le mouvement mesuré sur ce cercle, pour l'intervalle de temps qu'il y a entre deux observations : il suffira d'une simple analogie pour trouver la durée de la rotation entiere du Soleil; car le mouvement observé est à 360° comme l'intervalle de temps observé est au temps de la rotation tout entiere par rapport au nœud : or ce nœud est sensiblement fixe; ainsi l'on aura la véritable durée de la rotation du Soleil.

3275. Les retours apparens d'une tache vers le milieu du Soleil, observés de la Terre, donnent la durée de la rotation beaucoup plus grande, parceque la tache tournant autour du Soleil comme la Terre, et du même sens, elle nous paroît arriver sur le centre du Soleil plus tard que si nous restions immobiles. Ces révolutions apparentes des taches, ou ces retours au centre du Soleil, sont inégales, parceque le mouvement de la Terre est inégal; au lieu que les retours de cette tache à un même degré de longitude, calculés par les regles précédentes, et réduits à l'équateur du Soleil, sont égaux et uniformes, comme toutes les rotations des planetes.

3276. Cassini avoit trouvé le retour des taches, par rapport à la Terre, $27^j\ 12^h\ 20'$; pour en conclure le retour par rapport à un point fixe, on dira : $360° + 27°\ 7'\ 8''$, mouvement moyen de la Terre par rapport aux équinoxes dans l'espace de $27^j\ 12^h\ 20'$: $27^j\ 12^h\ 20'$ :: 360° seulement : $25^j\ 14^h\ 8'$; c'est la durée de la rotation du Soleil par rapport aux points équinoxiaux (*Élémens d'astron.*, pag. 105; *Mém. acad.*, 1700 et suiv.). Mais les grosses taches de 1752, 1764, 1777 et 1778, qui paroissent n'être qu'une seule et même tache, par l'égalité des déclinaisons et les intervalles de leurs apparitions, me donnent la rotation de $25^j\ 10^h\ 0'$, et le retour des taches $27^j\ 7^h\ 37'\ 28''$. J'ai trouvé la même chose par plusieurs autres taches (*Mém.* 1776, *pag.* 497 et 1778, *pag.* 423). Il y en a cependant plusieurs qui ne s'accordent pas avec cette durée de rotation, comme on le verra dans le mémoire cité; mais cela ne m'empêche pas de regarder mon résultat comme le meilleur.

3277. L'ÉQUATEUR solaire, suivant les anciennes observations de Dominique Cassini, est incliné sur l'écliptique de $7°\frac{1}{2}$, comme on le voit dans l'Histoire de l'académie par Duhamel, et dans un Abrégé d'astronomie fait en 1678, mais qui est encore manuscrit. Scheiner supposoit, en 1626, cette inclinaison de 7° (*Rosa ursina*, pag. 562); et il assure qu'il ne l'avoit jamais trouvée moins de 6°, ni plus de 8. J'ai fait un grand nombre de comparaisons d'observations prises 3 à 3, ou combinées toutes ensemble, soit par mes observations de 1775,

1775, soit par des observations plus anciennes ; le résultat moyen m'a donné 7° 20′ pour cette inclinaison (*Mém.* 1776).

3278. Le noeud de l'équateur solaire sur l'écliptique étoit à 2ˢ 8° dans le dernier siecle, suivant Cassini ; car, dans l'abrégé d'astronomie que j'ai cité, il dit que le pole boréal du Soleil répond à 8° des Poissons ; Cassini le fils trouvoit ce nœud à 2ˢ 10° par un grand nombre d'observations (*Elém. d'astron.*, pag. 100). Scheiner (*p.* 558) dit que le 1 décembre le pole du Soleil étoit à la partie australe et occidentale du bord du Soleil, et que la route des taches étoit rectiligne : ainsi, en 1626, il le trouvoit vers 2ˢ 10°, comme Cassini. Pour moi je l'ai trouvé à 2ˢ 18° par mes observations (*Mémoires academ.*, 1776, pag. 479).

3279. Les différens résultats que je viens de rapporter, quoique un peu différens entre eux, ne suffisent point encore pour nous faire conclure qu'il y ait des changemens sensibles dans la position de l'équateur du Soleil ; les observations anciennes n'étoient pas assez exactes pour qu'on puisse essayer d'en déduire le mouvement du nœud de l'équateur solaire : une différence de 10″ sur la position observée d'une tache produit au moins 1° sur le lieu du nœud qui en résulte, et environ 4′ sur l'inclinaison ; l'erreur peut même devenir encore plus grande dans certains cas, en sorte qu'on ne sauroit mettre trop d'exactitude dans ces sortes d'observations. Il sera donc nécessaire d'observer encore les taches du Soleil à l'avenir avec beaucoup de précision, pour connoître si l'inclinaison de son équateur et le lieu de son nœud éprouvent quelques variations, comme l'équateur terrestre en éprouve par la précession des équinoxes.

3280. Dominique Cassini, dans son Discours sur la lumiere zodiacale, et Mairan, dans son Traité de l'aurore boréale, jugent que l'atmosphere du Soleil, ou la lumiere zodiacale (847), est dans le plan de l'équateur du Soleil ; et c'est de là que Mairan déduit les situations que doit avoir en divers temps de l'année la lumiere zodiacale (*pag.* 223 et suiv.)

3281. Képler, dont nous avons eu tant de fois occasion d'admirer le génie, en donna une preuve bien singuliere, à l'occasion de la rotation du Soleil ; il décida que le Soleil tournoit sur son axe, et cela avant qu'on l'eût observé ; et il pensa que ce mouvement de rotation devoit être la cause du mouvement des planetes autour du Soleil. Voici ce qu'on trouve dans sa nouvelle Physique céleste, imprimée au mois d'avril 1609, avant les premieres observations des taches du Soleil (3223) : *Modum etiam definivi argumentis talem ut Sol, manens quidem suo loco, rotetur tamen seu in torno.... trans-*

feratque una secum in gyrum corpora planetarum, intenso vel remisso raptu (*Introd.*, pag. 9). Nous avons vu qu'au reste Jordan Bruno avoit déja eu cette idée (3223).

Képler, en cherchant la cause du mouvement des planetes dans la rotation du Soleil, pensa d'abord qu'elle devoit se faire dans le plan de l'écliptique, en sorte que les poles du Soleil et les poles de l'écliptique répondissent aux mêmes points du ciel (*ibid.*, c. 34); il crut aussi que le Soleil devoit tourner en trois jours, c'est-à-dire trente fois plus vîte que Mercure, parceque la Terre tourne sur son axe trente fois plus vîte que la Lune. Dans la suite, et après la découverte des taches et de la véritable inclinaison de l'axe du Soleil, Képler fut obligé de reconnoître que la direction et la vîtesse de la rotation du Soleil étoient fort différentes; mais il se servit de l'obliquité même de ce mouvement pour expliquer le déplacement de l'écliptique, et le changement de latitude des étoiles fixes (2750). (*Epitom. astron. Cop.* pag. 912; *Mém. ac.* 1758, pag. 356).

3282. Cassini le fils pensa de même que l'équateur du Soleil pourroit servir de terme de comparaison pour les mouvemens célestes, et qu'on pourroit avec raison rapporter à son plan toutes les orbites planétaires; alors, par exemple, on diroit que le nœud boréal ou ascendant de l'orbite de la Terre est à 8ˢ 18° de longitude, puisque le nœud ascendant de l'équateur solaire est à 2ˢ 18°; en conséquence Cassini fit imprimer une Table où l'on voit les orbites de toutes les planetes rapportées à l'équateur du Soleil (*Mémoires acad.*, 1734). Mairan pensoit aussi que l'équateur solaire devroit être regardé comme le premier de tous les cercles célestes. Mais ce cercle ne sera point fixe si la figure du Soleil n'est pas ronde (1388), parceque son aplatissement produiroit un mouvement semblable à celui de la précession (3692); d'ailleurs l'on ne pourra jamais se servir de l'équateur solaire, à cause de la difficulté de le bien déterminer.

Du Déplacement du Soleil.

3283. La rotation du Soleil m'a indiqué un mouvement de translation dont on n'avoit point encore parlé, mais qui sera quelque jour un phénomene bien remarquable dans la cosmologie (*Mém. de l'acad.*, 1776)[a]. Le mouvement de rotation, considéré comme l'effet physique d'une cause quelconque, est produit par une impulsion communiquée hors du centre (3221). Mais une force quel-

[a] Lambert (*Systéme du monde*, pag. 87) étoit fort près de cette idée, mais il ne l'avoit pas suivie.

conque, imprimée à un corps et capable de le faire tourner autour de son centre, ne peut manquer aussi de déplacer le centre, et l'on ne sauroit concevoir l'un sans l'autre. Le Soleil a donc un mouvement réel dans l'espace absolu; mais comme nécessairement il entraîne la Terre, de même que toutes les planetes et les cometes qui tournent autour de lui, nous ne pouvons nous appercevoir de ce mouvement à moins que par la suite le Soleil ne soit arrivé sensiblement plus près des étoiles qui sont d'un côté, que de celles qui sont opposées; alors les distances apparentes des étoiles entre elles auront augmenté d'un côté et diminué de l'autre, ce qui nous apprendra de quel côté se fait le mouvement de translation du systême solaire. Mais il y a si peu de temps que l'on observe, et la distance des étoiles est si grande, qu'on n'a pu jusqu'ici en avoir une preuve directe. *Arcturus* nous présente un indice bien marqué d'un déplacement pareil; car cette étoile, depuis un siecle, n'a cessé d'avancer vers le midi (2773). Si l'on suppose 4′ 5″ par siecle, et si la parallaxe annuelle d'Arcturus n'est pas d'une seconde (2807), le déplacement réel de cette étoile est de plus de 80 millions de lieues par année. Il reste cependant à s'assurer, par des observations faites dans les pays qui ont Arcturus à leur zénit, si sa parallaxe est réellement insensible comme celle des autres étoiles.

Si nous ne voyons pas dans la plupart des étoiles de pareils déplacemens, c'est que peut-être elles n'ont pas reçu l'impulsion primitive qui cause dans le Soleil le mouvement de rotation, et dans Arcturus le mouvement de translation.

Il peut se faire aussi que le Soleil et la plupart des étoiles soient, avec leurs systêmes, dans une espece d'équilibre entre tous les autres systêmes environnans; et, dans ce cas, il n'y auroit qu'une circulation périodique du centre du Soleil autour du centre de gravité universel; c'est ainsi que Manilius disoit de la Terre, qu'il supposoit au centre de tout l'univers, *fecitque, cadendo undique, ne caderet* (I, 169). Quoi qu'il en soit, il paroît que le Soleil doit avoir un mouvement de translation qui nous est indiqué par son mouvement de rotation.

3284. M. Herschel et M. Prevôt en ont même déja fait l'application aux mouvemens particuliers des étoiles (2782), qu'ils croient être une apparence produite par le mouvement de notre systême vers la constellation d'Hercule (*Philos. trans.*, 1783; *Mém. de Berlin*, 1781, pag. 445; *Ephém. de Berlin*, 1786). M. Klugel de Helmstadt a donné des formules pour cet effet dans les Éphémérides de Berlin pour 1789; il les a appliquées aux mouvemens propres des

étoiles donnés par Mayer, et il les a trouvées à-peu-près conformes, en supposant environ 260° pour l'ascension droite du point vers lequel se fait le mouvement. M. Herschel l'emploie de même, avec 27° de déclinaison boréale. M. Prevôt trouve 230° pour l'ascension droite de ce point, avec 25° de déclinaison ; mais M. Maskelyne ne trouve pas que les mouvemens propres qu'il a déterminés soient d'accord avec cette hypothese.

De la Rotation de la Lune.

3285. La Lune présente toujours à la Terre à-peu-près la même face ; mais nous sommes au-dedans de son orbite : si nous étions placés à une très grande distance au-delà de l'orbite lunaire, nous verrions successivement tous les points de sa circonférence ; donc la Lune tourne sur son axe, c'est-à-dire qu'elle a un mouvement de rotation égal à son mouvement de révolution. Mairan a fait voir, par plusieurs autres raisonnemens, que la Lune tourne véritablement autour de son axe, par-là même qu'elle présente toujours la même face au centre de son orbite (*Mém. acad.* 1747). Il suffit de tracer un cercle sur le pavé, et de marcher sur sa circonférence en regardant toujours le centre pour s'appercevoir qu'on tourne aussi soi-même de la même maniere qu'un corps qui tourne sur son axe.

3286. Le mouvement de rotation de la Lune est accompagné de circonstances singulieres qui ont fort occupé les astronomes, et qui sont assez peu connues pour mériter d'être traitées ici avec un certain détail.

La Sélénographie[a] est la description du disque apparent de la Lune, de ses taches, de ses points lumineux, de leurs situations et de leurs formes. On croit souvent appercevoir dans la Lune une espece de figure humaine ; mais en l'examinant avec plus d'attention, on n'y voit aucune forme décidée : aussi les anciens varioient beaucoup dans leurs opinions à ce sujet. Cléarque et Argesinax y crurent appercevoir l'image de l'Océan et de la Terre, comme par la réflexion d'un miroir. On peut voir là-dessus toutes les opinions des anciens dans Plutarque (*De facie in orbe Lunae*) et dans le Traité d'Hevelius qui a pour titre Selenographia, 1647, p. 563, *in-folio*.

3287. Langrenus et Grimaldi donnerent des figures de la Lune. Il y a dans le liv. d'Hevelius deux grandes figures dont l'une repré-

[a] Ce mot vient de Σελήνη, *Luna*.

sente la pleine Lune, l'autre la représente lorsqu'elle est en croissant ou en décours : ces figures, au jugement de Mayer, sont ce qu'il y a de meilleur en ce genre : celle de Grimaldi, que Riccioli donna ensuite dans son Almageste (*Tome I, pag.* 204), est mal gravée ; mais on a l'avantage de trouver sur la figure même les noms de la plupart des points lumineux qu'il faut deviner dans Hevelius, où il n'y a pas même de lettres de renvoi, si ce n'est dans une figure assez bizarre où il a donné à la Lune la forme d'une carte géographique.

3288. M. le Monnier regarde comme les meilleures figures de la Lune celles qui furent gravées par Mellan, en 1634 et 1635 (*Instit. astron., pag.* 141) : en voici le titre tel que je l'ai vu sur un exemplaire de M. Séguier à Nismes : *Phasium Lunae icones, quas, an. salutis* 1634 *et* 1635, *pingebat ac sculp. Aquis Sextiis Claud. Mellan, Gallus, praesentibus ac flagitantibus illustribus viris Gassendo et Peyreschio.* Voyez Gassendi (IV, 355, V, 322 *et suiv.*) : Vie de Gassendi 1737, *pp.* 172 *et* 252 ; Vie de Peyresk par Gassendi, *p.* 440; *Astron. philol., pag.* 467. M. le Monnier acheta ces planches après la mort d'un certain d'Herman, qui avoit effacé le nom de Mellan. Gassendi envoya ces figures de la Lune à Hevelius ; mais en 1647 il paroît qu'il n'en avoit pas encore connoissance (*Selenographia, pag.* 207). On peut voir à ce sujet un Mémoire de Frobesius, *Bibliographiae selenographorum Specimen,* Helmstad. 1748, *in*-4°.

3289. Nous avons en France une grande et belle figure de la pleine Lune, que Dom. Cassini fit graver en 1692 d'après ses propres observations; le cuivre étoit à l'imprimerie royale : on a enfin publié cette carte en 1787 (à Paris, chez Dezauche): elle se trouve plus en petit dans les anc. Mém. de l'acad. pour 1692, avec une explication de Cassini à l'occasion de l'éclipse de Lune qui devoit arriver le 27 juil. 1692. On en a mis une copie réduite dans la Connoissance des Temps depuis 1701 jusqu'en 1772, quoique successivement de quatre gravures et de quatre grandeurs différentes : elle ressemble fort bien à la Lune dans son plein ; on en voit une copie corrigée, planche XL. Les principales taches y sont marquées par des noms d'astronomes ou de saints, comme dans la Sélénographie de Grimaldi (Ric., Almag. I, *pag.* 204), adoptée par Cassini, la Hire, etc. Hevelius y a substitué les noms de l'ancienne géographie ; mais je préfere ceux de Riccioli qui nous rappellent des astronomes célebres; c'est un hommage que nous rendons à leur mémoire. Quelquefois je rapporterai les deux noms d'une même tache pour être plus facilement entendu ; on trouvera les uns et les autres dans les tables de Berlin, tome I, *pag.* 17.

Les chiffres de la figure 282 sont à-peu-près dans l'ordre suivant lequel les taches sont éclipsées d'orient en occident.

3290. Parmi les ouvrages considérables que l'on dut à la magnificence du grand Colbert, et à la confiance qu'il avoit en Dominique Cassini, on doit compter les figures de la Lune que celui-ci fit dessiner en 1673 et dans les années suivantes, où l'on voyoit ses phases de jour en jour; Patigni, son dessinateur, se servoit de la lunette de 34 pieds qui est à l'observatoire. Ces phases, dessinées en grand avec les détails les plus étendus, sont encore entre les mains de M. Cassini; j'en ai vu 34 dessins au crayon fort détaillés.

3291. La Hire, qui étoit lui-même fort bon peintre, voulut faire de son côté un ouvrage semblable; il observa la Lune avec soin, il en forma une figure complete de 12 pieds de diametre, dont M. d'Ons-en-Bray avoit fait l'acquisition, et que M. du Fourny de Villiers fit voir à l'académie le 16 décembre 1772; il y manque un coin du dessin. C'est sans doute un extrait de cette figure que l'on trouve dans les tables de la Hire. Il avoit fait construire un globe lunaire tel qu'Hevelius le propose (*Senelog., pag.* 493); il étoit entre les mains de M. de Fouchy qui le retira lorsque les machines de l'académie furent transportées en 1745 de l'observatoire au jardin royal; M. Robert-de-Vaugondy en avoit le creux. Mayer avoit aussi entrepris un globe lunaire d'après ses propres observations, en partageant l'hémisphere visible de la Lune en 12 segmens. La mort de Mayer, arrivée en 1762, ne lui a pas permis de l'achever; Kæstner m'a écrit qu'il y avoit déja six phases de gravées et deux de dessinées; les quatre autres restent à faire. La régence d'Hanovre a acheté tous ces papiers et ces dessins, qui sont beaux et de la plus grande exactitude: mais pour rendre ces travaux plus utiles, il ne suffiroit pas de les imprimer, il faudroit faire des globes auxquels on pût donner les mouvemens qu'exige la libration de la Lune dont nous allons parler.

3292. Dans le premier volume des Œuvres de Mayer, publié à Gœttingue en 1775, par les soins de M. Lichtenberg, on trouve une figure de la Lune qui a 7 pouces 3 lignes de diametre, dans laquelle toutes les taches sont rapportées aux méridiens et aux paralleles de la Lune, suivant leurs positions dans les moyennes librations, avec un catalogue de 89 taches désignées par les noms de Riccioli et par ceux d'Hevelius. Cette figure est une des plus exactes que l'on ait faites, quoiqu'elle ne ressemble pas autant que la mienne à la Lune dans son plein.

Enfin il y a une figure qui a été dressée avec soin par Lambert,

dans les Ephémérides de Berlin pour 1775, d'après ses propres observations, et qui représente aussi l'état des moyennes librations. Ces cartes ne présentent pas cependant la figure apparente de la Lune de maniere à donner dans les éclipses la position exacte de chaque tache ; mais je ne doute pas que les astronomes ne fassent quelque jour des tables ou des méthodes graphiques expéditives, pour corriger en tout temps sur la figure de la Lune la position des taches dont ils se seront servis dans leurs observations.

De la Libration de la Lune.

3293. La libration [a] est un petit changement que l'on apperçoit dans la situation des taches de la Lune. Quoique le disque apparent soit à-peu-près le même en tout temps, on y observe cependant quelques degrés de variation ; les taches paroissent d'environ trois minutes plus ou moins éloignées des bords ; la différence va même quelquefois à $7^\circ \frac{1}{2}$ ou un huitieme du rayon apparent du disque lunaire.

3294. Il y a quatre sortes de librations ; la libration diurne qui est égale à la parallaxe horizontale ; la libration en latitude qui vient de l'inclinaison de l'axe de la Lune sur l'écliptique ; la libration en longitude qui vient des inégalités du mouvement de la Lune dans son orbite ; enfin il y a celle qui provient de l'attraction de la Terre sur le sphéroïde lunaire. Les deux premieres librations furent reconnues par Galilée ; la troisieme par Hevelius et Riccioli ; la quatrieme a été sur-tout discutée par M. de la Grange dans sa piece de 1764 (3304).

3295. Galilée, qui le premier observa les taches de la Lune après la découverte des lunettes (*Sidereus nuncius*, 1610), fut aussi le premier qui remarqua la libration. « La Lune, dit-il, par un rapport « naturel et une espece de sympathie avec la Terre, tourne autour « du centre de la Terre, et lui présente toujours une même partie « déterminée de sa surface, en sorte que la ligne qui joint leurs cen- « tres passe toujours par un même point de la surface de la Lune [b]. « De là il suit qu'un observateur, qui du centre de la Terre regar- « deroit la Lune, verroit toujours le même disque de la Lune terminé

[a] Les anciens appelloient *libration* ou *trépidation* un mouvement alternatif de la huitieme, neuvieme ou dixieme sphere, par lequel ils expliquoient le changement de l'obliquité et de la précession (357). Riccioli, *Almag.* I, 166, 444, 452. Aujourd'hui ce nom est réservé aux inégalités sélénographiques.

[b] Cette idée n'est juste que pour la libration diurne.

« par une même circonférence ; mais quand on est à la surface de « la Terre, le rayon mené au centre du globe lunaire ne passe point « à l'endroit de la surface de la Lune où passe la ligne des centres, « si ce n'est dans le cas où la Lune est au zénit. Quand elle se leve « ou se couche, le point de la surface où tombe le rayon visuel est « plus haut que le point où passe la ligne des centres ; et par consé- « quent l'on voit alors une portion de l'hémisphere de la Lune vers « le bord supérieur, et l'on perd vers le bord inférieur une partie « de l'hémisphere de la Lune que l'on verroit du centre de la Terre ; « et parceque la partie de la circonférence de la Lune que l'on voit « est au-dessus de la Lune quand elle se leve, et au-dessous quand « elle se couche, il en doit résulter une différence assez sensible « pour qu'on voie certaines taches, ou du moins quelques parties « remarquables de la Lune, paroître et disparoître. On doit obser- « ver une variation semblable dans la partie boréale et australe « du disque lunaire, suivant que la Lune est dans l'un ou l'autre « ventre du Dragon (c'est-à-dire dans ses limites) ; car si elle est « au nord, nous appercevons au midi de son hémisphere quel- « ques parties nouvelles, tandis que les parties septentrionales « disparoissent [a]. Nous sommes assurés par le secours des lunettes « que ces conséquences ont lieu réellement ; en effet, il y a dans la « Lune deux taches dont l'une est vers le Corus (ou au nord-nord-ouest), « quand la Lune est dans le méridien [b] ; l'autre lui est presque diamé- « tralement opposée ; la premiere se voit même sans lunette, mais « non pas la seconde ; la premiere est une petite tache ovale séparée « des autres grandes taches ; la seconde est encore plus petite, égale- « ment isolée, et située dans un espace assez clair. On observe « d'une maniere sensible dans ces deux taches les variations dont « nous venons de parler ; on voit l'une se rapprocher du bord de la « Lune quand l'autre s'en éloigne, de maniere que la distance de « la tache qui est vers le *Corus* est quelquefois double de ce qu'elle « est dans d'autres temps par rapport au bord de la Lune ; l'autre « tache étant plus près du bord, la différence est plus sensible, et

(a) Quoique le fait soit vrai, ce n'étoit pas une conséquence du principe que Galilée avoit établi sur la ligne des centres, comme il paroît le supposer ; il falloit, pour expliquer ce phénomene, dire que la Lune présentoit la même face à un même point du ciel infiniment distant, lorsqu'elle étoit à même longitude, soit au nord, soit au sud de l'écliptique, ce qui a lieu effectivement (3298).

(b) C'est celle qui est appellée *Mare Crisium*, et l'autre *Grimaldi* ; la premiere marquée H, et la seconde n° 1, dans la planche XL.

La

« la distance au bord est quelquefois triple de ce qu'elle étoit aupa-« ravant » (*Dialog. de System. mundi*, 1635, *pag.* 58).

3296. C'est ainsi que Galilée apperçut le premier le changement des taches de la Lune, et qu'il en assigna deux causes qui sont encore adoptées actuellement : mais il ignora la troisieme et la plus considérable de toutes, qui vient de l'inégalité du mouvement de la Lune dans son orbite; c'est cependant cette derniere cause qui produit le changement de Grimaldi et de la mer des Crises, en sorte que Galilée ne donnoit point une explication suffisante de ce qu'il avoit remarqué, qui étoit une libration en longitude; mais, par une idée heureuse, il expliquoit d'avance un phénomene qu'on a observé long-temps après, c'est-à-dire la libration en latitude.

3297. Hevelius commença en 1643 à observer assidument la libration de la Lune ; en 1648 il parvint à appercevoir que la *libration en latitude* étoit dépendante de la situation de la Lune par rapport à ses nœuds, comme on le voit dans sa Sélénographie : mais il avoit alors une idée fausse de la libration en longitude; il ne la connut bien qu'en 1654 (489). Hevelius observa premièrement que, lorsque la Lune étoit dans sa plus grande latitude boréale, les taches situées vers le bord septentrional en étoient les plus proches ; ainsi *Thalès* et *Endymion* (suivant *Hevelius, Montes Samartici* et *Lacus Hyperborei*), qui sont tout près d'Hermès en allant du côté de l'orient, étoient alors sensiblement plus près du bord boréal. Mais quand la Lune s'éloignoit du zénit en se rapprochant de l'équateur, ces taches s'éloignoient du bord boréal, et *Tycho* ou le *Mont Sinaï* se rapprochoit du bord austral de la Lune, aussi bien que *Schikardus* (*Mons Troicus*), et *Zucchius* (*Lacus Meridionalis*). De là on peut conclure que l'axe de la Lune est toujours sensiblement parallele à lui-même tant que les nœuds sont à la même place, et qu'un diametre de la Lune pris du nord au sud passe par les mêmes étoiles fixes dans toute la durée d'une révolution, parceque le mouvement des nœuds est insensible dans un mois.

3298. La cause de la libration en latitude est évidente si l'on suppose que la Lune présente la même face au même point du ciel pendant le cours d'une révolution, et qu'un de ses diametres, que nous appellerons *l'axe de la Lune*, soit incliné de 2° sur l'axe de l'écliptique. Soit T la Terre (FIG. 273), TE le plan de l'écliptique, TC une ligne inclinée de deux degrés sur l'écliptique, L le centre de la Lune dont l'axe ILK soit perpendiculaire à TC ; lorsque la latitude de la Lune ou l'angle LTE est de 5°, l'angle LTC est de 3° aussi bien que l'angle GLD, et une tache située en G sur l'équa-

teur lunaire nous paroît éloignée du centre apparent D de la Lune, d'une quantité GD qui vaut 3° de la circonférence de la Lune, ou $\frac{1}{19}$ du rayon; mais 14 jours après, quand la Lune M a 5° de latitude australe, l'angle ETM étant de 5° et l'angle CTM de 7°, la tache qui étoit en G se trouve en Q, et sa distance FQ au centre apparent F de la Lune est l'arc FQ égal à l'angle CTM, c'est-à-dire de 7°; ainsi la tache située dans l'équateur lunaire paroît à 7° au midi du centre apparent F de la Lune, tandis qu'auparavant elle paroissoit 3° au nord; donc une tache de la Lune paroît de 10° plus au midi, ou plus près du bord méridional de la Lune, que lorsque la latitude étoit septentrionale en L. Cela suppose que la ligne TC, à laquelle l'axe est perpendiculaire, soit immobile, ou que l'axe IK soit toujours parallele à lui-même. Nous verrons bientôt qu'il a un mouvement (3325), mais il n'est pas sensible en 14 jours.

3299. La plus grande libration en longitude a lieu quand la mer des Crises (*Palus Maeotides*) est éloignée du bord occidental de la Lune des trois quarts de sa largeur, ce qui arrive vers 9 signes d'anomalie; alors les taches orientales, telles que Grimaldi (*Palus Maraeotides*) sont les plus proches du bord oriental de la Lune: le contraire arrive dans la situation opposée, qu'Hevelius appelle la plus petite libration, telle qu'il l'observa le 17 mai 1649. La mer des Crises étoit si près du bord de la Lune qu'il n'a jamais vu l'intervalle aussi petit; dans ce cas, il n'est pas du quart de sa largeur (Ric. *Alm.* I, 205); la longitude vraie de la Lune étoit alors moindre que la longitude moyenne de 6°, la Lune étant vers 3 signes d'anomalie. On explique cette libration en longitude par l'inégalité du mouvement de la Lune dans son orbite combinée avec une égalité parfaite dans la rotation. Ce fut Riccioli qui parla le premier, en 1651, de cette explication. « La troisieme hypothese, dit-il, seroit « fondée sur l'excentricité de la Lune, si nous imaginions que la Lune « présentât toujours la même face, non à la Terre, mais au centre « de l'excentrique; en sorte que la ligne menée du centre du globe « lunaire au centre de l'excentrique qu'elle parcourt, passât tou- « jours par le même point du globe lunaire » (*Almag.* I, 214; *Tertia hypot.*). Il la rejeta cependant, parcequ'il supposoit alors une libration trop grande, et qu'il trouvoit plusieurs observations auxquelles cette hypothese ne satisfaisoit pas; mais quoique rejetée par Riccioli, elle fut employée par Hevelius qui l'avoit imaginée aussi en 1648; et, dans sa lettre écrite à Riccioli en 1654, *pag.* 46, il l'expliqua comme la véritable cause de la libration en longitude: Newton et Cassini l'adopterent également.

3300. Suivant la théorie du mouvement elliptique, le foyer supérieur F de l'orbite lunaire ALP (FIG. 274) est celui autour duquel la Lune tourne uniformément (1253) : si donc la rotation de la Lune est réellement uniforme, comme nous allons le prouver, la Lune, après le quart de la durée de sa révolution, présentera au foyer F le point B de sa surface, qui, dans l'apogée A, étoit dirigé suivant AFT, et par conséquent vers la Terre ; mais, dans cette position du rayon LBF, l'angle FLT étant de 6 ou 7°, le point C de la Lune qui est dirigé vers la Terre, et qui forme le centre apparent de la Lune, est différent du point B de 7° de la circonférence de la Lune : ainsi la tache qui est en B (et qui paroissoit au centre apparent du disque lunaire quand la Lune étoit apogée), en paroîtra éloignée de 7°, ou d'environ une huitieme partie du rayon de la Lune du côté de l'occident ; c'est ce que l'on observe réellement : on en conclut que la durée de la rotation de la Lune est sensiblement uniforme, et égale à celle de sa révolution, par raport à un point qui est comme le foyer supérieur de l'orbite.

3301. On a eu de la peine à comprendre la raison de cette parfaite égalité entre les durées de la rotation et de la révolution de la Lune. Newton trouva, par l'attraction de la Terre sur la Lune, que le diametre de la Lune, dirigé vers la Terre, devoit être le plus long, parceque l'attraction de la Terre est plus grande sur les parties de la Lune qui sont les plus voisines de la Terre ; et il trouva que le diametre devoit surpasser de 186 pieds les diametres qui sont perpendiculaires à notre rayon visuel, en supposant que la Lune eût été molle ou fluide ; il en conclut que le plus grand diametre doit être toujours à-peu-près dirigé vers nous. Le corps de la Lune, dit-il, ne peut pas rester dans une autre situation, il revient à celle-là par des oscillations ; mais elles doivent être fort lentes à cause de la petitesse de la force : il peut donc arriver que le côté qui devroit toujours regarder la Terre soit dirigé seulement dans le foyer supérieur, ne pouvant pas en être retiré assez vîte pour être sans cesse ramené vers la Terre (Liv. III, prop. 38). On pourroit objecter à cette explication que le Soleil n'a point alongé la Terre, malgré son attraction ; mais sans doute c'est parcequ'elle avoit reçu un mouvement de rotation bien plus rapide que celui de la Lune.

3302. Il paroît donc que l'équateur lunaire doit être alongé dans le sens du diametre qui va de la Lune à la Terre ; mais la rotation de la Lune autour de son axe doit aplatir ce même globe du nord au sud, en sorte que la Lune doit être un sphéroïde aplati par les poles, et

ses méridiens elliptiques : ainsi, dans la Lune, les méridiens, l'équateur et les paralleles doivent être des ellipses ; et le corps de la Lune doit être, pour ainsi dire, comme un œuf qu'on auroit aplati par les côtés indépendamment de son alongement primitif. Cependant l'alongement laisse subsister la rondeur de la Lune dans le sens perpendiculaire au rayon visuel mené de la Terre à la Lune, et le cercle qui sépare la partie visible de celle que nous ne voyons pas seroit plus petit sans cesser d'être parfaitement rond.

D'Alembert pensoit qu'on ne sauroit expliquer la rotation apparente de la Lune par la seule supposition de son alongement (*Recher. etc. II, pag.* 255), mais qu'il falloit que la Lune eût été projetée par une impulsion faite sur un point éloigné du centre de $\frac{1}{150}$ du rayon.

3303. La libration en latitude (3297) ayant prouvé que l'axe de rotation de la Lune étoit toujours incliné de la même maniere sur l'écliptique et sur l'orbite lunaire, il a fallu en conclure que l'équateur lunaire suivoit toujours l'orbite de la Lune, et que ses nœuds sur l'écliptique rétrogradoient comme ceux de l'orbite : nous en verrons des preuves nouvelles (3325). Des géometres avoient voulu le révoquer en doute comme une chose inexplicable ; mais il me semble qu'on ne doit pas être surpris de cette coïncidence continuelle des nœuds de l'équateur et de ceux de l'orbite. Le mouvement des nœuds est fort lent : la Terre, qui tend sans cesse à retirer vers elle le sommet du sphéroïde lunaire, a tout le temps nécessaire pour le ramener à l'orbite de la Lune, dont il s'écarteroit de 10° si le plan de l'équateur restoit parallele à lui-même. Cet effet ne peut se produire en 15 jours ; et voilà pourquoi il y a une libration en longitude et en latitude : mais il peut naturellement se produire en neuf ans. Ce temps doit paroître bien suffisant pour que la pointe soit ramenée vers la Terre, et par conséquent le nœud de l'équateur ramené à celui de l'orbite. Supposons l'équateur et l'orbite d'abord dans un même plan, qu'ensuite les nœuds de l'orbite changent de 180°, et que l'équateur reste parallele à lui-même ; il fera avec l'orbite un angle de 10° : mais la Terre fait un effort continu pour le ramener à elle et au plan de l'orbite ; cet effort, continué pendant plusieurs années, doit conserver l'équateur dans le plan de l'orbite malgré le déplacement de celle-ci. Ainsi l'axe de rotation de la Lune, au lieu d'être toujours parallele à lui-même et toujours incliné à l'écliptique de 2° dans le même sens, suit le mouvement de l'orbite lunaire ; et l'équateur de la Lune change de position, comme l'orbite à laquelle il est toujours incliné de 7°, ce qui, au bout d'un certain temps, dérange le parallélisme.

3304. M. de la Grange, dans la piece qui a remporté le prix de l'académie en 1764, suppose avec Newton que la Lune est un sphéroïdé alongé vers la Terre, et il trouve que cette planete doit faire autour de son axe une espece de balancement ou d'oscillation, par lequel sa vîtesse de rotation est tantôt accélérée, tantôt retardée par rapport au centre de la Terre ; qu'alors la Lune nous doit montrer toujours à-peu-près la même face, quoiqu'elle ait pu recevoir dans le principe une rotation dont la durée ne seroit point, par elle seule, égale à celle de la révolution.

3305. Mais dans les Mémoires de Berlin pour 1780, il a donné une méthode complete de la libration de la Lune, qui, pour l'analyse, forme le plus bel ouvrage de cet illustre auteur : il y prouve que la Lune devroit être élevée sous son équateur, mais quatre fois plus dans le sens du diametre de cet équateur qui est dirigé vers la Terre que dans l'autre. Il fait voir aussi que les nœuds de l'équateur lunaire doivent coïncider avec ceux de l'orbite, ou que du moins leur mouvement moyen doit être exactement le même, *pag.* 211—293.

3306. Après avoir parlé de la cause physique de la libration, je vais la considérer d'une maniere purement astronomique, et détailler ce qu'on a fait jusqu'ici pour observer les circonstances de la rotation lunaire. Dominique Cassini s'assura que les phénomenes de la libration se réduisoient à un mouvement uniforme de rotation autour d'un axe différent de celui de l'orbite lunaire : il détermina la position de cet axe par observation, et trouva l'inclinaison de l'équateur lunaire sur l'écliptique de $2^\circ\frac{1}{2}$, l'inclinaison sur l'orbite de $7^\circ\frac{1}{2}$, et les nœuds de l'équateur lunaire sur l'écliptique d'accord avec les nœuds de l'orbite lunaire, comme Cassini le fils l'explique dans les Mémoires de 1712 et dans ses Élémens d'Astronomie. On peut voir aussi Heinsius *de Apparentia aequatoris lunaris; Petropoli, vel Lipsiae*, 1745. Je vais expliquer la méthode la plus exacte qu'on ait employée pour cette détermination.

Méthode pour déterminer, par approximation, l'Equateur lunaire, en employant un grand nombre d'observations.

3307. Mayer, dans un très bon mémoire qu'il a donné sur cette matiere[a], n'a pas voulu déterminer par les observations la situation de l'équateur lunaire d'une maniere directe, parceque cette méthode est limitée à trois observations (3258) ; mais il a cherché une approximation par le moyen de laquelle il pût faire entrer beaucoup

[a] *Kosmographische Nachricten und Sammlungen auf das iahr*, 1748, Nuremberg, 1750, *in*-4°, *pag.* 52-183.

d'observations dans un seul résultat, en prenant la somme ou la différence de plusieurs équations particulieres, à l'exemple d'Euler, qui déterminoit ainsi les inégalités de Saturne. Je vais expliquer cette méthode en détail, parcequ'elle peut servir dans d'autres recherches astronomiques.

3308. On commence d'abord par déterminer la différence d'ascension droite et de déclinaison entre une tache et le centre de la Lune (2116, 2504): mais pour faire ces observations, il faut bien considérer que le parallele apparent du bord de la Lune n'est pas un véritable parallele à l'équateur (2538); la différence va quelquefois à plus d'un degré, et il en pourroit résulter environ 15″ d'erreur sur la position des taches éloignées du centre de la Lune en déclinaison.

Lorsqu'on a trouvé la différence d'ascension droite, on cherche la différence de longitude et de latitude (2130); on en conclut la longitude et la latitude vues de la Lune, de même que nous l'avons fait pour le Soleil (3248, 3264): mais il faut pour la Lune une attention de plus, parceque le pole de l'écliptique n'est pas sur la circonférence de son disque; PT (FIG. 271) n'est pas de 90°, mais cet arc PT est égal à la distance de la Lune au pole de l'écliptique. On connoît TM, qui est l'arc de distance; on a aussi l'angle MTP, formé par le cercle de latitude PT et par le cercle TM qui joint le lieu de la Terre avec le lieu de la tache; il est composé d'un angle droit PTL, et de l'angle sphérique LTM. On résoudra le triangle PTM, dont l'angle P est la différence de longitude entre la Terre et la tache; on trouvera aussi PM, qui est la distance de la tache au pole boréal de l'écliptique.

On cherche ainsi trois fois la longitude et la latitude d'une tache vue du centre de la Lune par rapport à l'écliptique, ou à un cercle que l'on conçoit tiré par le centre de la Lune, parallèlement à l'écliptique, coupant sous un angle de 5° 9′ l'orbite de la Lune ou l'orbite que la Terre paroît décrire autour de la Lune: c'est avec ces trois observations qu'on pourra déterminer l'équateur lunaire, comme nous l'avons fait pour le Soleil (3258, 3269), et comme nous allons le faire par une autre méthode.

3309. Les taches qui sont le plus près du centre apparent de la Lune sont celles dont le changement est le plus sensible; elles doivent donc être préférées aux autres: nous avons en cela un avantage considérable sur les premiers astronomes qui observerent la libration (3297); n'ayant point alors l'usage des micrometres, ils ne pouvoient observer facilement que les taches très voisines des bords de la Lune, dont les changemens des distances s'appercevoient aisé-

ment; mais ils sont moindres, à cause de l'obliquité du rayon visuel, et les taches du milieu ont réellement de plus grandes variations; elles sont donc préférables pour les observations. Mayer a choisi la tache n° 24 dans notre figure, appellée *Manilius* (ou dans Hevelius *Insula Besbicus*) celle de *Menelaüs* (ou *Byzantium*), celle de *Dionysius,* et celle de *Censorinus,* n° 32, qui est située à l'extrémité de *Promontorium acutum.* Ce sont autant de points lumineux qui se distinguent très bien, même dans la pleine Lune, et qui se peuvent placer très exactement sur les fils d'un micrometre. Nous parlerons ci-après du choix qu'on doit faire entre les observations d'une même tache (3318). Voici la table des observations que Mayer fit en 1748 sur la tache de Manilius, et dont je vais faire usage pour déterminer la situation de l'équateur lunaire; j'y ajouterai ses principaux résultats. Je dois avertir que le mémoire contient de plus grands détails, tant sur les observations que sur les réductions qu'on y doit faire. Il est vrai que les observations ne sont pas d'une extrême précision, par la nature de l'instrument dont Mayer se servoit: cependant il seroit utile de donner une traduction entiere de ce mémoire, qui est très instructif, et qui est écrit en allemand: au reste je vais faire en sorte d'expliquer ici tout ce qu'il y a d'important sur cet article.

3310. L'équateur lunaire est représenté par le cercle QNL (FIG. 275) tracé sur le globe de la Lune; D ♈ NB est l'écliptique, ou du moins un cercle parallele au plan de l'écliptique, P le pole de l'équateur lunaire, A le pole de l'écliptique, AP la distance de ces deux poles, qui est égale à l'inclinaison de l'équateur lunaire sur l'écliptique; c'est cet arc AP (qui est d'environ 2°) que nous cherchons actuellement, et qui est une des inconnues du problême. Soit M une tache de la Lune, telle que *Manilius,* par laquelle on tirera un cercle de latitude AMB jusqu'à l'écliptique NB, et un méridien lunaire PML jusqu'à l'équateur lunaire NL; l'arc MB est la latitude de la tache qu'on connoît par observation, et AM sa distance au pole de l'écliptique; cette distance est variable dans chaque observation, mais c'est une des données du problême. L'arc ML du méridien lunaire est la *latitude sélénographique* de Manilius, ou sa distance à l'équateur lunaire[a]: c'est une quantité constante, parceque nous supposons les latitudes sélénographiques invariables comme les latitudes terrestres; et c'est une des trois choses que nous avons à chercher dans la solution de ce problême.

[a] C'est ce que nous avons appellé *Déclinaison solaire* quand il s'agissoit des taches du Soleil (3262).

TABLE des observations faites sur *Manilius*, pour la libration de la Lune.

Temps moyen des observations à Nuremberg.	Arc de distance entre Manil. et la Terre; TM, FIG. 271.	Angle PTM FIG. 271. (3250)	Longitude apparente de la Lune. (1866)	Latitude apparente de la Lune. (1866)	Distance AM de Manilius au pole de l'écliptique.	Différ. de long. TPM entre Manilius et la Terre.	Longitude vraie de Manilius, vue de la Lune sur l'écliptique.
1748. J. H. M.	D. M.	D. M.	S. D. M.	D. M.	D. M.	D. M.	S. D. M.
Avr. 11 11 1	17 20	58 11	6 0 35	4 16 A	76 50	15 4	0 15 39
13 9 30	15 8	58 35	6 27 24	5 27 A	76 52	13 14	1 10 39
Mai. 11 10 56	15 29	60 40	7 6 19	5 51 A	76 48	13 50	1 20 9
16 16 11	13 26	28 45	9 22 14	2 31 A	75 45	6 38	3 28 52
17 15 56	14 23	20 49	10 6 33	1 17 A	75 18	5 14	4 11 37
Juin. 5 9 58	18 2	62 16	6 2 53	4 56 A	76 59	16 20	0 19 13
13 14 0	14 18	25 48	10 0 24	1 41 A	75 29	6 23	4 6 47
14 12 50	15 12	16 47	10 14 43	0 25 A	75 3	4 30	4 19 13
Juill. 2 9 23	18 2	61 56	5 28 25	4 54 A	76 55	16 17	0 14 42
4 6 49	17 36	64 29	6 23 11	5 48 A	76 57	16 16	1 9 27
5 8 4	17 23	64 49	7 7 18	6 8 A	76 48	16 7	1 23 25
6 8 34	16 20	62 37	7 21 34	5 57 A	76 49	14 52	2 6 26
7 9 4	15 43	58 10	8 6 15	5 30 A	76 26	13 42	2 19 57
8 10 4	15 8	52 0	8 21 33	4 44 A	76 7	12 14	3 3 47
9 11 15	14 38	44 26	9 7 12	3 38 A	76 2	10 30	3 17 42
10 12 5	14 34	34 40	9 22 50	2 19 A	75 46	8 29	4 1 19
11 13 15	15 23	23 24	10 8 37	0 51 A	75 4	6 16	4 14 53
12 13 5	16 0	16 57	10 23 34	0 30 B	75 13	4 46	4 28 20
15 13 35	19 38	2 14	0 6 37	3 41 B	74 4	0 47	6 7 24
Août. 3 7 5	16 10	60 27	7 29 58	5 46 A	76 31	14 25	2 14 23
14 11 34	20 23	4 16	1 11 2	4 25 B	74 5	1 33	7 12 35
Nov. 1 5 44	19 27	15 33	11 24 42	3 4 B	74 21	5 19	6 0 1
2 6 29	20 26	11 50	0 9 1	3 46 B	73 51	4 16	6 13 17
Déc. 27 4 47	20 54	7 19	0 14 44	4 21 B	73 36	2 43	6 17 27
Jan. 28 3 59	18 56	9 59	2 16 0	3 0 B	74 22	3 21	8 19 21
1749. Fév. 25 11 43	17 30	14 53	2 27 53	2 0 B	75 6	4 35	9 2 28
Mars. 4 11 42	14 46	54 26	5 22 9	4 42 A	76 53	12 17	0 4 26

3311. La troisieme inconnue est la longitude du point N, ou du nœud de l'équateur lunaire : ayant tiré du centre de la Lune une ligne C ♈ dans le plan parallele à l'écliptique, dirigée vers le point équinoxial, l'angle ♈ CN, ou l'arc ♈ N de l'écliptique, est la longitude du point N que nous cherchons ; mais nous savons que le point N est presque d'accord avec le nœud ascendant de l'orbite lunaire (3303, 3306). Supposons donc qu'il n'en differe que d'une petite quantité θ, et, appellant la longitude du nœud ascendant de l'orbite lunaire k, nous aurons la longitude ♈ N du nœud N de l'équateur lunaire, $k+\theta$. Appellons g la longitude de Manilius sur l'écliptique déduite de l'observation, ou l'arc ♈ B de l'écliptique, et retranchons-en l'arc

♈

♈N, nous aurons la distance NB, ou l'angle NAB, formé au pole de l'écliptique, $g-(k+\theta)$, ou $g-k-\theta$; mais le cercle de latitude AN, qui passe par l'intersection N des deux cercles QNL, DNB, et le cercle AP, qui passe par leurs poles, font entre eux un angle droit; ainsi l'angle MAP est le complément de l'angle MAN; l'angle MAP sera donc de $90°-g+k+\theta$.

α Inclinaison de l'équateur,	$=$ AP
β Dist. de Manil. à l'équat.	$=$ LM
θ Dist. du nœud de l'équat. au nœud de l'orbite.	
g Longitude de Manilius,	$=$ ♈B
h Dist. au pole de l'éclipt.,	$=$ AM
k Longit. du nœud de l'orb. lunaire.	

3312. Dans le triangle MAP, formé au pole de l'écliptique A, au pole P de l'équateur lunaire, et au point M de Manilius, on a cos. PM$=$cos. AP . cos. AM $+$ sin. AP . sin. AM . cos. PAM (3947); ou cos. $(90°-\beta)=$cos. α cos. $h+$sin. α. sin. h . cos. $(90°-g+k+\theta)$; donc on aura sin. $\beta=$cos. α . cos. $h+$ sin. α . sin. h . sin. $(g-k-\theta)$. Nous simplifierons bientôt cette équation (3317).

3313. Par le moyen de trois observations, on a trois fois la longitude d'une tache, et sa latitude, et par conséquent trois valeurs de g, h, k; ainsi l'on peut former trois équations, pour avoir trois valeurs de sin. β; et, en résolvant chaque équation, on dégagera α et θ, et l'on connoîtra l'inclinaison α de l'équateur lunaire, avec la quantité θ, dont son nœud differe du nœud de l'orbite. Mais il seroit très difficile et très long de dégager par les méthodes ordinaires les inconnues α et θ de ces trois équations; c'est pourquoi l'on a recours aux approximations suivantes, où il s'agit de supposer α et θ assez petits pour que leurs cosinus soient égaux au rayon, c'est-à-dire à l'unité.

3314. Pour s'assurer que α et θ sont assez petits, il suffit de jeter les yeux sur la table des observations, ou des positions de Manilius (3309): on y voit que ses latitudes observées ne different jamais entre elles de plus de $3°\ 23'$, car la plus grande valeur de h étoit, dans la sixieme observation, le 5 juin 1748, de $76°\ 59'$, et la plus petite, le 27 décembre, dans la vingt-quatrieme observation, de $73°\ 36'$: la différence est $3°\ 23'$, dont la moitié $1°\ 41'\frac{1}{2}$ doit être à-peu-près la valeur de α. En effet, lorsque AP et AM concourent ensemble, AM est plus petit que PM, qui est constant, et cela de la quantité AP$=\alpha$; mais lorsque AP et PM sont diamétralement opposés, AM est plus grand que PM de la même quantité α; car il est égal à la somme de PA et de PM, au lieu qu'auparavant il étoit égal à leur différence.

3315. On connoît donc ainsi à-peu-près la valeur de α par l'inspection de plusieurs latitudes observées dans les différentes longitudes de la tache: on connoîtra par conséquent sa latitude sélénographique; car, en retranchant α ou AP de la plus grande distance au

pole de l'écliptique, ou de AM, observée dans le temps où elle étoit la plus grande, et où les arcs AP et AM coïncidoient, savoir $76° 59'$, on aura $75° 17'\frac{1}{2}$ pour l'arc PM; et le complément ML $14° 43'$, *latitude sélénographique* de Manilius. Cette quantité seroit suffisamment exacte, si l'on avoit observé assez souvent la latitude de la tache pour être certain d'avoir rencontré les points où elle étoit la plus grande et la plus petite; mais nous ne nous en servirons que comme d'une premiere approximation.

3316. Cherchons aussi à-peu-près la valeur de θ par l'inspection des observations rapportées ci-dessus; pour cela il suffit de considérer que, dans le temps où la distance de Manilius au pole de l'écliptique étoit la plus grande ou la plus petite, cette tache devoit être nécessairement à 90° du nœud: or, le 5 juin 1748, cette distance au pole étant la plus grande, la longitude de Manilius fut observée de $0^s 19°$; donc le nœud N étoit à $9^s 19°$; et, comme le nœud de l'orbite lunaire étoit alors à $10^s 11°$, il s'ensuit que la différence θ auroit été de 22°. De même, le 27 décembre 1748, Manilius étant à sa plus grande latitude, et par conséquent à 90° du nœud N de l'équateur lunaire, sa longitude fut observée de $6^s 17°$; le point N étoit donc à $9^s 17°$; et comme le nœud de l'orbite lunaire, suivant les tables, étoit alors à $10^s 0°$, la différence θ se seroit trouvée de 13°. Ce premier résultat ne sauroit être exact, parcequ'on ne doit pas choisir, pour déterminer le lieu du nœud, le temps où la latitude est la plus grande, mais plutôt celui où elle est nulle, et où elle augmente le plus rapidement (1362); par exemple, les temps où la distance de Manilius au pole de l'écliptique étoit à-peu-près de $75° 17'$, le 13 et le 14 juin 1748. On pourroit donc trouver à-peu-près le lieu de l'intersection N, en cherchant quelle étoit la longitude de Manilius entre le 13 et le 14, lorsque sa distance au pole de l'écliptique étoit de $75° 17'$. Mais il suffit ici d'avoir montré que la quantité θ est en effet assez petite pour que son cosinus puisse être supposé $=1$.

3317. Pour simplifier la formule $\sin.\beta, = \cos.\alpha \cos. h + \sin.\alpha \sin. h . \sin.(g-k-\theta)$, l'on considérera que $\sin.(g-k-\theta) = \sin.(g-k) \cos.\theta - \sin.\theta \cos.(g-k)$ art. 3811; mais $\cos.\theta = 1$; donc $\sin.(g-k-\theta) = \sin.(g-k) - \sin.\theta \cos.(g-k)$; et, faisant aussi $\cos.\alpha = 1$, on aura $\sin.\beta - \cos. h = \sin. h . \sin.(g-k) \sin.\alpha - \sin. h . \cos.(g-k) \sin.\alpha \sin.\theta$. Il faut encore mettre au lieu de $\sin.\beta$ une quantité plus facile à traiter, et éliminer $\cos. h$. Pour cela nous considérons que AM ne peut différer de PM que de la petite quantité α; ainsi la différence entre $AM = h$ et $PM = 90° - \beta$, sera toujours fort petite; appellons-la en général x, nous aurons $\beta = 90° -$

$h+x$; sin. β=cos. $(h-x)$=cos. h. cos. x+sin. h. sin. x (3812), et faisant cos. $x=1$, et sin. $x=x$, sin. β=cos. $h+x$ sin. h; sin. β —cos. $h=x$. sin. h; donc x. sin. h est égale à la valeur trouvée ci-devant pour sin. β—cos. h=sin. h. sin. $(g-k)$ sin. α—sin. h cos. $(g-k)$ sin α sin. θ; mettant α au lieu de sin. α, et $\beta-(90^\circ-h)$ au lieu de x, et divisant par sin. h, on aura $\beta-(90^\circ-h)=\alpha$ sin. $(g-k)-\alpha$ sin. θ . cos. $(g-k)$. Telle est l'équation finale du problême, où les quantités h et $g-k$ sont données, et où les trois inconnues β, α et θ sont faciles à séparer; c'est celle que nous allons traiter, pour en dégager ces inconnues α, θ et β. Nous choisirons trois observations qui donneront trois valeurs numériques de $g-k$ et de h; ainsi l'on formera trois équations qui ne renfermeront chacune que les trois inconnues β, α et sin. θ.

3318. Indépendamment du choix qu'il faut faire pour les taches (3309), il faut rendre les trois observations les plus concluantes qu'il soit possible; pour cela on les choisira encore assez loin l'une de l'autre, pour que les latitudes observées soient fort différentes, et que les quantités $g-k$ (ou l'arc NB) soient différentes d'environ 90° de la premiere à la seconde, et de la seconde à la troisieme observation : par ce moyen, si deux des observations sont vers les latitudes extrêmes, l'autre sera vers le nœud; ou si deux sont vers les nœuds, l'autre sera vers la plus grande latitude: dans le premier cas, l'inclinaison sera déterminée avec beaucoup de précision; dans le second cas, ce sera le nœud qui sera le mieux déterminé; mais on aura toujours l'inclinaison avec toute la précision de l'observation même.

3319. Mayer prend pour exemple trois observations du mois de juillet 1748, parmi celles que nous avons rapportées (3309).

		I.	II.	III.
Temps des observations,	juill.	$2^j\ 9^h\ 23'$	$10^j\ 12^h\ 5'$	$15^j\ 13^h\ 35'$
Longit. de Manil. $=g$,		$0^s\ 14^\circ\ 42'$	$4^s\ 1\ 19'$	$6^s\ 7^\circ\ 24'$
Dist. au pole de l'écl. $=h$,		76 55	75 46	74 4
Longit. du nœud $=k$,		10 9 14	10 8 48	10 8 32
Sin. $(g-k)$		+0,9097	+0,1302	—0,8560
Cos. $(g-k)$		+0,4152	—0,9915	—0,5170

Ces valeurs étant substituées dans l'équation du problême $\beta-(90^\circ-h)=\alpha$, etc. (3317), on aura les trois équations suivantes, qui renfermeront plus que les trois inconnues α, β, θ.

$\beta-13^\circ\ 5'=+0{,}9097\,\alpha-0{,}4152\,\alpha$ sin. θ.
$\beta-14^\circ\ 14'=+0{,}1302\,\alpha+0{,}9915\,\alpha$ sin. θ.
$\beta-15^\circ\ 56'=-0{,}8560\,\alpha+0{,}5170\,\alpha$ sin. θ.

3320. On pourroit dégager ces inconnues par les méthodes ordinaires d'algebre; mais il sera plus facile de le faire en retranchant successivement la premiere et la seconde équation de la troisieme, à l'exemple d'Euler, dans sa théorie de Saturne; et l'on aura :

$$-171' = -1{,}7657\,\alpha + 0{,}9322\,\alpha \sin.\theta.$$
$$-102' = -0{,}9862\,\alpha - 0{,}4745\,\alpha \sin.\theta.$$

La premiere équation étant divisée par 0,9322, et la seconde par —0,4745, elles deviendront

$$-183',44 = -1{,}8941\,\alpha + \alpha \sin.\theta.$$
$$-214',47 = +2{,}0784\,\alpha + \alpha \sin.\theta.$$

La différence de ces deux équations est $397{,}91 = 3{,}9725\,\alpha$; donc $\alpha = 100' = 1°40'$; et, substituant cette valeur de α dans les autres équations, l'on aura $\theta = 3°\,36'$, et $\beta = 14°\,33'$.

Cette valeur de θ nous apprend que le nœud de l'équateur lunaire est sensiblement d'accord avec le nœud de l'orbite, puisque la différence est si petite qu'on ne peut s'en assurer par les observations. La valeur de β nous apprend que Manilius est éloigné de 14° 33' de l'équateur lunaire, c'est sa *latitude sélénographique* (3315, 3331).

3321. La solution de ce problême est assujettie à trois observations; mais la méthode a l'avantage d'en admettre tout à la fois un nombre quelconque, en sorte qu'on puisse tirer les trois inconnues, non pas de trois observations, mais de 30, si on les a. Mayer ayant calculé 27 observations de la tache de Manilius, il en forme 27 équations semblables aux trois équations $\beta - 13°\,5'$, etc.; de ces 27 équations, il forme trois sommes qui donnent trois équations; il les traite de la même maniere que les trois équations précédentes (3319); et, pour que les restes des soustractions qu'il faut faire soient plus sensibles, il met dans une des sommes toutes les équations où α a un coëfficient positif et plus grand que dans les autres; telles sont les équations déduites des observations 1, 2, 3, 6, 9, 10, 11, 12 et 27 (3309) : il met dans la seconde somme toutes les équations où le coëfficient de α, c'est-à-dire sin. $(g-k)$, est considérable, mais négatif, comme dans les observations 8, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26; les neuf autres équations forment la troisieme somme; le coëfficient de α y est beaucoup plus petit que dans les deux autres; mais le coëfficient de α sin. θ y est plus considérable, parceque cos. $(g-k)$ est fort grand, la distance de la tache au nœud étant petite lorsque le sinus de $g-k$ est petit.

3322. Ayant donc formé trois sommes, il trouve les trois équations suivantes qui résultent de 27 observations :

$9\beta - 118° \;\; 8' = +8,4987\,\alpha - 0,7932\,\alpha \sin.\theta.$
$9\beta - 140 \;\; 17 = -6,1404\,\alpha + 1,7443\,\alpha \sin.\theta.$
$9\beta - 127 \;\; 32 = +2,7977\,\alpha + 7,9649\,\alpha \sin.\theta.$

Les 27 équations sont comprises dans ces trois-là le plus avantageusement qu'il soit possible; les quantités que l'on cherche y sont multipliées, et par là plus sensibles, et plus faciles à déterminer avec exactitude. Les coëfficiens de α y sont assez inégaux pour que la soustraction que nous allons faire produise un reste fort sensible, et donne avec exactitude la valeur de α.

On retranchera la premiere équation de la seconde et de la troisieme, et l'on aura deux équations où β ne se trouvera plus :

$-564' = -5,7010\,\alpha + 8,7581\,\alpha \sin.\theta.$
$-1331 = -14,6391\,\alpha + 2,5375\,\alpha \sin.\theta.$

Pour faire évanouir sin. θ, on divisera la premiere par 8,7581, et la seconde par 2,5375; on aura ces deux équations, $64,398 = 0,6509\,\alpha - \alpha \sin.\theta$, et $524,530 = 5,7690\,\alpha - \alpha \sin.\theta$; on retranchera l'une de l'autre, et l'on aura $460,132 = 5,1181\,\alpha$; donc $\alpha = 89',90$, c'est-à-dire 1° 30'. Substituant cette valeur de α dans une des équations précédentes, on aura $\beta = +14° 33'$; c'est la latitude sélénographique de Manilius, et $\theta = -3° 45'$ différence entre le lieu du nœud de l'orbite lunaire et le lieu du nœud N de l'équateur. Cette quantité est assez peu considérable pour être regardée comme nulle, parceque l'inclinaison étant très petite, la moindre erreur dans les latitudes observées en doit produire une très grande dans le lieu du nœud. La longitude du nœud de la Lune, au commencement de 1748, étoit $10^s\, 18°\, 56'$: on en retranchera les 3° 45' trouvés, et l'on aura la longit. de l'intersection N de l'équateur lunaire sur l'écliptique, ou ♈ N (FIG. 275) $= 10^s\, 15°\, 11'$.

3323. Ce résultat de $\alpha = 1° 30'$ ne differe que de 10' de celui que l'on a trouvé par trois seules observations (3320); mais ici l'on en a pris neuf fois plus, en sorte qu'il est problable que la précision de ce résultat est neuf fois plus grande.

Mayer a calculé de même neuf observations faites sur la tache de Dionysius, et 12 de Censorinus; les premieres donnent pour α et θ à-peu-près la même chose que celles de Manilius: on trouve une plus grande différence dans les déterminations que fournit Censorinus, sur-tout pour θ, qui se trouve de $17°\frac{1}{2}$ en plus, au lieu qu'elle étoit négative dans les deux autres cas; mais Censorinus est plus éloigné du centre de la Lune, en sorte qu'il est dans une partie du disque où les arcs de la Lune se raccourcissent davantage, et parois-

sent plus petits que vers le centre; il est donc naturel que les petites erreurs des observations y fassent plus d'effet.

3324. L'obliquité de l'écliptique dans la Lune, c'est-à-dire l'inclinaison de l'équateur lunaire sur l'écliptique, se trouve, par les observations faites sur Censorinus, moindre d'environ 11 à 12′ que par Manilius, tandis que celles de Dionysius donnent au contraire une ou deux minutes de plus. Mayer, en pesant le degré de précision de ces différentes observations, pensa que pour avoir un juste milieu, il falloit rabattre une minute de l'obliquité que donne Manilius, et supposer $\alpha = 1° 29'$, quoique Cassini l'eût donnée de 2° 40′: cela pourroit faire croire, comme le dit Mayer, que cette inclinaison est variable; mais il promettoit de faire voir dans un autre mémoire, et par des observations faites du temps de Cassini, qu'elle avoit toujours été de $1°\frac{1}{2}$. Enfin je dois ajouter qu'ayant observé les latitudes de Manilius, avec un excellent micrometre, au mois d'octobre 1763, j'ai trouvé cette inclinaison de 1° 43′ (3326) par des observations qui me paroissent encore plus sûres que celles de Mayer.

3325. Le résultat des observations de Mayer, et des miennes, d'accord avec celui de Cassini, est que *le nœud de l'équateur lunaire est toujours aux mêmes points du ciel que le lieu moyen du nœud de la Lune;* on peut conclure même des observations d'Hevelius, faites il y a plus de cent ans, qu'il coïncidoit alors aussi bien qu'aujourd'hui, du moins sensiblement, avec le nœud de l'orbite lunaire; en sorte qu'il faut lui supposer un mouvement de révolution en 18 ans, contre l'ordre des signes, égal à celui des nœuds de la Lune (1488). Si leur mouvement moyen étoit différent, on ne verroit pas la même coïncidence par des observations faites il y a plus de 110 ans, par celles de Cassini, par celles de Mayer, et par les miennes, qui m'ont donné le même résultat.

3326. Au mois d'octobre 1763, la Lune se trouvoit à la fois dans ses nœuds, dans ses apsides et dans ses syzygies; j'en profitai pour observer la libration moyenne avec les extrêmes: j'ai donné le détail de ces observations (*Mém. acad.*); je trouvai qu'il falloit supposer 1° 43′ pour l'inclinaison de l'équateur lunaire, 14° 35′ pour la latitude sélénographique de Manilius, et placer les nœuds de l'équateur à 2° de ceux de l'orbite lunaire, selon l'ordre des signes: cela prouve que les nœuds sont encore à-peu-près d'accord, quoique les nœuds de l'orbite lunaire aient une longitude plus grande de 60° qu'en 1748; ces observations prouvent donc encore que le mouvement des nœuds de l'équateur lunaire est égal à celui de l'orbite lunaire.

3327. Le lieu de pole boréal de l'équateur lunaire précede tou-

jours de trois signes celui du nœud ascendant de l'orbite lunaire, et si l'on ôte trois signes de la longitude du nœud, l'on a la longitude du pole boréal de l'équateur lunaire. On voit, en effet, que AN (FIG. 275) est plus avancé que AP; l'angle PAN doit être supposé de 90°.

3328. Après avoir déterminé la position de l'équateur lunaire sur l'écliptique, on peut aisément réduire à l'équateur lunaire les longitudes observées (3309), ainsi que nous l'avons fait pour les taches du soleil (3273). Ces ascensions droites, comptées sur l'équateur lunaire, doivent croître également en temps égaux, si la rotation de la lune est uniforme, c'est-à-dire qu'en les comparant deux à deux, on doit toujours trouver la même durée pour la rotation entiere de la Lune : ayant fait cet examen sur plusieurs observations, Mayer a trouvé que la rotation de la Lune étoit réellement uniforme, autant qu'on en peut juger par les observations, et que sa durée étoit parfaitement égale à celle de la révolution, c'est-à-dire de $27^j\ 7^h\ 43'\ 5''$ (1420).

3329. LES LONGITUDES des taches de la Lune peuvent se compter comme les longitudes géographiques, en partant de quelque point remarquable du globe lunaire : on peut donc déterminer sur le disque lunaire un premier méridien fixe duquel on comptera les longitudes sélénographiques des taches, comme on compte leurs latitudes depuis l'équateur lunaire LNQ. Le premier méridien lunaire est supposé avoir un mouvement uniforme autour des poles de l'équateur de la Lune, et faire une révolution en $27^j\ 7^h$; ainsi il s'éloigne uniformément des points équinoxiaux marqués sur le disque lunaire ou vus du centre de la Lune. Si l'on ajoute six signes à la longitude moyenne de la Lune, on aura la longitude de la Terre vue du centre de la Lune : cette longitude moyenne croît aussi uniformément; ainsi le premier méridien lunaire est toujours dirigé vers ce point du ciel qui nous est indiqué par l'opposite de la longitude moyenne de la Lune. En effet, le mouvement moyen de la Terre étant d'accord avec celui des taches de la Lune, et la Terre s'éloignant des points équinoxiaux par rapport à la Lune avec autant de vîtesse qu'une tache dans l'équateur de la Lune; il s'ensuit que la quantité dont le lieu moyen de la Terre est éloigné des points équinoxiaux, étant comptée dans l'équateur de la Lune d'occident en orient, le point où finit l'arc d'éloignement doit être immobile sur la surface de la Lune, c'est-à-dire répondre toujours aux mêmes taches. Ce point, vu de la Terre, ne paroît jamais fort éloigné du centre apparent de la Lune, puisqu'il n'en differe qu'à raison de l'inégalité de

la Lune. Si le plan de l'orbite lunaire étoit parallele à l'équateur de la Lune et son mouvement uniforme, le premier méridien passeroit toujours par le centre apparent de la Lune; mais comme l'inégalité de la Lune ne va jamais à plus de 8°, il s'ensuit que le premier méridien ne paroîtra jamais éloigné du centre apparent de plus de 8° selon la direction de l'équateur.

3330. Ayant ainsi établi sur la Lune un premier méridien, on cherchera l'angle au pole de la Lune entre une tache M et le nœud ascendant N, ou l'arc NL de l'équateur lunaire, comme nous l'avons fait pour le Soleil (3273); cet arc NL, distance de Manilius au nœud, étoit de 67° 54′ le 4 mars 1749, suivant l'observation de Mayer : la longitude moyenne de la Lune étoit alors de 5^s 25° 7′, et celle de la Terre vue de la Lune 11^s 25° 7′, la longitude du nœud ascendant de la Lune 9^s 26° 15′: si on la retranche de celle de la Lune, on aura 1^s 28° 52′ dont le premier méridien lunaire étoit éloigné du nœud ascendant N de l'orbite et de celui de l'équateur lunaire sur l'écliptique, ces 58° 52′ étant comptés le long de l'équateur lunaire. Or Manilius étoit éloigné du nœud de l'équateur lunaire de 67° 54′; la différence 9° 2′ est la longitude de Manilius, comptée sur l'équateur lunaire depuis le premier méridien du côté de l'occident, parceque le point M se trouve à l'occident du point N. C'est ainsi que Mayer trouve la longitude sélénographique de Dionysius 17° 17′, et celle de Censorinus 32° 45′ à l'occident du premier méridien fixe. On a fait une table des autres taches (3292).

3331. On cherche aussi la distance ML de la tache à l'équateur lunaire, ou la *latitude sélénographique* (3320). Mayer trouve celle de Manilius 14° 34′ boréale, celle de Dionysius 2° 55′ boréale, et celle de Censorinus 0° 6′ australe. Ces déterminations sont prises par un milieu entre plusieurs observations; les différences vont à près d'un demi-degré, et cela n'est pas extraordinaire; car chaque seconde d'erreur dans les mesures que l'on prend sur le disque lunaire, produit 3′ 38″ sur la circonférence d'un grand cercle de la Lune, dans les objets même situés le plus près du centre; d'ailleurs les observations de Mayer n'étoient faites qu'avec un simple réticule, où il falloit diviser une minute entiere par l'estime.

Ces longitudes et ces latitudes sélénographiques sont absolument necessaires pour établir et retrouver en tout temps la situation d'une tache sur le disque lunaire, par rapport au centre apparent de la Lune et au cercle de latitude qui passe par le centre de la Lune: l'on pourroit prédire par leur moyen la figure du disque lunaire pour un moment donné, et la situation des principales taches, si l'on avoit

avoit bien exactement leurs longitudes et leurs latitudes.

3332. Lorsqu'on regarde le disque de la Lune située dans son nœud, l'équateur lunaire y paroît sous la forme d'une ligne droite, ou d'un diametre de la Lune qui passe près de *Censorinus*, et trois minutes au nord de *Grimaldi :* on voit les extrémités de ce diametre sur la figure de la Lune (*planche* XL). Si la Lune est en même temps dans son apside, et que son vrai lieu soit égal au lieu moyen, le premier méridien lunaire paroît sous la forme d'un diametre qui traverse l'équateur, et le coupe à angles droits. Si le diametre OE (FIG. 276) représente l'équateur lunaire, le point E à l'orient, le point O à l'occident, l'écliptique paroît sur un diametre CD incliné de $1^{\circ}\frac{1}{2}$ vers l'occident, quand la Lune est dans le nœud descendant ; il paroît incliné vers l'orient comme GF, quand la Lune sera dans le nœud ascendant. Au contraire, quand la Lune est dans ses limites boréales, l'équateur lunaire paroît comme une ellipse ABD (FIG. 277), et l'écliptique fait une autre ellipse ACD, plus près du centre que celle de l'équateur : dans les limites australes l'équateur lunaire paroît une ellipse AFD abaissée au midi, et l'écliptique est l'ellipse AED.

3333. Quand la Lune est dans ses apsides, son lieu vrai étant le même que son lieu moyen, le premier méridien lunaire (3329) y paroît comme un diametre MLR (FIG. 278) ; quand elle est à trois signes d'anomalie, c'est une ellipse MSR située à l'occident du centre L de la Lune ; et quand la Lune, ayant passé son périgée, est à neuf signes d'anomalie vraie, le premier méridien MVR est dans la partie orientale du disque lunaire. Au moyen de ces considérations l'on peut appercevoir à-peu-près la courbure que doivent prendre dans certains temps les directions des taches qui paroissent en ligne droite quand la Lune est dans ses moyennes librations. Cela suffit aussi pour faire voir combien il y a de complication et de diversité dans la figure du disque lunaire à raison de cette double ellipticité, et combien étoient défectueuses les anciennes hypotheses d'Hevelius, qui, sur une figure constante de la Lune, se contentoit de changer la position du centre : on peut voir le réticule qu'il employoit pour cela, dans une planche des Institutions astronomiques de M. le Monnier.

3334. Je terminerai ce qui concerne la sélénographie, en disant un mot de la hauteur des montagnes de la Lune. Hevelius observa des sommets de montagnes dans la Lune, qui étoient quelquefois éclairés quoiqu'éloignés de la ligne de lumiere de la treizieme partie du rayon de la Lune (*Sélénographie*, pag. 266). De là il suit

que ces montagnes avoient une lieue de hauteur. En effet, soit SBM (FIG. 279) le rayon qui vient du Soleil et qui éclaire la Lune en quadrature, BE le côté éclairé, BH le côté obscur, HM une montagne lunaire : quand le rayon BM commence à éclairer le sommet M, si BM $= \frac{1}{13}$ du rayon, ou la tangente BM $= 0{,}07692$, la sécante TM sera $1{,}002953$, comme on le peut voir dans les tables ordinaires où sont les tangentes et les sécantes ; donc la hauteur perpendiculaire HM est égale à $\frac{295}{100000}$ ou $\frac{1}{338}$ du rayon : or le rayon de la Lune est $\frac{3}{11}$ de celui de la Terre (1702) : multipliant donc le rayon de la Terre 3270000 toises par $\frac{3}{11}$ et par $\frac{1}{338}$, on a 2640 toises, c'est-à-dire plus d'une lieue commune de France. Riccioli en trouvoit de 3 à 4 lieues (I, 208, 234). M. Herschel s'occupa, en 1780, de ces observations, en employant un télescope de 6 pieds, et il ne trouva pas plus de 1500 toises (*Philos. Trans.* 1780) : ce furent les premieres observations de ce célebre astronome qui nous a donné depuis des découvertes si curieuses. (+ publiées. cf. pag. 332.)

3335. Galilée supposoit au contraire cette hauteur encore plus grande ; car il disoit avoir observé la distance BM des points lumineux de $\frac{1}{10}$ du rayon de la Lune (*Sid. Nunc.*, *pag.* 23) : mais on doit préférer à cet égard les observations d'Hevelius. Dans ses phases 30, 31 et 32, qui se trouvent aux environs de la seconde quadrature, 8 à 9 j. après l'opposition, on trouve les plus grandes distances qu'il ait jamais observées entre la ligne de lumiere et ces sommets les plus élevés ; tels sont ceux qu'Hevelius appelle *Mons Apenninus* (ou *Aratus*), situé à 2 minutes au midi d'Archimede ; *Mons Didymus* (ou *Albategnius*), 3 minutes et demie au sud-ouest du centre de la Lune ; *Mons Taurus*, qui est une chaîne de montagnes situées environ 5 minutes au nord-ouest de Tycho. Ce sont là les plus hautes montagnes de la Lune (Hev., *p.* 266, 394).

3336. On distingue les montagnes en forme de dentelures sur le bord obscur de la Lune dans les éclipses de Soleil, sur-tout à la partie australe (*Mémoires* 1765, *pag.* 554 ; 1771, *pag.* 14). On les voyoit fort bien aussi dans l'éclipse du 4 juin 1769.

3337. Langrenus, dans sa Sélénographie, en 1632, proposoit de déterminer les longitudes par les momens où les montagnes de la Lune commencent ou finissent d'être éclairées. Riccioli II, 610.

3338. Il paroît que parmi les montagnes de la Lune il y a autant d'hétérogénéité que dans les nôtres ; quelques unes sont d'une matiere plus dense et réfléchissent plus fortement la lumiere (*Hevel. Selenog.*, *pag.* 352) : cela ne doit pas venir de leurs différentes hauteurs, car au temps de la pleine Lune elles sont toutes également

éclairées de face, et cependant elles n'ont pas toutes la même teinte. Hook avoit dit que les taches de la Lune étoient des volcans éteints (*Micrographia*, 1655, *cap.* 60). C'est aussi le sentiment de Buffon, et il me paroît très vraisemblable. Hevelius soupçonnoit même *Aristarque*, n°. 3 dans ma figure (*Mons Porphyrites*), d'être une espece de volcan embrasé (*Selenog.*, *pag.* 354). En effet sa couleur paroît toujours plus rouge que celle des autres parties de la Lune, et cela dans toutes les positions de cet astre: cet éclat peut venir de la densité de sa matiere ou de sa couleur naturelle, plutôt que de la matiere du feu. Mais on a eu plusieurs autres motifs de croire qu'il y avoit des volcans dans la Lune. On voit sur un des dessins de Cassini (3290) qu'il observa le 18 octobre 1673, entre six et neuf heures, une nouvelle tache blanche entre *Pitatus* et *Walthernus*; en 1671, il y avoit observé un petit nuage blanchâtre, comme on le voit sur la figure de la Lune que M. le Comte de Cassini a fait graver en 1788 (à Paris chez Dezauche).

Dans l'éclipse totale de 1715 on vit des éclairs sur le disque noir de la Lune (*Mém.* 1715, *pag.* 96). Louville les attribuoit à des orages.

M. D'Ulloa assure avoir vu un point lumineux sur la Lune dans l'éclipse totale de Soleil du 24 juin 1778 : il l'attribuoit à un trou dans la Lune qui auroit eu plus de cent lieues de longueur ; et il publia un mémoire à ce sujet. Mém. de *Berlin*, 1778; *Journal des Savans*, juin 1780.

3339. M. Herschel, le 4 mai 1783, vit un point lumineux dans la partie obscure de la Lune, et deux montagnes qui se formerent du 4 au 13 mai. En 1787, avec un télescope de dix pieds, il apperçut deux jours de suite, le 19 et le 20 avril, dans la partie obscure de la Lune vers le nord, une lumiere qu'il attribue à un volcan (il l'estimoit d'environ une lieue de diametre), et deux autres points qui lui paroissoient des volcans éteints (*Philos. Trans.* 1787, *p.* 230). M. de Villeneuve et M. Nouet, deux des astronomes de l'Observatoire royal, ont vu, l'un le 22 mai 1787 et l'autre le 13 mars 1788, un point lumineux vers Héraclides, n° 8, semblable à une petite nébuleuse ou à une étoile de sixieme grandeur : cette lumiere paroissoit de temps en temps plus vive comme par élans ; mais il falloit pour la bien voir que le croissant lumineux fût hors de la lunette. M. Méchain l'a revu le 8 mai ; il croit que c'est le point d'Aristarque, n° 3, assez brillant pour que la lumiere cendrée le fasse appercevoir quand la Lune n'a que deux jours. M. Schroter a publié, en 1789, des observations sur les taches de la Lune ; mais il n'a point vu de vol-

cans. M. de Cesaris, dans les Ephémérides de Milan pour 1790, croit aussi que les sommets d'Aristarque et de Manilius sont assez brillants pour paroître dans la partie obscure de la Lune.

Mais M. Herschel, avec qui j'en ai parlé en 1788, assure qu'il a vu deux fois une lumiere si vive qu'il est impossible de ne pas l'attribuer à un véritable feu. Il observe la Lune depuis 1775. M. Watson lui arracha, dès 1780, les observations qui se trouvent dans les Transactions de la même année (3334). Enfin il avoit examiné attentivement, en 1782, la partie obscure de la Lune, et il n'y avoit point vu la lumiere qu'il y observa l'année suivante, et qu'il regarde toujours comme un véritable volcan.

De la Rotation et de la Figure des Planetes principales.

3340. Mercure est trop petit, trop loin de nous, trop engagé dans les crépuscules ou dans les vapeurs de l'horizon pour qu'on puisse distinguer des taches sur son disque et examiner la durée de sa rotation. Les phases même de Mercure sont difficiles à distinguer, comme nous en avertit Hevelius (*Selenog. pag.* 75); il faut y employer de grandes lunettes; on doit avoir soin d'en rétrécir l'ouverture pour diminuer le trop grand éclat de la lumiere de Mercure qui se répand sur la partie obscure: l'on distingue alors son croissant, du moins quand Mercure est dans la partie inférieure de son orbite. L'explication des phases de Mercure et de Vénus est la même que pour la Lune (1406).

3341. Les phases de Vénus sont très apparentes, et se distinguent avec des lunettes médiocres: Vénus est presque toujours ou en croissant ou en forme d'ellipse, comme on le voit pour la Lune dans la planche VI (fig. 80); et ce fut pour Galilée une preuve démonstrative du mouvement de Vénus autour du Soleil (1087, 1195). Nous avons expliqué la maniere de trouver la phase la plus brillante de Vénus (1197).

La rotation de Vénus est très difficile à observer; Dominique Cassini, qui avoit déterminé avec le plus grand succès la rotation de Jupiter et celle de Mars par des observations très délicates, essaya, en 1666, d'observer celle de Vénus: ce ne fut qu'avec beaucoup de peine qu'il apperçut une partie un peu plus claire que le reste, située proche de la section de lumiere; elle lui parut achever son mouvement en moins d'un jour (*Journ. des Sav.*, déc. 1667; *anc. Mém., tome X, pag.* 467; *Elém. d'Astron., pag.* 514). Cependant il n'osoit assurer que ce fût toujours la même partie claire qu'il avoit

vue, ni décider si elle faisoit une révolution entiere ou seulement une libration, n'ayant pu voir la continuité de ce mouvement dans une assez grande partie de l'arc. Quoique Cassini eût observé ces taches de Vénus en Italie, il ne put jamais les distinguer à Paris avec les meilleures lunettes.

3342. Bianchini, dans les années 1726, 1727 et 1728, observa aussi les taches de Vénus à Rome, et il en conclut que la révolution de Vénus autour de son axe n'étoit point de 23^h, comme Cassini l'avoit soupçonné, mais de $24^j\ 8^h$: il jugea que le pole bor. de cette révolution répondoit à 10^s 20° de longitude, et étoit élevé de 15 à 20 degrés sur l'écliptique, en sorte que son équateur étoit incliné de 75° sur l'écliptique, et avoit son nœud ascendant à 1^s 20° de longitude. *Hesperi et Phosphori nova Phœnomena, Romae*, 1728, *in-folio*, *pag.* 22, 25, 63. Ce livre contient sa *Célidrographie*[a], c'est-à-dire sa description des huit taches ou nues qu'il avoit distinguées sur le disque de Vénus. Par cette rotation de Vénus telle que Bianchini la donne et dont la direction est presque perpendiculaire à l'écliptique, les taches doivent nous paroître aller, tantôt au midi, tantôt au nord, comme quand Vénus est vers 7^s 20° long., quelquefois tourner presque circulairement autour du pole de rotation quand il est dirigé vers la Terre, Vénus étant à 4^s 20° ou 10^s 20° de longitude. Dans ce dernier cas c'est le pole austral que nous voyons à 15° au midi du centre de Vénus. Ainsi quand Cassini dit que la rotation se fait du nord vers le sud dans la partie supérieure du disque de Vénus, il faut entendre quand Vénus est du côté de 7^s 20° de longitude; c'est le contraire du côté de 1^s 20°.

L'observation sur laquelle Bianchini établit principalement la durée de la rotation de 24 jours est celle du 26 février 1726 (*pag.* 61), dans laquelle il apperçut à-peu-près la même situation des taches, d'abord dans le jardin à $5^h\frac{3}{4}$, ensuite dans la galerie de Pierre de Cortone à $8^h\frac{1}{2}$. Mais Cassini le fils dit qu'il est possible que l'apparition d'une nouvelle tache eût formé à $8^h\frac{1}{2}$ un aspect à-peu-près semblable à celui qui avoit lieu trois heures plutôt; que n'ayant pu observer les taches dans l'intervalle de $6^h\frac{1}{4}$ à $8^h\frac{1}{2}$ à cause du bâtiment du palais Barberini, Bianchini n'a pu savoir si elles avoient eu un mouvement, et que ses observations peuvent se concilier, ainsi que celles de Dominique Cassini, avec une rotation de $23^h\ 20'$ (*Mém. acad.* 1732, *pag.* 213; *Elém. d'Astron.*, *pag.* 525)[b].

(a) Κηλὶς, Κηλῖδος tache.

(b) Le mémoire est copié mot à mot dans les Elémens d'astronomie.

Mais ces taches de Vénus sont si difficiles à voir que Cassini disoit, dans un abrégé manuscrit d'astronomie: Ce seroit en vain qu'on tâcheroit de déterminer par ce moyen s'il y a du mouvement (*Elém. d'Astron.*, *pag.* 516). Son fils essaya en 1729 de voir ces taches à Paris avec une lunette de 114 pieds, et il ne put y parvenir (*ibid.*, *p.* 526).

3343. LE GLOBE DE MARS ne paroît jamais en croissant comme Vénus et Mercure, parcequ'il est plus loin que le Soleil; mais on le voit prendre une figure elliptique, et sa rondeur est diminuée à-peu-près comme celle de la Lune 3 j. avant son plein (planche VI, FIG. 80), (Képler, *Epit.*, *pag.* 843; *Astron. refor.*, *pag.* 372; Hevel. *Selenog.*, *pag.* 42; Cassini, *pag.* 457).

Fontana observa, en 1636, une tache obscure sur le disque de Mars. Le P. Bartoli, Jésuite de Naples, écrivoit, le 24 décembre 1644, qu'avec une bonne lunette de Sirsali il avoit vu Mars presque rond avec deux taches au-dessous du milieu; d'un autre côté Zucchius ne les voyant point, du moins dans certains temps, cela fit soupçonner le mouvement de Mars autour de son axe (*Astron. ref.*, *pag.* 372). Cassini observa mieux les taches de Mars en 1666; et elles lui firent connoître que Mars tourne sur son axe en $24^h\ 40'$; *Martis circa proprium axem revolubilis Observationes Bononienses. Bononiae*, 1666, *in-folio.* Il estimoit que l'axe de Mars étoit à-peu-près perpendiculaire à son orbite, du moins autant qu'il en put juger par des taches qui sont peu propres à cette détermination. Il observa encore ces taches à Paris en 16670. Maraldi les observa en 1704 et 1706, et trouva la durée de la rotation de $24^h\ 39'$. Ces taches sont fort grandes; mais elles ne sont pas toujours bien terminées, et changent souvent de figure d'un mois à l'autre: cependant elles sont assez apparentes pour qu'on soit très assuré de la rotation de Mars (*Mém. acad.* 1706, *pag.* 74, 1719, 1720; *Elém. d'Astr.*, *pag.* 457).

3344. M. Herschel a observé, en 1781, les taches de Mars très distinctement: il a trouvé la durée de la rotation de $24^h\ 39'\ 21''\frac{2}{3}$: il estime qu'il n'y a pas plus de $2''$ d'incertitude, et il a donné les figures des taches de Mars. *Philos. Trans.* 1781, *pag.* 134. Il a ensuite déterminé l'inclinaison de l'équateur de Mars $30°\ 18'$ par rapport à l'écliptique, et $28°\ 42'$ par rapport à l'orbite. Le nœud de l'équateur de Mars sur l'écliptique est à $2^s\ 17°\ 47'$, et sur l'orbite de Mars à $2^s\ 19°\ 28'$: il a observé vers les poles des grandes taches qui disparoissent, et qu'il attribue à la glace qui fond en été. *Philos. Trans.*, 1784, *p.* 259: enfin il a trouvé l'aplatissement d'un seizieme; mais cela paroît bien fort, relativement à la durée de sa rotation qui

donne $\frac{1}{195}$ pour l'aplatissement de Mars en le supposant homogene (3763).

3345. Le globe de Jupiter est très remarquable par son aplatissement, par ses bandes et par la promptitude de sa rotation. Il n'a point de phases sensibles, parceque nous sommes trop près du Soleil par rapport à lui.

L'aplatissement de Jupiter fut observé par Cassini avant l'année 1666, comme je l'ai vu dans un ouvrage latin sur les taches des planetes, dont il n'y a jamais eu que les premieres feuilles d'imprimées. M. Maraldi m'a communiqué ce fragment *in-folio*, relié avec plusieurs autres ouvrages de Cassini, faits avant son arrivée en France. Picard observa aussi l'aplatissement de Jupiter. En 1691, Cassini trouva qu'il étoit de $\frac{1}{15}$[a]. En 1719 Pond mesura les diametres de Jupiter, et trouva l'aplatissement $\frac{1}{13,37}$ par un milieu (Newton, L. 3, prop. 19). Des observations encore plus récentes et plus exactes que Short fit avec un héliometre acromatique, donnent aussi le rapport de 13 à 14. J'ai rapporté aussi les observations de M. l'abbé Rochon (1393), qui donnent le rapport de 15 à 16. M. de la Place est persuadé, d'après le mouvement des nœuds des satellites, que c'est là le véritable rapport (3011), et que la théorie peut le donner mieux que les meilleurs micrometres; il s'en tient à $\frac{69}{74}$. Newton trouvoit $\frac{1}{10}$ par la théorie; mais il remarquoit qu'une augmentation de densité vers l'équateur devoit rendre plus petit cet aplatissement : il diminue aussi quand on suppose une augmentation de densité vers le centre; et l'on ne trouveroit que $\frac{1}{24}$ si l'on supposoit toute la matiere réduite au centre. *Clairaut, Figure de la Terre, pag.* 95 et 305. Je me suis servi du rapport de 13 à 14 pour trouver la figure de l'ombre de Jupiter dans les éclipses des satellites (2976).

3346. Les bandes un peu obscures que l'on voit sur le disque de Jupiter (FIG. 281) furent d'abord remarquées à Naples par Zuppi et Bartoli, Jésuites, et en 1633 par Fontana qui en figura trois (*Novae cœlest. et terr. Observ. Neap.* 1646). Hevelius (*Selenog.*, *pag.* 45). Le P. de Rhéita, le P. Riccioli, le P. Grimaldi, les observerent aussi (*Astr. refor.*, *p.* 370). Jos. Campani, qui construisit à Rome d'excellentes lunettes, observa dans Jupiter, le premier juillet 1664, quatre bandes obscures et deux blanches, au rapport de Dominique Cassini; il y a des temps où ces bandes paroissent très peu, elles ne sont pas également bien marquées dans toutes les parties du disque; il y a des bandes interrompues (*Elém. d'Astr.*,

[a] Cependant il lui parut quelquefois moindre; il sembla même, en 1690, que le disque étoit absolument rond. *Anc. Mém.* II, 108.

pag. 407). En 1691 on vit jusqu'à 7 ou 8 bandes obscures fort près les unes des autres ; quelquefois on n'en distingue qu'une ou deux : M. Herschel m'a dit en avoir vu jusqu'à 40. En 1773, on en voyoit beaucoup; Jupiter étoit périhélie et périgée ou le plus près de nous qu'il fût possible.

Hevelius, dans sa Sélénographie, remarqua que ces bandes étoient sensiblement paralleles à l'écliptique. Cassini reconnut qu'elles étoient plutôt paralleles à l'équateur de Jupiter; mais cet équateur differe très peu du plan de l'écliptique. Cassini écrivoit, le 12 octobre 1665, à l'abbé Falconieri que les ombres des satellites avoient cette année-là un mouvement parallele aux bandes de Jupiter, qui étoit alors dans les nœuds des satellites; d'où il concluoit que les orbites des satellites étoient paralleles aux cercles des bandes, et l'équateur de Jupiter dans le même plan que les orbites des satellites incliné d'environ 2 ou 3° sur l'orbite de Jupiter; mais cette inclinaison ne pouvoit s'observer avec précision. M. de la Place, par la théorie des satellites, qui en dépend un peu, la trouve 3° 12′ 24″.+ L'inclinaison étant si petite, il doit y avoir dans cette planete une espece d'équinoxe général et perpétuel.

+ La longit. de son ☊ = 10s 13° 9′ = 347°,8519 de divis. nouvelle (V. Exposit. du système du monde par La Place. Tom. II. p. 89. L'inclin. de l'éq. est = 3° 6′ ibidem).

3347. La durée de la rotation de Jupiter, indiquée par de petites taches dont Cassini observa le mouvement, parut de 9^h 55′ 50″; et lorsque Maraldi revit en 1713 la tache qui depuis 50 ans avoit disparu et reparu plusieurs fois, il trouva la durée de cette rotation 9^h 56′, précisément comme Cassini l'avoit trouvée en 1665. On peut voir, au sujet des taches de Jupiter et des variations de ses bandes, différens mémoires de Cassini et de Maraldi (Mém. acad. 1699, 1708, 1714; anciens Mém. T. II, *pag.* 104 ; T. X, *pag.* 1, 513 et 707).

M. Herschel a trouvé différens résultats pour la durée de la rotation depuis 9^h 51′ 46″ jusqu'à 9^h 55′ 40″ : il regarde ces taches comme des nuages que les vents transportent, et il en donne les figures, *Philos. Trans.* 1781. M. Schroeter, en 1787, a trouvé 9^h 55′ 33″,6 ; il a remarqué les mêmes variétés même dans l'espace de quelques jours, et la vîtesse des taches lui a paru différente à différentes déclinaisons : il les regarde aussi comme appartenantes à l'atmosphere de Jupiter (Journal de phys. février 1788 ; Astronomischen Entdeckungen, Berlin 1788, *in*-8°).

3348. Saturne est trop éloigné de nous pour qu'on ait pu observer sa rotation. Cassini ne put y appercevoir, avec ses plus grandes lunettes, de points assez remarquables pour vérifier ce mouvement ; nous avions cependant quelque raison de le présumer (3373).

(3373). M. Herschel, en 1789, s'en est assuré par des taches ou nuages obscurs qu'il a vus changer de place les 19, 20 et 21 juin 1780 ; il a même observé l'aplatissement de Saturne. Le 14 septembre 1789, il a trouvé les diametres 20″,6 et 22″,8 : la différence est d'un onzieme, ce qui indique bien une rotation ; mais il n'en a pas assigné la durée. M. Bugge assure avoir trouvé l'aplatissement d'un tiers en 1789 : il en conclut la rotation de 6 heures. Huygens la croyoit de 10 heures comme celle de Jupiter, d'après une induction qu'il tiroit de la distance et de la période du premier satellite de Saturne comparées à celles du premier satellite de Jupiter ; mais ce rapport ne paroît pas fondé. Cependant M. de la Place estime qu'elle peut être de 10 heures (*Mém. de l'acad.* 1787) ; mais c'est pour la partie intérieure de l'anneau. Nous n'avons donc rien de décidé à cet égard, mais on voit autour de cette planete un corps bien plus extraordinaire que tout ce qui se voit dans les autres planetes ; ce sera l'objet des articles suivans.

De l'Anneau de Saturne.

3349. L'ANNEAU DE SATURNE est la chose la plus singuliere que la découverte des lunettes nous ait fait appercevoir ; c'est une couronne large et mince qui environne Saturne sans le toucher : elle est ronde ; mais elle nous paroît sous une forme ovale à cause de son inclinaison. L'anneau est représenté dans la figure 280 tel qu'il paroît dans les plus grandes lunettes ; et lorsqu'il est d'une moyenne ouverture, il a une figure elliptique. Le petit axe est quelquefois plus grand, comme dans la figure 280, n° 2 ; MNOP représente l'anneau débordant un peu le globe de Saturne : mais il y a des temps où il se rétrécit peu à peu comme MROR ; enfin il devient si étroit qu'on ne le voit plus du tout. Saturne paroît alors tout-à-fait rond comme les autres planetes. Galilée écrivoit, en 1612, qu'il avoit vu Saturne composé de trois parties, *Saturnum triformem ;* mais comme cela lui paroissoit fort extraordinaire, et qu'il le vit ensuite d'une forme tout-à-fait ronde, il ne suivit point ces observations. Gassendi, en 1633, annonça aussi que Saturne lui paroissoit accompagné de deux globules de même blancheur que le corps même de Saturne. Plusieurs autres y voyoient deux corps ronds ou ovales, distincts et séparés : on les prenoit pour deux satellites de Saturne. Riccioli, *Almag.* I, 487, 723 ; *Astron. refor.*, 361). Hevelius en 1647 (*Selenog.*, *pag.* 44) disoit formellement qu'il ne comprenoit rien à ces deux bras de Saturne. En 1656, dans sa dissertation *de Saturni facie*, il dis-

tinguoit six phases différentes, appellant Saturne, suivant les temps, *Monosphaericum*, *Trisphaericum*, *Sphaerico-cuspidatum*, *Sphæricoansatum*, *Elliptico-ansatum diminutum*, *Elliptico-ansatum plenum;* mais la seconde et même la troisieme phase étoient des illusions optiques de ses lunettes. Roberval supposa des vapeurs élevées de l'équateur de Saturne: Hodierna crut que Saturne avoit la forme d'un sphéroïde avec deux taches obscures, et qu'en tournant sur son axe il se présentoit sous différentes formes. Riccioli, même après l'explication incontestable d'Huygens, se trompoit encore, et prétendoit que Saturne étoit environné d'une armille mince, plane, elliptique, adhérente à Saturne en deux points (*Astron. refor.*, *pag.* 368).

3350. Personne, avant Huygens, ne comprenoit la véritable cause de ces apparences; il donna son explication avec la découverte du satellite de Satune (*Syst. Saturn.*, 1659): elle fut attaquée à Rome par le P. Fabri sous le nom de *Eust. de Divinis;* mais Huygens répondit d'une maniere victorieuse (*Brevis assertio System. Saturnii. Hagae Com.* 1660).

L'anneau de Saturne est fort mince (3372), presque plan (3373), concentrique à Saturne, également éloigné de la surface de Saturne dans tous ses points; on diroit qu'il est soutenu par la pesanteur naturelle et simultanée de toutes ses parties, comme un pont ou une voûte qui seroit assez vaste pour environner toute la Terre, et qui se soutiendroit sans piliers; mais c'est plutôt par la force centrifuge de ses différentes parties qui les met en équilibre avec leur pesanteur vers Saturne (3374).

3351. Cassini observa que la largeur de l'anneau étoit divisée en deux parties égales par un trait obscur dont la courbure étoit la même que celle de l'anneau, et que la partie extérieure avoit une lumiere moins vive (*Mém.* 1715, *pag.* 13). Short, avec son grand télescope de 12 pieds, m'a dit y avoir observé des phénomenes encore plus singuliers.

3352. L'épaisseur des anses AB étoit, selon lui, divisée en deux; la partie intérieure A paroissoit avoir une lumiere continue sans interruption. Short disoit avoir vu la partie extérieure B divisée par plusieurs lignes qui paroissoient concentriques à la circonférence de l'anneau, et qui feroient croire qu'il y a plusieurs anneaux placés dans un même plan: mais Hadley ne voyoit qu'une ligne avec son télescope de 5 pieds un quart (*Philos. Trans.*, *n°.* 378; Abrégé VI, 222); et M. Herschel, avec de bien plus forts télescopes, n'a vu aussi qu'une seule ligne noire, ce qui n'indiqueroit que deux an-

neaux (*Philos. Trans.*, 1790). Les lignes de la figure 280, plus distinctes dans la partie B, se raprochent et se confondent vers les points C et E, parceque l'anneau y est trop mince à raison de l'obliquité qui n'a pas lieu dans le sens AB perpendiculaire au rayon visuel.

La bande obscure EE, que l'on voit sur le disque de Saturne, est l'ombre de l'anneau, comme nous le dirons bientôt (3372). On voit aussi quelquefois le bord de l'ombre de Saturne en D ou en N, figure 280, n° 2, projeté sur l'anneau.

3353. Le diametre de l'anneau de Saturne est à celui du globe de Saturne comme 7 est à 3, suivant les mesures de Pound faites en 1719 avec une lunette de 123 pieds anglois de Huygens : l'espace AF, qu'il y a entre le globe et l'anneau, est à-peu-près égal à la largeur de la couronne, ou tant soit peu plus grand suivant Huygens. Si l'on suppose le rayon de Saturne dans ses moyennes distances de 9″, le diametre intérieur de l'anneau sera de 15″, et le diametre extérieur 21″, le vide étant de 6″, et la largeur de la couronne également de 6″. A l'égard de la grandeur absolue, le diametre de Saturne étant de 28594 lieues, celui de l'anneau est de 66719 lieues (Voyez la table de l'article 1398); son diametre intérieur 47652 lieues, et la largeur de la couronne 9533 lieues $\frac{1}{2}$: ainsi la largeur de l'anneau est à-peu-près $\frac{1}{3}$ du diametre de Saturne aussi bien que les espaces vides et obscurs AF, que l'on voit entre le globe et les anses. Wiston, dans la Vie de Clarke, dit que le pere de ce dernier avoit observé une étoile au travers d'un de ces espaces AF (Smith, *Opt.*, *pag.* 440).

3354. L'anneau de Saturne semble être comme l'équateur de cette planete ; il est incliné sur son orbite de 30°, et toujours parallele à lui-même pendant la révolution de Saturne. Ce parallélisme produit ses diverses apparences dans la durée d'une révolution, comme celui de la Terre produit la diversité des saisons.

Lorque Saturne est à 5^s 20° ou 11^s 20° de longitude, le plan de son anneau, qui est constamment dirigé vers ces points de l'orbite de Saturne (considéré dans la région des étoiles à une distance infinie), se trouve en même temps dirigé vers le Soleil : il ne reçoit de lumiere que sur son épaisseur, qui n'est pas assez considérable pour être apperçue de si loin, du moins avec les lunettes ordinaires : Saturne alors paroît rond et sans anneau. Il disparoît aussi quand son plan passe par la Terre, étant dirigé vers notre œil ; nous ne voyons alors que son épaisseur qui est trop petite pour qu'on puisse la distinguer. Cette phase ronde fut observée par Huygens en 1655

(*Syst. Satur.*); ensuite en 1671: Maraldi l'observa sur-tout avec soin depuis le 13 octobre 1714 jusqu'au 10 février 1715 et depuis le 23 mars jusqu'au 12 juillet 1715 (*Mém. acad.* 1714, 1715, 1716). Enfin nous l'avons observée depuis le 5 octobre 1773 jusqu'au 11 janvier 1774 et depuis le 3 avril jusqu'au premier juillet. En 1789 il y a eu aussi deux disparitions (3363) ; mais les différentes observations ne se sont pas parfaitement accordées. En 1803 il n'y aura qu'une disparition du 28 juin au 23 août; mais vers le 26 décembre 1802 les anses seront extrêmement diminuées. Ces disparitions sont calculées aussi pour 1819, 1832, 1848, 1862, 1878 et 1891, dans l'ouvrage de M. du Séjour, intitulé *Essai sur les phénomenes relatifs aux disparitions périodiques de l'anneau de Saturne,* 1776, *in*-8°; et dans son *Traité analytique des mouvemens apparens des corps célestes,* tome II, 1789, où il y a des méthodes savantes et une théorie complete pour ces sortes de phénomenes.

3355. Le lieu du nœud de l'anneau, sur l'orb. de Saturne, étoit à 5^s 20° 30′ vers le milieu du dernier siecle, suivant Huygens, de même que le nœud des quatre premiers satellites. Par les observations de 1685, le nœud de l'anneau parut à 5^s 19° 55′. Cassini, dans ses Élémens d'Astronomie, le place à 5^s 22°; Maraldi à 5^s 19° 48′ par les observations de 1715 (*Mém. acad.,* 1716). Cette derniere détermination est celle qui avoit été observée et discutée avec le plus de soin. J'ai trouvé, pour 1774, 5^s 20° 38′, ou 5^s 17° 5′, sur l'écliptique; ce qui ne differe de Maraldi qu'à raison de la précession des équinoxes en 59 ans. Ainsi le nœud de l'anneau paroît être sensiblement immobile.

On auroit pu croire cependant que les attractions du Soleil, de Jupiter, et des satellites de Saturne, sur un équateur aussi mince, devoient causer un déplacement pareil à celui que la Terre éprouve, et qui fait la précession des équinoxes; c'est ce qui me détermina, en 1773, à rappeller l'attention des astronomes sur ce phénomene, par des avertissemens réitérés dans les papiers publics. Ces avis n'ont point été inutiles : les observations ont été faites en divers endroits, et elles ont très bien réussi. Je me transportai à Beziers au mois d'octobre, pour observer, sous le plus beau ciel de la France, la premiere disparition; et j'en ai rendu compte, ainsi que de toutes les autres observations qui nous sont parvenues, dans les *Mémoires* de 1774. M. Messier a publié aussi beaucoup d'observations dans les *Mémoires de Berlin* pour 1776 : on en verra ci-après les résultats avec les méthodes.

3356. Lorsque l'anneau disparoît par la premiere cause, étant dirigé vers le Soleil, il suffit que le Soleil l'ait dépassé de trois mi-

nutes pour qu'il paroisse éclairé ; aussi cet anneau ne disparoît, faute de lumiere, que pendant trois ou quatre jours avant le passage de Saturne par les nœuds de l'anneau (*Mém.* 1774, *pag.* 91).

A l'égard de la seconde cause, Heinsius croyoit qu'il falloit que la Terre fût élevée au moins d'un demi-degré sur le plan de l'anneau, pour que l'on pût l'appercevoir avec une bonne lunette de 15 pieds; ce qui feroit, dans certains cas, plus de huit jours de disparition avant ou après le passage : mais, par les observations de 1774, j'ai reconnu que l'anneau ne disparoissoit que le jour même où la Terre passe par le plan de l'anneau (*Mém. de l'acad.*, 1774, *pag.* 91). Le mouvement de la Terre fait que ce passage est plus rapide que celui du Soleil par le plan de l'anneau, qu'il est plus aisé d'observer la disparition qui vient du passage de la Terre que celle qui vient du passage du Soleil ; d'ailleurs on peut avoir pour celui de la Terre deux phases correspondantes qui rendent la détermination plus exacte : voilà pourquoi j'expliquerai bientôt la maniere de trouver le nœud de l'anneau par ces dernieres observations.

3357. Il y a une troisieme considération nécessaire pour expliquer la durée de ces disparitions de l'anneau ; c'est que nous ne pouvons le voir si son plan passe entre le Soleil et nous (*Huygens,* pag. 62); car alors sa surface éclairée n'est point tournée vers nous : tant que Saturne est entre $11^s\ 20°$ et $5^s\ 20°$ de longitude sur son orbite, le Soleil éclaire la surface méridionale de l'anneau ; si la Terre est alors élevée sur la surface septentrionale, elle ne peut voir la lumiere de l'anneau, ou la partie éclairée du Soleil; ce sera un des temps de la phase ronde : ainsi l'on peut voir disparoître les anses deux fois dans la même année, et les voir reparoître deux fois, comme on l'a véritablement observé (*Mém.*, 1715, 1774). Maraldi fit voir, d'après la Théorie de Huygens, de quelle maniere on pouvoit expliquer ces différentes disparitions (*Mém. acad.*, 1716) : nous avons eu ensuite là-dessus une dissertation *de Apparentiis annuli Saturni, auctore Godofredo* Heinsio, etc. , *Lipsiae*, 1745 ; enfin cette matiere a été traitée dans le livre de M. du Séjour, et dans le cinquieme volume des Œuvres de M. Boscovich, 1785 : mais je vais donner une méthode bien plus simple.

3358. Soit VMA (FIG. 283) le globe de Saturne, sur lequel on imaginera trois cercles pour représenter l'anneau, l'orbite de Saturne et l'écliptique ; la figure 283 est pour le nœud descendant de l'anneau, elle sert pour 1774 ; la figure 284 seroit pour le nœud ascendant: je suppose que c'est la partie supérieure du globe de Saturne, en sorte que les mouvemens se fassent toujours vers la gauche. Le

diametre ASV représente le plan de l'anneau; la ligne NM exprime l'orbite que le Soleil paroît décrire en 30 ans autour de Saturne ; cette orbite est exactement dans le même plan, et décrite avec les mêmes vîtesses que l'orbite de Saturne vue du Soleil (1109). Le cercle NOI représente un plan qui passe par le centre de Saturne parallèlement à l'écliptique, ou au plan de l'orbite terrestre : ce n'est pas le cercle que la Terre décrit; mais ses poles répondent aux mêmes points dans la sphere étoilée : ce plan NOI, prolongé dans l'immensité de la sphere céleste, passe sur les mêmes étoiles, et marque dans le ciel la même trace et les mêmes points que le plan de l'orbe terrestre également prolongé ; car comme deux lignes paralleles ne marquent dans le ciel qu'un seul et même point (1115), ainsi deux plans paralleles, quoique l'un passe par le Soleil et l'autre par Saturne, sont comme un seul et même plan, quand on les considere parmi les étoiles fixes : leur éloignement est si grand que la latitude de Saturne, ou sa distance à l'écliptique (22 fois moindre que la distance entiere de Saturne au Soleil), y devient insensible. Si nous appercevons Saturne à 1° de l'écliptique, c'est-à-dire à 1° des étoiles auxquelles se dirige l'écliptique, notre rayon visuel faisant avec le plan de l'écliptique un angle d'un degré, ce même rayon, qui va de Saturne à la Terre, fera aussi un angle d'un degré avec le plan de l'écliptique vu de Saturne, ou le plan qui passe par Saturne et qui est parallele à l'écliptique. Ainsi Saturne paroîtra à 1° des mêmes étoiles situées dans l'écliptique; la ligne droite qui joint la Terre avec Saturne marque, par une de ses extrémités, le lieu de la Terre vu de Saturne, et par l'autre le lieu de Saturne vu de la Terre: ainsi la Terre, dans le temps de la disparition de l'anneau, peut être supposée en T à une distance TE de cette écliptique, égale à la latitude de Saturne vue de la Terre. L'arc de cercle NOI appartient donc à un plan que l'on conçoit parallele au plan de l'écliptique, faisant en N un angle de 2° 30′ avec l'orbite de Saturne (1373). La longitude du nœud N étoit de 3^s 21° 30′ en 1750.

3359. Lorsque l'anneau disparoît par la premiere cause (3354), c'est-à-dire parcequ'il est dirigé vers le Soleil, ou qu'il reparoît, le Soleil commençant à l'éclairer, il faut que le Soleil vu de Saturne réponde au point S qui est le nœud de l'anneau sur l'orbite. Par exemple, le 11 janvier 1774, à 10^h du soir, la longitude héliocentrique de Saturne étoit de 5^s 20° 46′, et ce jour on revit l'anneau que le Soleil venoit de traverser: ainsi le nœud ascendant sur l'orbite de Saturne étoit à 5^s 20° 46′. Mais il paroît, par les autres observations, que le Soleil avoit passé dans le plan de l'anneau dès le 8 janvier: ainsi la

longitude du nœud se trouve seulement de $5^s 20° 38'$ sur l'orbite de Saturne, ce qui fait $5^s 17° 5'$ sur l'écliptique en O. On pourroit en ôter $15'$ d'après les observations de 1789 et 1790 (*Mém.* 1790). C'est à-peu-près l'incertitude qui reste sur cet élément.

3360. Le cercle NOI, parallele à l'écliptique, nous est nécessaire pour le calcul des disparitions produites par la seconde cause : par exemple, le 3 avril 1774, l'anneau disparut étant dirigé vers la Terre; et l'on veut en conclure le lieu du nœud. La Terre devoit répondre en un point T du plan de l'anneau ATV, à une distance TE de l'écliptique, égale à la latitude géocentrique de Saturne pour ce temps-là; le point E de l'écliptique est celui auquel répond la Terre vue de Saturne : ainsi l'arc EO de l'écliptique est égal à la distance qu'il y a du lieu géocentrique de Saturne au nœud O de l'écliptique et de l'anneau. Le lieu géocentrique de Saturne dans l'écliptique, opposé au lieu E de la Terre, étoit de $5^s 21° 7' 38''$; la latitude australe ET de la Terre, égale à la latitude boréale de Saturne, étoit de $2° 27'$, et l'angle O $31° 20'$ (3364) : en divisant la tangente de la latitude ET par celle de l'inclinaison TOE, l'on a le sinus du côté $EO = 4° 1'$; donc la longitude du nœud ascendant O étoit $5^s 17° 6'$. Dans le retour des anses, le 1 juillet, Saturne étoit à $5^s 20° 42'$, avec $2° 12' \frac{1}{3}$ de latitude; on trouve $OE = 3° 37'$, et le lieu du nœud ascendant $O = 5^s 17° 5'$. M. du Séjour trouve le même résultat (p. 201) par ses méthodes analytiques; Maraldi trouvoit $5^s 16° 17'$ pour 1715 (*Mém. acad.*, 1716). Si l'on veut l'avoir pour un autre temps, on ajoutera la précession des équinoxes, par exemple, $49'$ pour 59 ans, et l'on aura, pour 1774, le nœud ascendant à $5^s 17° 6'$, tandis que les observations m'ont donné $5^s 17° 5'$ (*Mém.* 1774, *pag.* 90-95) : les observations de 1789 semblent donner un peu moins (3359).

3361. On peut également déduire de ces observations le nœud S de l'anneau sur l'orbite de Saturne : car dans le triangle SON supposant l'angle S de 30°, l'angle N de $2° 30'$, et la distance ON $55° 22'$ entre le nœud N de l'orbite $9^s 21° 43'$ et le nœud O de l'anneau sur l'écliptique $11^s 17° 5'$; on trouve $SN = 58° 55'$, qui, ajoutés à la longitude du nœud N, $9^s 21° 43'$, donnent celle du nœud $S = 11^s 20° 38'$ sur l'orbite de Saturne. Ainsi voilà un second moyen de trouver le nœud de l'anneau sur l'orbite, non par le temps où le Soleil cesse de l'éclairer (3359), mais par le temps où nous cessons de le voir, et où il passe par notre œil; ce qui est encore plus exact, comme je l'ai déja remarqué (3356). On en peut conclure aussi l'inclinaison NOA de l'anneau sur l'écliptique, et on la trouve de $31° 20'$, en la supposant de 30° sur l'orbite de Saturne.

3362. M. du Séjour, dans un Mémoire analytique lu à l'académie en 1773 sur cette matiere, remarquoit que, dans l'espace de 59 ans, il y a quatre disparitions de l'anneau, deux consécutives (qui sont doubles, mais il peut arriver qu'une soit invisible); et les deux autres qui sont simples, c'est-à-dire où l'anneau ne disparoît qu'une fois: au reste la période de 59 ans n'est pas assez exacte pour se continuer long-temps. Voyez son *Essai sur les Disparitions*, et le second volume de son *Traité analytique*. Cependant, en 1714 et 1773, on a eu des phénomenes correspondans et semblables. Le 13 octobre 1714, et le 9 octobre 1773, la Terre approchant du plan de l'anneau, on cessa de le distinguer. Le 10 février 1715, et le 11 janvier 1774, le Soleil ayant passé au nord de l'anneau, on recommença de le voir. Le 23 mars 1715, et le 3 avril 1774, la Terre revenant vers le plan de l'anneau, il disparut pour la seconde fois. Le 12 juillet 1715, et le 1 juillet 1774, la Terre dépassa de nouveau le plan de l'anneau, et on le revit pour la seconde fois (*Mém.* 1716, *pag.* 172; *Mém.* 1774, *pag.* 89).

Les différences des lunettes, et les inégalités de l'atmosphere en divers climats, mettent quelques jours d'incertitude dans ces sortes d'observations; mais avec des lunettes acromatiques, dont presque tous les astronomes se servent actuellement (2307), on a été d'accord, à un ou deux jours près, dans les observations de 1774; il n'y eut que la disparition du mois d'octobre 1773 sur laquelle on différa de près de 12 jours, parceque le temps étoit peu serein, et Saturne fort près de l'horizon. Dès le 5 octobre, presque tous les astronomes l'avoient perdu de vue, quoique ce ne dût être que le 9, suivant le calcul déduit des phases du 3 avril et du 1 juillet, qui s'accordent entre elles. En 1789, il y a eu de semblables discordances dans les observations.

3363. En 1789, avant le 4 mai, la Terre, vue de Saturne, étoit en A (FIG. 284) à droite ou à l'occident et au nord du plan de l'anneau; le Soleil y étoit aussi: le 4 mai la Terre a passé en T, ayant $5^s\,21°$ de longitude, et, nous trouvant au midi de l'anneau, nous avons cessé de le voir. La Terre a continué d'avancer vers l'orient par un mouvement direct jusqu'au premier juillet; et, retournant par un mouvement rétrograde vu de Saturne, elle a repassé en T le 28 juillet, et nous avons recommencé à voir la surface septentrionale de l'anneau que le Soleil éclairoit encore. Le 10 octobre, le Soleil arrivé à $5^s\,20°\frac{1}{2}$, vu de Saturne, par le mouvement annuel qu'il paroît avoir autour de Saturne, a passé en S, et a traversé le plan de l'anneau pour aller à gauche, et éclairer la surface méridionale et orientale de l'anneau, et nous

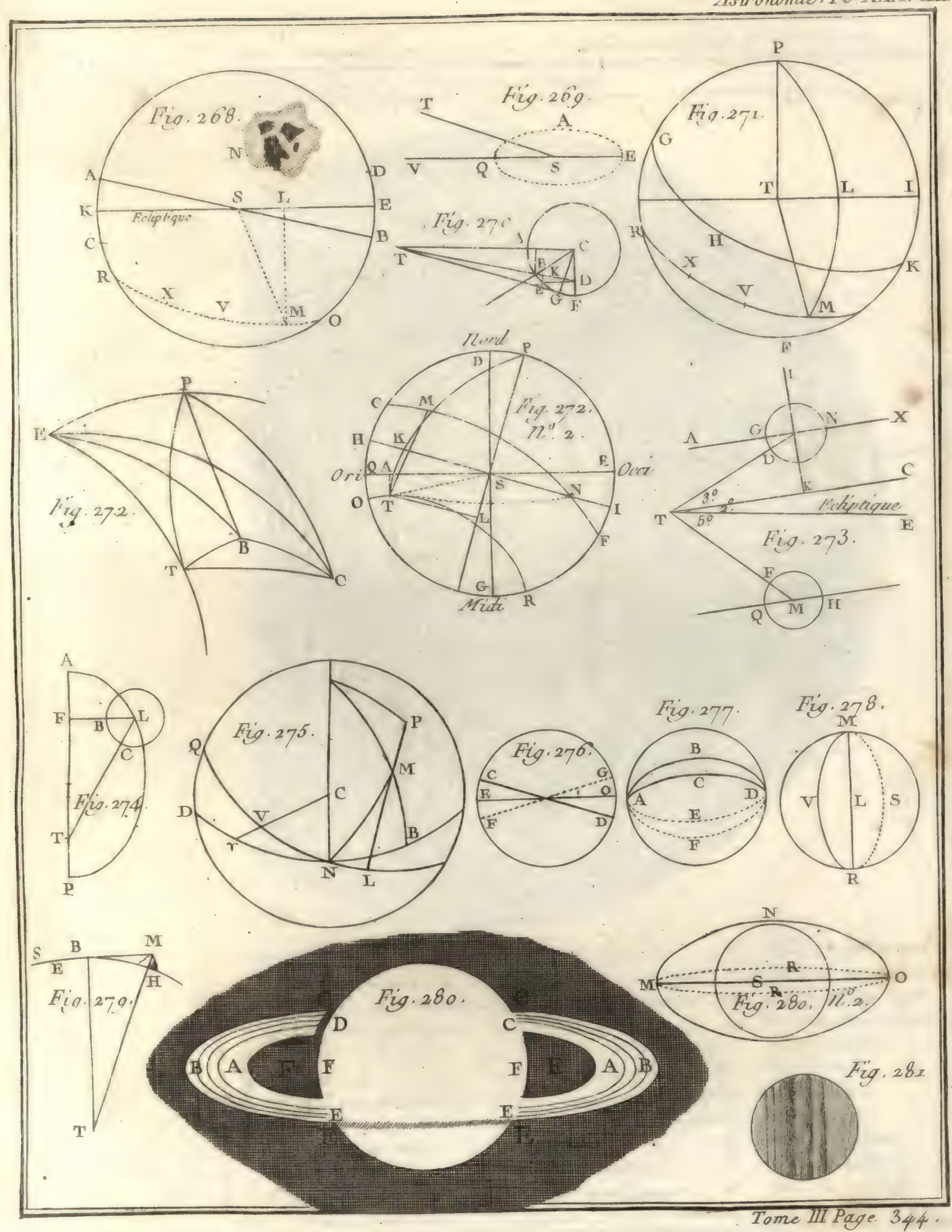

Fig. 268.
Ecliptique
Fig. 269.
Fig. 270.
Fig. 271.
Fig. 272.
Nord
Fig. 272. N°. 2.
Ori
Occi
Midi
Fig. 273.
Ecliptique
Fig. 274.
Fig. 275.
Fig. 276.
Fig. 277.
Fig. 278.
Fig. 279.
Fig. 280.
Fig. 280. N°. 2.
Fig. 281.



Figure de la Lune dans ses moyennes librations; avec les noms de ses principales taches suivant Riccioli et suivant Hevelius.





avons cessé de le voir; la Terre étant encore à droite ou du côté de A, son mouvement rétrograde a duré jusqu'au 19 novembre, où elle étoit à $5^s\,16^\circ\,30'$: alors elle a repris son mouvement direct vers l'orient ou vers la gauche, et, le 30 janvier 1790, elle a repassé en T : alors nous avons recommencé de voir cette surface méridionale, que le Soleil éclairoit déja depuis le 10 octobre, et que nous verrons ainsi pendant 15 ans. Le mouvement de Saturne ou de la Terre, pris dans les Éphémérides, suffit pour indiquer celui de la Terre ou de Saturne.

M. Herschel, avec son télescope de 40 pieds, nous apprend qu'il n'a point cessé de voir l'anneau pendant le temps qu'il a disparu pour nous; son épaisseur, qui est toujours éclairée par le Soleil, ou la lumiere réfléchie de Saturne sur le plan de l'anneau, suffisoit pour le faire appercevoir dans un télescope qui a quatre pieds d'ouverture; et, dans le temps où il nous présentoit exactement son épaisseur, M. Herschel a vu des satellites qui le suivoient, qui étoient partagés en deux par l'anneau, et sembloient enfilés comme des grains de chapelet, débordant l'anneau au nord et au midi; mais il pense que par la réfraction d'une petite atmosphere qu'il peut y avoir sur les deux faces de l'anneau, on peut voir un satellite au-dessus et au-dessous, quand même son diametre ne surpasseroit pas l'épaisseur de l'anneau.

3364. Dans la détermination du nœud de l'anneau (3360) j'ai supposé connue son inclinaison sur l'orbite, parcequ'une petite incertitude sur l'inclinaison n'empêcheroit pas qu'on déterminât fort bien le lieu du nœud. Lorsqu'il s'agit de déterminer cette inclinaison, on choisit le temps où Saturne est le plus éloigné du nœud de l'anneau, et que la Terre est le plus élevée au-dessus du plan de l'anneau; il nous paroît alors sous la forme d'une ellipse MNOP (FIG. 280 n° 2); le petit axe est la moitié du grand, du moins en réduisant les observations au centre du Soleil, comme nous l'expliquerons bientôt (3371). En supposant l'anneau absolument circulaire, il faut que son inclinaison soit de 30° sur le plan de l'orbite de Saturne pour paroître sous cette forme (1815); par là il est aisé de savoir quelle doit être l'inclinaison de cet anneau sur le plan de l'écliptique (3361) : Heinsius la fait de $31^\circ\,23'\,17''$; Maraldi de $31^\circ\,20'$ (*Mém. acad.* 1716); la différence est insensible. C'est aussi l'inclinaison que nous avons supposée pour les orbites des quatre premiers satellites de Saturne (3071), qui tournent à-peu-près dans le plan de l'anneau. On verra bientôt (3367) que, quoique l'inclinaison soit de $31^\circ\,20'$, nous n'observons jamais l'anneau d'une si grande ouverture, à cause de la latitude de Saturne.

Il nous reste à chercher sous quelle forme l'anneau doit nous paroître en différens temps, ou l'angle d'élévation de notre œil au-dessus du plan de l'anneau, pour être en état de prédire sa disparition. C'est la matiere du problême suivant, que Maraldi n'a point donné dans son Mémoire, et que Heinsius a résolu d'une maniere assez longue : en voici une solution plus simple.

3365. Problême. *Connoissant l'inclinaison et les nœuds de l'anneau sur l'écliptique, trouver l'angle d'élévation de la Terre au-dessus du plan de l'anneau.*

Soit B (fig. 283) le lieu de la Terre opposé à la longitude géocentrique de Saturne; BF la latitude de la Terre vue de Saturne, égale à la latitude de Saturne vue de la Terre, mais de dénomination contraire; OF la différence entre la longitude de la Terre vue de Saturne et celle du nœud de l'anneau; dans le triangle FBO, l'on cherchera BO et l'angle O; la somme ou la différence de BOF, et de l'angle SOF, inclinaison de l'anneau sur l'écliptique $=31^\circ 23'$, donnera l'angle SOB; dans le triangle BOG l'on connoît l'hypoténuse OB et l'angle BOS, l'on cherchera BG, qui est la latitude de la Terre par rapport à l'anneau vu de Saturne, ou l'élévation de la Terre au-dessus de l'anneau; les analogies sont les mêmes que dans l'article 900.

3366. Exemple. Le 8 décembre 1743, la longitude de Saturne vue de la Terre étoit $5^s\,18^\circ\,33'$, et sa latitude $1^\circ\,53'$ boréale (1144); ainsi le lieu de la Terre B vu de Saturne répondoit sur l'écliptique au point F à $11^s\,18^\circ\,33'$, et la latitude BF de la Terre étoit de $1^\circ\,53'$ au midi: la longitude du nœud descendant de l'anneau O étoit à $11^s\,16^\circ\,36'$; donc OF étoit de $1^\circ\,57'$, l'hypoténuse BO de $2^\circ\,42'$, et l'angle BOF de $44^\circ\,1'$: on ôte l'angle FOG $=31^\circ\,23'$, il reste BOG $=12^\circ\,38'$, avec lequel on trouve BG $=35'$; c'étoit l'élévation de la Terre au midi du plan de l'anneau : si elle étoit devenue plus petite, l'anneau auroit pu disparoître; mais il ne fit que diminuer de lumiere, comme l'observa Heinsius. Il ne put voir la disparition qui eut lieu ensuite du 25 juillet au 29 août.

3367. Quand Saturne est vers $2^s\,17^\circ$ ou $8^s\,17^\circ$ de longitude ou à 90° des nœuds, son anneau doit paroître le plus ouvert, mais la latitude de Saturne apporte quelque modification à cette plus grande ouverture: par exemple, pour le 22 avril 1767, Saturne étant à $2^s\,16^\circ\,55'$, avec $1^\circ\,10'$ de latitude australe, et le nœud O étant à $5^s\,16^\circ\,55'$, on a OF $=90^\circ$, l'angle BOF de $1^\circ\,10'$ vers le nord, et l'angle BOG, ou l'arc BG, qui en est la mesure, étant à 90° de distance, $30^\circ\,13'$: ainsi quoique l'inclinaison de l'anneau fût de $31^\circ\,23'$, et que la Terre fût

la plus éloignée qu'elle pût être des nœuds de l'anneau, il n'étoit vu de la Terre que sous une inclinaison de 30° 13′, quantité dont la Terre étoit sous la face méridionale du plan de l'anneau. C'est dans de pareilles circonstances qu'il importe de mesurer avec soin le rapport des diametres de l'anneau, si l'on veut connoître son inclinaison; car si elle est exactement de 31° 23′, le petit axe de l'anneau sera au grand, dans le cas que nous venons d'expliquer, comme le sinus de 30° 13′ est au rayon, ou comme 50$\frac{1}{3}$ est à 100, c'est-à-dire précisément la moitié; car la fraction $\frac{1}{3}$ ne sauroit s'apprécier avec nos instrumens, n'étant que $\frac{1}{7}$ de seconde ou la cent cinquantieme partie du petit axe, qui, en total, n'est que de 20″.

3368. Par le moyen de l'élévation BG de notre œil sur le plan de l'anneau, on trouve la figure de l'anneau ou le rapport des axes de son ellipse pour un temps quelconque; car le grand axe est toujours au petit comme le rayon est au sinus de cette élévation (1815).

3369. On trouve aussi la position du grand axe de l'anneau ou de la ligne des anses par rapport à l'écliptique : l'angle qu'ils font est égal à l'angle FBG du cercle de latitude BF avec le cercle BG perpendiculaire à l'anneau : cela revient à ce que nous avons expliqué pour l'équateur solaire (3256).

En faisant un semblable calcul pour l'orbite du 5ᵉ satellite de Saturne, on aura l'angle que fait le grand axe de son ellipse avec la ligne des anses. Car soit HK (FIG. 284) l'orbite du cinquieme satellite coupant en H l'écliptique, en R l'orbite de Saturne, en K le plan de l'anneau, et que B soit le lieu de la Terre; en abaissant des arcs perpendiculaires BF, BG, BL, sur l'écliptique, sur l'anneau, et sur l'orbite du satellite, elles feront entre elles les mêmes angles que l'écliptique avec les grands axes des ellipses de l'anneau et de l'orbite. On calculera ces angles par le moyen des triangles BOF, BOG, BFH, BLH.

3370. Si l'on vouloit savoir le jour où ce satellite passe dans la ligne des anses en G (FIG. 255), on auroit cette expression : la tangente de sa distance à la conjonction ou de GL est égale au sinus de l'ouverture SL de son ellipse ou de l'élévation de la Terre sur son plan divisé par la tangente de l'angle FSG que font les deux axes de l'ellipse et de l'anneau. Car l'ouverture GM est égale au cosin. de GL multiplié par le sinus de l'élévation de l'œil, et elle est égale aussi à SM tang. GSM, ou à sin. GL tang. GSM; donc tang. GL = sin. élévation divisée par tang. GSM (*Mém.* 1786).

A l'égard des quatre satellites intérieurs qui sont presque dans le même plan que l'anneau (3071), c'est toujours sur la ligne des

anses qu'arrivent leurs plus grandes digressions ; et même la maniere la plus commode d'observer leurs longitudes est de marquer leurs passages par la ligne des anses. Mais on a remarqué quelques écarts dans cette regle.

3371. L'élévation du Soleil au-dessus du plan de l'anneau est plus aisée à calculer que celle de la Terre. Supposons le Soleil en C (FIG. 283), l'arc CD perpendiculaire sur l'anneau VSA est la distance du Soleil au plan de l'anneau ; CS est la distance héliocentrique de Saturne au nœud S ($5^s\ 20^\circ\ 38'$) mesurée sur l'orbite de Saturne MCSN : or R : sin. CS :: sin. 30° : sin. CD, c'est l'élévation du Soleil sur le plan de l'anneau. De là on conclut aisément la figure de l'anneau vue du Soleil.

L'on peut réduire les observations que l'on en fait sur la Terre à celles qui seroient faites dans le Soleil ; et lorsqu'on choisit des observations faites dans les temps où le lieu de Saturne vu du Soleil est à $2^s\ 20^\circ\ 38'$ ou à $8^s\ 20^\circ\ 38'$, on a la plus grande élévation possible du Soleil sur l'anneau, qui est égale à l'inclinaison ; c'est ainsi qu'on a trouvé cette inclinaison de 30° sur l'orbite ; on en a conclu celle de l'anneau sur l'écliptique $31^\circ\ 20'$ (3361).

3372. Il me reste à faire sur l'anneau de Saturne quelques réflexions annoncées dans la définition (3349, 3350), et qui supposent les observations précédentes. J'ai dit que l'anneau est fort mince : en effet quand il est dirigé vers le Soleil et qu'il n'est éclairé que par son épaisseur, nous n'y voyons aucune lumiere ; et quand il est dirigé vers nous de sorte qu'il ne nous présente que son épaisseur, nous ne le distinguons point, parcequ'une épaisseur de 800 lieues ne nous paroîtroit que d'une demi-seconde. Il est vrai qu'on distingue sur Saturne l'ombre de l'anneau, dans le cas même où l'anneau ne paroît point : cela fit croire à Huygens que l'anneau avoit une épaisseur sensible, mais qui réfléchissoit peu de lumiere. On pourroit cependant expliquer cette ombre que nous appercevons sur Saturne sans cette supposition ; en effet quand l'anneau dirigé vers le Soleil est éclairé par son épaisseur, la Terre, n'étant pas exactement dans le plan de l'anneau, le voit obliquement projeté sur Saturne en forme de bande obscure plus considérable que l'épaisseur de l'anneau. Quand l'anneau, dirigé vers la Terre, ne nous présente que son épaisseur, nous ne le voyons point, mais le Soleil l'éclaire alors obliquement, de sorte que l'anneau répand aussi sur Saturne une ombre plus considérable. Il faudroit que l'anneau passât en même temps par le Soleil et par la Terre pour qu'on pût décider que son épaisseur ne jette pas d'ombre sensible sur Saturne ; ce qui ne

se peut pas actuellement que le nœud de Saturne sur l'écliptique est fort éloigné du nœud de son anneau. Maraldi reconnut encore d'une autre maniere que l'anneau étoit très mince ; il suppose d'abord que les anses disparoissent dès que l'anneau passe par la la Terre ou par notre œil, et qu'ensuite elles reparoissent aussitôt que la Terre revenant vers l'anneau le dépasse et qu'il cesse d'être dirigé vers le centre de la Terre : il trouve par ces deux phases le même résultat pour le lieu du nœud ; ce qui prouve qu'on le voit dès qu'il a la moindre obliquité, c'est-à-dire que son épaisseur est si petite qu'il est inutile d'y avoir égard dans le calcul (*Mém.* 1716, *pag.* 179). J'ai trouvé le même résultat pour la disparition du 30 avril 1774 et la réapparition du premier juillet; une différence de 2′ entre ces résultats ne dépend que de quelques heures de différence dans les temps des observations. Ainsi il est prouvé que c'est le jour même du passage de la Terre dans le plan de l'anneau que nous le voyons paroître ou disparoître. Le segment AB (FIG. 280) qui est entièrement illuminé a 88° 50′, et sa corde est de 46700 lieues ; douze heures avant le passage de la Terre dans le plan, l'élévation de notre œil est de 1′ 19″, et les 46700 lieues paroissent seulement avoir 18 lieues : si donc l'anneau avoit seulement 18 lieues d'épaisseur, on le verroit toujours, même avec les lunettes ordinaires, comme l'on voit les anses douze heures avant que nous soyons dans le plan de l'anneau.

3373. J'ai dit que l'anneau est presque plan ; il ne l'est pas rigoureusement ; en effet, en 1671, lorsque les anses furent près de disparoître, elles se raccourcirent un peu (*anc. Mém. tome X, pag.* 583). Ainsi une partie de l'anneau avoit disparu, et présentoit son tranchant, tandis que le reste présentoit une partie de son plan. Le 9 octobre 1714 elles étoient de moitié plus courtes qu'à l'ordinaire (*Mém.* 1715, *p.* 12) : la partie orientale paroissoit plus large que l'occidentale. Le 12 octobre Saturne parut avec une seule anse du côté de l'occident. Cela pourroit donner lieu de croire que depuis le 9 jusqu'au 12, la rotation de Saturne avoit pu faire passer de l'orient à l'occident cette partie de l'anneau qui étoit la plus visible ou la moins approchante de notre rayon visuel. Heinsius observa, le 29 novembre 1743, que le bras oriental étoit plus court que l'autre.

Le 6 octobre 1773 on ne voyoit à Cadix que l'anse occidentale. Le 11 janvier 1774, M. Messier à Paris voyoit les anses détachées, et l'anse orientale plus longue. M. Herschel vit, en 1774, Saturne avec une seule anse. Le premier juillet M. Messier remarqua sur

l'anneau, qui étoit encore extrêmement mince, des points lumineux plus gros que le filet de lumiere qui formoit les anses. M. Herschel soupçonne que ce pouvoient être les satellites intérieurs qu'il a découverts en 1789, et qui, tournant dans le plan de l'anneau, paroissoient sur son bord. Si ces points appartiennent à l'anneau, ils indiquent une irrégularité dans son plan : la disparition d'une des anses prouve aussi qu'il y a un peu de courbure dans ce plan ; car s'il étoit dans un seul plan, ses parties droites et gauches disparoîtroient en même temps, et le segment extérieur, qui est d'une lumiere pleine, ne disparoîtroît pas le premier : au reste c'est quelquefois le dernier qui disparoît. M. Herschel a observé que la lumiere de l'anneau étoit plus vive que celle de Saturne.

M. du Séjour croit que la partie méridionale de l'anneau réfléchit plus de lumiere que la partie septentrionale, ce qui peut rendre plus facile à observer les disparitions dans lesquelles la Terre passe du nord au sud, comme le 4 mai 1789, où dans lesquelles le côté méridional recommence à être éclairé, comme le 10 octobre 1789.

3374. Les partisans des causes finales trouvent que cet anneau étoit nécessaire à une planete qui reçoit du Soleil cent fois moins de lumiere que nous. Cassini regardoit l'anneau comme un assemblage de satellites assez multipliés et assez proches les uns des autres pour qu'on ne distingue pas les intervalles. Un autre jugeoit que c'étoit un satellite enflammé, tournant en $16^h\ 54'$ (*Gentl. Magazine* 1774, *pag.* 351). Maupertuis, dans son *Discours sur la figure des astres*, explique la formation de l'anneau par la queue d'une comete que Saturne força de circuler autour de lui. Mairan disoit que Saturne avoit été d'un plus grand diametre, et que l'anneau étoit le reste de l'équateur de l'ancienne planete. Buffon pensoit que l'anneau avoit fait autrefois partie de la planete, et s'en étoit détaché par l'excès de la force centrifuge. D'autres ont dit que, dans la formation des planetes, quelle qu'en ait été la cause, la matiere, qui, retombant tout à la fois, s'est trouvée également éloignée du centre, étoit restée suspendue comme une voûte. Toutes ces explications sont si peu satisfaisantes qu'il est inutile de nous y arrêter.

M. du Séjour le croit composé d'une infinité de zones concentriques, telles que les plus éloignées de Saturne n'achevent pas leurs révolutions dans le même temps que les plus voisines (*Essai sur les disp.* 1776).

Suivant la théorie de l'anneau que M. de la Place a donnée (*Mém.* 1787), il doit y avoir différens anneaux qui soient des solides irréguliers d'une largeur inégale dans les divers points de leur circonférence

avec une double courbure, en sorte que leurs centres de gravité ne coïncident point avec leurs centres de figures; et ces inégalités sont nécessaires pour maintenir l'anneau en équilibre autour de Saturne : ces centres de gravité peuvent être considérés comme autant de satellites qui se meuvent autour du centre de Saturne à des distances dépendantes de l'inégalité des parties de chaque anneau, et avec des vîtesses de rotation égales à celles de leurs anneaux respectifs. Il trouve que la durée de la rotation de la partie intérieure de l'anneau pourroit être d'environ 10 heures, et que sa densité est plus grande que celle de Saturne (*V.* art. 3348).

Il faut en effet que cet anneau soit d'une matiere assez dense, puisqu'on le voit lors même qu'il ne fait avec le rayon solaire qu'un angle de 8′ (*Mém.* 1716, *pag.* 182). C'est pour cela qu'avec le nouveau télescope de M. Herschel, on peut suivre l'anneau dans le temps même où il disparoît pour les instrumens ordinaires. Son attraction se manifeste par rapport aux quatre premiers satellites de Saturne qui tournent à-peu-près dans le même plan que l'anneau, et qui probablement y sont retenus et assujettis par la force même de Saturne et de l'anneau (3073).

3375. On a remarqué aussi sur le globe de Saturne des bandes semblables à celles de Jupiter (3346), mais beaucoup plus foibles. Cassini en observa deux en 1675, 1683, 1696, 1708 et 1719; cependant il n'y apperçut pas la courbure qu'auroient dû avoir ces bandes si elles avoient été adhérentes au globe de Saturne; et Cassini le fils les regardoit comme des especes de nuages éloignés du globe de Saturne (*Elémens d'astron.*, *pag.* 338; *Mém. acad.* 1715, *pag.* 41; *Philos. Trans. abr. vol.* 4, *pag.* 32). M. Herschel a très bien observé ces bandes depuis 1775, et il les attribue aussi à l'atmosphere; quelquefois elles sont inclinées à l'anneau; mais généralement elles lui sont paralleles : il y en a ordinairement deux, quelquefois trois (*Philos. Trans.* 1790). Cette atmosphere lui paroît aussi prouvée par la réfraction que les satellites semblent éprouver en approchant du disque de Saturne.

On trouvera de plus grands détails sur les taches et les apparences de Vénus, de Mars, de Jupiter et de Saturne, dans l'Optique de Smith, où l'auteur a rassemblé la plupart des observations faites à cet égard par le secours des grandes lunettes et des télescopes : on n'a fait jusqu'ici qu'un petit nombre d'observations de cette espece, parceque les grands et bons télescopes sont fort rares et les grandes lunettes fort embarrassantes.

DE LA PLURALITÉ DES MONDES.

3376. La ressemblance que l'on a vue entre les planetes et la Terre dans le cours de ce livre, nous conduit aussi à parler de leur destination : les plus grands philosophes ont pensé qu'elles étoient destinées à recevoir des êtres vivans comme nous, et qu'elles étoient habitées. La pluralité de mondes se trouvoit déja dans les Orphiques ; ces anciennes poésies grecques attribuées à Orphée (Plut. *de Plac. phil.* L. 2, c. 13). Proclus nous a conservé des vers dans lesquels on voit que l'auteur des Orphiques mettoit des montagnes, des hommes et des villes dans la Lune. Les Pythagoriciens, tels que Philolaüs, Nicétas, Heraclide, enseignoient que les astres étoient autant de mondes (*Plut.* L. 2, *c.*, 13 et 30), *Ach. Tat.*, *Isag. ad Ar. phœn.* c. 10 ; *Diog. Laërt. in Emp.*). Plusieurs anciens philosophes admettoient même une infinité de mondes hors de la portée de nos yeux. Epicure, Lucrece (Liv. 2, v. 1069), tous les Epicuriens, étoient du même sentiment ; et Métrodore trouvoit qu'il étoit aussi absurde de ne mettre qu'un seul monde dans le vide infini, que de dire qu'il ne pouvoit croître qu'un seul épi de blé dans une vaste campagne (*Plut.* L. 1., c. 5) : Zénon d'Elée, Anaximenes, Anaximandre, Leucippe, Démocrite, le soutenoient de même. Enfin il y avoit aussi des philosophes qui, en admettant que notre monde étoit unique, donnoient des habitans à la Lune ; tels étoient Anaxagore (*Macrob. Somn. Scip.* L. 1, c. 11), Xénophane (*Cic. Ac. qu.* L. 4); Lucien (Plutarque *de Oracul. defectu; de facie in orbe Lunae*). Voy. *Eusebe* (*Praep. Evang.* L. 15, c. 30, *p.* 839), Stobée (*Eclogae Phys.* L. 1, *pag.* 52). On peut voir une liste très ample des anciens qui ont traité de la pluralité des mondes dans Fabricius (*Bibliot. Gr. tom.* 1, c. 20), et dans le Mémoire de Bonamy (*Acad. des Inscrip. tom.* IX).

Hevelius en paroissoit aussi persuadé en 1647, lorsqu'il parloit de la différence des habitans des hémispheres de la Lune. *Quòd si in Luna dentur res creatae viventes, illae quae habitant in hemisphaerio Lunae patente et aperto Terrae, ratione luminis, sunt melioris conditionis quàm illae quae colunt hemisphaerium Lunae nobis absconditum ac latens* (*Selenog.*, *pag.* 294) ; il les appelle *Selenitae*, et il examine assez au long tous les phénomenes qui s'observent dans leur planete, à l'exemple de Kepler, *Astron. lunaris.* On trouve aussi des détails de cette astronomie comparée à la fin du

du livre de Grégory. Pour les objections on peut voir Riccioly. I, 188, 204.

3377. La pluralité des mondes fut ensuite ornée par Fontenelle, en 1686, de tout l'esprit et l'agrément qu'on peut mettre dans des conjectures physiques. Huygens (mort en 1695), dans son livre intitulé *Cosmotheoros*, publié en 1698, disserta aussi fort au long sur cette matiere. En effet la ressemblance est si parfaite entre la Terre et les autres planetes, que si l'on admet que la Terre ait été faite pour être habitée, on ne peut refuser d'amettre que les planetes le sont également; car s'il y a une connexion dans la nature des êtres entre la Terre et les hommes qui l'habitent, elle doit s'étendre aux planetes.

Nous voyons six planetes autour du Soleil; la Terre est la troisieme : elles tournent toutes les six dans des orbites elliptiques; elles ont un mouvement de rotation comme la Terre; elles ont, comme elle, des taches, des inégalités, des montagnes: il y en a trois qui ont des satellites, et la Terre en est une; Jupiter est aplati comme la Terre; enfin il n'y a pas un seul caractere visible de ressemblance qui ne s'observe réellement entre les planetes et la Terre. Est-il possible de supposer que l'existence des êtres vivans et pensans soit restreinte à la Terre? Sur quoi seroit fondé ce privilege, si ce n'est peut-être sur l'imagination timide de ceux qui ne peuvent s'élever au-delà des objets de leurs sensations immédiates? Lambert croyoit que les cometes mêmes devoient être habitées (*Systéme du monde,* Bouillon 1770). M. de Buffon détermine les époques où chaque planete a pu être habitée et cessera de l'être par le refroidissement (*Suplémens in-4°*, tome II, 1775).

3378. Ce que je dis des planetes qui tournent autour du Soleil, s'étendra naturellement à tous les systêmes planétaires qui environnent les étoiles: chaque étoile étant un corps immobile et lumineux, et ayant une lumiere propre, se compare naturellement au Soleil : on est porté à conclure que si le Soleil sert à retenir et éclairer les planetes qui l'environnent, il en est de même des étoiles.

On ne pense pas que le Soleil et les étoiles puissent être habités à cause du feu : cependant M. Knight, dans un livre où il a entrepris d'expliquer tous les phénomenes de la nature par l'attraction et la répulsion, trouve que le Soleil et les étoiles pourroient bien être des mondes habités, et qu'on y pourroit également geler de froid. *An attempt to demonstrate that all the phœnomena in nature may be explained by two simple active principles, attraction and repulsion, pag.* 58.

3379. Il y a eu des écrivains, aussi timides que religieux, qui ont réprouvé ce systême comme contraire à la religion : c'étoit mal soutenir la gloire du Créateur. Si l'étendue de son ouvrage annonce sa puissance, peut-on en donner une idée plus magnifique et plus sublime? Nous voyons à la vue simple plusieurs milliers d'étoiles; il n'y a aucune région du ciel où une lunette ordinaire n'en fasse voir beaucoup qu'on n'apperçoit point sans ce secours : quand nous passons à de grands télescopes, nous découvrons un nouvel ordre de choses et une autre multitude d'étoiles qu'on ne soupçonnoit pas avec les lunettes : ce que les télescopes d'Herschel ont fait appercevoir dans une partie indiqueroit 75 millions d'étoiles en supposant qu'il y en ait également de tous les côtés. Ainsi plus les instrumens sont parfaits plus cette immensité de nouveaux mondes se multiplie et s'étend : l'imagination perce au-delà du télescope; elle y voit une nouvelle multitude de mondes infiniment plus grande que celle dont nos yeux appercevoient la trace ; elle cherche des bornes, c'est en vain. La seule difficulté qu'on peut avoir sur l'existence des habitans de tant de millions de planetes, c'est l'obscurité des causes finales qu'il est bien difficile d'admettre quand on voit les erreurs où sont tombés les plus grands philosophes, Fermat, Léibnitz, Maupertuis, etc., en voulant employer ces causes finales, ou ces suppositions métaphysiques de prétendus rapports entre les effets que nous connoissons et les causes que nous leur assignons ou les fins pour lesquelles nous les croyons exister.

Si l'on admet généralement sans difficulté la pluralité des mondes, si l'on est si porté à croire les planetes habitées, c'est qu'on regarde la Terre comme ne servant à autre chose qu'à l'habitation des hommes ; d'où l'on infere que les planetes ne serviroient à rien si elles n'étoient pas habitées. Mais, oserai-je le dire? ce raisonnement tient à des idées étroites, peu philosophiques, et en même temps bien présomptueuses de la part des hommes. Que sommes-nous en comparaison de l'univers? en connoissons-nous l'étendue, les propriétés, la destination, les rapports? Et quelques atomes d'une si frêle existence peuvent-ils intéresser l'immensité de ce grand tout, et ajouter quelque chose au mérite, à la perfection et à la grandeur de l'univers? Aussi d'Alembert, dans l'Encyclopédie (art. *Monde*), après avoir examiné si les planetes sont habitées, finit par dire *On n'en sait rien.*

LIVRE VINGT-UNIEME.

DU CALCUL DIFFÉRENTIEL,

ET

DU CALCUL INTÉGRAL, APPLIQUÉS A L'ASTRONOMIE.

PARMI les propriétés des sections coniques et les méthodes du calcul infinitésimal, il y en a que nous employons dans ce livre, et qu'on ne trouveroit pas dans les traités ordinaires : leurs applications à l'astronomie sont d'ailleurs assez multipliées pour mériter d'être rassemblées ici, sur-tout avec des démonstrations plus simples qu'on ne les trouve ailleurs.

3380. Les ouvrages auxquels on pourra recourir pour avoir de plus grands détails relativement aux sections coniques, sont le *Traité analytique des Sections coniques*, de l'Hôpital, Paris 1707 et 1720, *in*-4°; le Traité de la Hire, *in-folio;* l'Analyse démontrée du P. Reynau ; le Traité des Sections coniques du P. Boscovich qui forme le III[e] volume de ses Elémens de Mathématiques (à Rome, 1754, *in*-8°); celui de Robert Simpson, Edimbourg 1750, *in*-4° ; l'*Introduction aux Sections coniques*, par M. Mauduit, *à Paris chez* Desaint, *in*-8°., etc.

3381. LA PARABOLE est une courbe formée à la surface d'un cône par une section parallele au côté du cône ; telle est la courbe PCOD (FIG. 262). Soit son abscisse PQ $= x$, son ordonnée QD $= y$, et p son parametre, l'équation de la parabole est $y^2 = px$. Le point S dans lequell'abscisse PS $= \frac{p}{4}$, s'appelle le foyer, parceque tous les rayons paralleles à l'axe qui tombent dans la concavité de la parabole et qui y sont réfléchis, se réunissent en ce point.

3382. Si l'on tire une tangente DT à la parabole, la sous-tangente TQ est double de l'abscisse PQ, ou $= 2x$. Si l'on mene une perpendiculaire DR à la tangente, la partie QR qu'on appelle la sous-normale, est égale à $\frac{y^2}{2x}$ ou à $\frac{p}{2}$. Je suppose ces propriétés connues.

3383. Le rayon vecteur SD dans une parabole (ou la distance du

foyer à un point de la courbe) est égal à l'abscisse plus le quart du parametre; car $SQ = x - \frac{p}{4}$, $PT = x$, $DQ^2 = px$; dans le triangle DSQ rectangle en Q l'on a $SD = \sqrt{DQ^2 + QS^2} = \sqrt{\left(px + xx - \frac{px}{2} + \frac{p^2}{16}\right)} = x + \frac{p}{4}$. De là il suit que SD est aussi égale à ST et à SR; car $ST = SP + PT = \frac{p}{4} + x$; et $SR = PQ - PS + QR = x - \frac{p}{4} + \frac{p}{2} = x + \frac{p}{4}$. Ainsi le triangle TSD est isoscele, comme nous le supposerons dans l'article suivant.

3384. Le rayon vecteur SD est égal à $\frac{SP}{(\cos.\frac{1}{2}PSD)^2}$, c'est-à-dire que le carré du cosinus de la moitié de l'anomalie vraie (3111) est au carré du rayon comme la distance périhélie est au rayon vecteur. Si du foyer S on abaisse sur la tangente TD une perpendiculaire SX, l'angle TSD sera partagé en deux parties égales, puisque le triangle TSD est isoscele (3383); et parceque SX est parallele à DR, l'angle DRQ est égal à l'ang. XST, c'est-à-dire à la moitié de PSD qui est l'anomalie vraie. Dans le triangle RDT rectangle en D, on aura, à cause de la perpendiculaire DQ, cette proportion, RQ : RD :: RD : RT, ou 2PS : RD :: RD : 2SD; donc 2PS : 2SD :: $RQ^2 : RD^2$; mais RQ : RD :: cos. QRD : 1; donc PS : SD :: cos. QRD^2 : 1 :: cos. $\frac{1}{2}PSD^2$: 1; ou $SD = \frac{SP}{(\cos.\frac{1}{2}PSD)^2}$: nous avons fait usage de cette propriété pour le calcul des cometes (3122).

Nous avons démontré quelques autres propriétés de la parabole, (3107, 3112, 3123, 3127, 3472).

PROPRIÉTES DE L'ELLIPSE.

3385. L'ELLIPSE[a] est de toutes les courbes celle dont les astronomes font le plus d'usage, sur-tout dans les projections des éclipses, dans les calculs des orbites planétaires, et dans ceux de la figure de la Terre. C'est une courbe de forme ovale ou alongée, dans laquelle les carrés des ordonnées sont aux rectangles corres-

[a] Ce mot vient de ἐλλείπω, *deficio*, comme parabole et hyperbole indiquent l'*égalité* et l'*excès*, parceque dans l'équation générale des sections coniques, $y^2 = 2px \mp \frac{pxx}{a}$, le carré de la demi-ordonnée y est plus petit que le rectangle $2px$ de l'abscisse et du parametre entier dans l'ellipse: il est égal ou plus grand suivant qu'on a une parabole ou une hyperbole. Dans cette équation a et b sont les demi-axes, et $p = \frac{bb}{a}$ est le demi-parametre du grand axe.

pondans des segmens du grand axe dans un rapport constant qui est celui du carré du petit axe au carré du grand.

Soit AMPI (FIG. 285) la circonférence d'une ellipse, C le centre, AP le grand axe, CZ la moitié du petit axe, MB l'ordonnée, AB et BP les deux segmens : on a, par la définition ou par la propriété fondamentale de l'ellipse, $MB^2 : AB \cdot BP :: CZ^2 : AC^2$; et faisant $CA = a$, $CZ = b$, $CB = x$, $MB = y$, on aura $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(aa - xx)$; c'est l'équation de l'ellipse, de laquelle il faut partir comme d'une définition. On démontre facilement que cette équation a lieu quand on coupe obliquement un cône ou un cylindre. Quelquefois, au lieu de $\frac{bb}{aa}$ on met $\frac{p}{2a}$, en nommant p une troisieme proportionnelle aux axes $2a$ et $2b$, c'est ce que l'on appelle le parametre du grand axe.

Si l'on compte l'abscisse x, non du centre, mais du sommet A, l'on aura $y^2 = \frac{bb}{aa}(2ax - xx)$.

La propriété de l'ellipse est la même par rapport au petit axe, puisque l'équation $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(aa - xx)$ donne $xx = \frac{aa}{bb}(b^2 - y^2)$ dans laquelle y est une abscisse du petit axe, comme elle étoit ordonnée du grand axe.

3386. On peut tirer de l'équation de l'ellipse la valeur de x en y; car $(a - x)^2 = aa - 2ax + xx$; mais dans l'ellipse $2ax - xx = \frac{aa}{bb}y^2$; donc $(a - x)^2 = aa - \frac{aa}{bb}y^2$, et $a - x = \frac{a}{b}\sqrt{bb - yy}$.

3387. Si l'on décrit sur un même axe HK (planche 32, FIG. 229), et autour du même centre C une ellipse HLK, et un cercle HIK, on a dans le cercle, $DM^2 = HM \cdot MK$; mais par la propriété de l'ellipse, on a $MF^2 : HM \cdot MK :: CO^2 : CI^2$; donc en mettant dans cette proportion à la place de $HM \cdot MK$ sa valeur DM^2, l'on aura $MF^2 : DM^2 :: CO^2 : CI^2$; donc $MF : DM :: CO : CI$; c'est-à-dire que les ordonnées de l'ellipse sont proportionnelles aux ordonnées du cercle; en sorte que si l'on divise en deux parties égales toutes les ordonnées DM, CI, etc. d'un demi-cercle KDIH, la ligne qui passe par tous les points de division est une ellipse KFOH : nous avons fait usage fort souvent de cette proportion constante qu'il y a entre les ordonnées du cercle et celles de l'ellipse (art. 1240, 1814, 2248, 3194, etc.).

3388. Cette propriété de l'ellipse fait voir que tout cercle projeté sur un plan qui lui est incliné y produit une ellipse, comme nous l'avions déja remarqué (1814). La considération de cette projection fournit un moyen bien simple de démontrer que la propriété

des axes (3385) a lieu aussi par raport à deux diametres de l'ellipse. Soit LQKG (planche XXXIII, FIG. 239) une ellipse formée par la projection du cercle LFOK ; le point Y est projeté en N, le point X en S, le point O en s, le point B en M, le point F en Q, toujours sur une ordonnée perpendiculaire au grand axe. Les lignes MEN, QEq, dont l'une est parallele aux ordonnées de l'autre, sont des diametres de l'ellipse ; et il faut démontrer que $Ss^2 : Qq^2 : NV \times VM : NE \cdot EM$. En effet toutes les ordonnées Ss, Qq de l'ellipse, qui sont paralleles entre elles, sont plus petites que les ordonnées XO, Ff du cercle dont elles sont les projections, et plus petites dans un rapport constant : les segmens NV, VM, NE, EM dans l'ellipse sont plus petits que les segmens YZ, ZB, YE, EB, dont ils sont les projections, et plus petits dans uu rapport constant, puisque les lignes de l'ellipse paralleles entre elles sont toutes également inclinées sur le plan du cercle projeté, et que des lignes également inclinées ont des projections qui sont dans le même rapport que celui du cosinus de l'inclinaison au rayon (1812). Mais dans le cercle les carrés des ordonnées sont égaux aux produits des segmens; donc dans l'ellipse ils sont dans un rapport constant. Si, par exemple, les carrés des ordonnées elliptiques sont la moitié des carrés des ordonnées circulaires, et que les produits des segmens dans l'ellipse soient le tiers de ceux du cercle, ces produits des segmens elliptiques seront les deux tiers des carrés des ordonnées de l'ellipse.

3389. Il suit encore de là que si deux lignes MN et AR se coupent dans l'ellipse (FIG. 288), et qu'elles soient paralleles à deux diametres quelconques GF, BD, l'on aura cette proportion, $AP \cdot PR : MP \cdot PN :: BQ \cdot QD : GQ \cdot QF$ ou $:: BQ^2 : GQ^2$. En effet, dans le cercle dont cette ellipse est la projection, les antécédens de la proportion sont égaux aux conséquens ; c'est-à-dire $AP \cdot PR = MP \cdot PN$; mais ils sont, par exemple, la moitié des termes suivans BQ^2. Je suppose que, par la projection du cercle en ellipse, les lignes AP, PR, BQ aient diminué de moitié, et que les lignes MP, PN et GQ, situées dans l'autre sens, aient diminué et soient réduites au quart, le rapport étant le même pour les lignes paralleles entre elles, cela n'empêchera pas que $AP \cdot PR$ ne soit toujours la moitié BQ^2 et que $MP \cdot PN$ ne soit toujours la moitié de GQ^2, comme dans le cercle : donc on aura $AP \cdot PR : MP \cdot PN :: BQ^2 : GQ^2$. On en trouvera une démonstration anlytique, mais fort longue, dans l'Hôpital, art. 165.

3390. LA SOUS-TANGENTE QR de l'ellipse (FIG. 287) est $= \frac{aa-xx}{x}$, comme dans le cercle, en comptant les abscisses du centre.

En effet, concevez un cercle décrit sur le rayon CA, mais incliné au plan de la figure, en sorte que sa projection orthographique soit une ellipse (1814); si l'on fait tourner le triangle formé par la tangente et l'ordonnée du cercle autour de la sous-tangente RQ, la projection de ce triangle formera le triangle RQF de l'ellipse; la tangente du cercle tournant circulairement autour de RQ et du point R comme centre, les points RQ seront constans pendant toute la durée du mouvement qui produit les différentes inclinaisons du cercle et les différentes ellipses AFB; ainsi la ligne FQ, projection de la tangente du cercle, est la tangente de l'ellipse; donc elles aboutissent l'une et l'autre au même point Q du grand axe: mais dans le cercle, on a $x : y :: y :$ RQ, ou RQ$=\frac{aa-xx}{x}$; donc c'est aussi la valeur de la sous-tangente dans l'ellipse.

3391. Corollaires. La distance CQ du centre à la tangente de l'ellipse est$=\frac{aa}{x}$, puisqu'elle est la somme de CR$=x$, et de RQ $=\frac{aa}{x}-x$; l'on a donc CR : CA :: CA : CQ, ou CL : CA :: CA : CM, pour une autre tangente DM. L'équation étant la même par rapport au petit axe de l'ellipse (3385), l'on a, pour le petit axe, CG : CB :: CB : CX; et CX . CG$=$CB^2.

3392. Si la ligne FNH est perpendiculaire en F à la tangente QF TX, et en H au diametre DE, le produit de FH par FN est égal au carré du demi petit axe; car, ayant tiré la perpendiculaire CT, on aura des triangles semblables CTX, FNR; donc CT : CX :: FR : FN, ou FH : CX :: CG : FN; ainsi FH . FN$=$CX . CG$=$CB^2.

3393. Le point Q de l'ellipse (planche XXXIII, fig. 239), étant la projection du point F du cercle circonscrit, la tangente de l'ellipse en Q est la projection de celle du cercle en F (3390); la tangente à l'ellipse en Q est parallele au diametre conjugué MN; d'où il suit que la tangente en F est parallele au rayon EY dont EN est la projection: ainsi le rayon EF fait un angle droit avec le rayon EY, ou avec le rayon EB. J'ai fait usage de cette propriété pour l'aberration (2862, 2872).

3394. Le parallélogramme fait sur deux diametres conjugués est constant; ou, ce qui revient au même, le produit du demi-diametre EM, et de la perpendiculaire QH, abaissée de l'extrémité de son demi-diametre conjugué EQ, est égal au rectangle ou au produit des demi-axes. Car puisque l'angle FEB est toujours droit, le carré formé sur FE et EB est constant, quelle que soit la situation des points F et B, qui ont leur projection en Q et en M: le parallélogramme formé sur

QE et EM est la projection de ce carré; la surface de cette projection est constante, parceque de quelque maniere qu'une figure soit placée dans un plan, sa projection sur un autre plan d'une inclinaison donnée est toujours dans le même rapport avec la figure projetée, quoique la projection change de forme. On comprendra facilement la vérité de ce principe, si l'on divise, dans tous les cas, la figure primitive, ou celle qui est projetée, par exemple, le carré fait sur FEB, en élémens ou lignes perpendiculaires à la commune section des deux plans, ou à LE; la somme de ces élémens sera toujours constante, puisque c'est la surface du carré; chaque élément a pour projection une ligne plus petite dans le rapport du cosinus de l'inclinaison au sinus total (1812); donc la somme qui en résulte sera dans tous les cas une surface plus petite dans ce même rapport que la surface donnée. Ainsi le carré fait sur EF et EB, ayant pour projection le parallélogramme fait sur les diametres conjugués QE, EM, ce parallélogramme, ou le produit de EM par QH, est une quantité constante, quel que soit le point Q. Mais lorsque le point Q est en L, et le point M en G, ce parallélogramme est le rectangle des deux demi-axes, $=ab$, donc EM . QH $=ab$. On le démontre encore très simplement en faisant deux parallélogrammes infiniment proches; car on voit clairement que l'un a une portion de plus que l'autre, et une de moins, et qu'elles sont visiblement égales. J'ai fait usage de ce théorême pour le calcul de l'aberration (2863).

3395. LA SOMME *des carrés de deux diametres conjugués est constante,* c'est-à-dire toujours égale à la somme des carrés des deux axes. Si l'on conçoit les points Q et M de l'ellipse comme étant les projections des points F et B du cercle, l'élévation perpendiculaire du point F du cercle au-dessus du plan de l'ellipse sera le côté d'un triangle rectangle dont FD, ou le sinus de l'arc FL, est l'hypoténuse, et QD l'autre côté; le carré de cette élévation sera donc égal au carré de FD moins le carré de QD, qui est à FD dans le même rapport à tous les points de l'ellipse; donc le carré de cette élévation sera comme le carré du sinus de FL. Puisque FB est un quart-de-cercle (3393), l'abaissement du point B au-dessous de la figure sera comme le carré du cosinus de LF. Donc la somme des carrés de l'abaissement et de l'élévation sera constante. Mais si l'on considere le triangle FEQ, formé par l'élévation perpendiculaire FQ avec EQ et l'hypoténuse EF, et de même le triangle EBM, on verra que les carrés des hypoténuses FE et EB sont constans, ainsi que la somme des carrés de FQ et BM; donc aussi la somme des carrés des côtés EQ, EM est constante, c'est-à-dire par-tout égale à la somme des carrés des demi-axes.

3396,

3396. Corollaire. Par la même raison, la somme des carrés des abscisses EC, ED, qui répondent aux diametres conjugués, est constante, puisque l'une est le cosinus de LB, et l'autre le sinus; et que le carré du sinus, plus celui du cosinus, fait toujours le carré du rayon; donc $EC^2+ED^2=EL^2$.

3397. Lorsque l'abscisse EV (fig. 238) est le sinus d'un nombre de degrés pris sur le cercle circonscrit CD, l'ordonnée SV est le cosinus d'un arc semblable, ou de pareil nombre de degrés pris sur le cercle inscrit ABF. Car supposons CD de 50° ainsi que AT; l'abscisse EV= DG est le sinus de 50° dans le grand cercle, DV en est le cosinus; mais VS : DV :: AE : EC (3387); donc VS ou TR est le cosinus de 50° pour le petit cercle. Donc si l'abscisse EV est le sinus de 50° dans le grand cercle, l'ordonnée SV en sera le cosinus dans le petit cercle. Nous avons fait usage de cette propriété dans les articles 1830, 2793, 2855.

3398. Le secteur elliptique GSVG (planche xxxviii, fig. 266) est au secteur circulaire GSFG comme le petit axe de l'ellipse est au grand axe. Car toutes les ordonnées de l'ellipse sont à celles qui leur répondent dans le cercle en raison constante, et comme le petit axe est au grand axe (3387); ainsi le segment elliptique GBV, qui est composé d'une infinité d'ordonnées à l'ellipse, sera au segment GBF composé d'une infinité d'ordonnées au cercle, dans ce même rapport du petit axe au grand. Les triangles rectilignes BSV, BSF, sont entre eux comme leurs bases BV, BF, c'est-à-dire encore comme le petit axe est au grand; donc les sommes, ou les secteurs entiers GSV, GSF, composés chacun d'un triangle et d'un segment, sont encore comme le petit axe est au grand axe de l'ellipse.

3399. La même chose doit s'étendre à l'ellipse entiere, comme à chacune de ses parties; ainsi la surface d'une ellipse est à celle du cercle circonscrit comme le petit axe est au grand. Nous avons supposé cette vérité (1239).

3400. Si l'on appelle *a* et *b* les demi-axes de l'ellipse, et *c* la valeur de la circonférence d'un cercle dont le rayon est 1, (c'est-à-dire à-peu-près le nombre 6, 28,)† (art. 3467), la surface de l'ellipse sera $\frac{cba}{2}$, car la circonférence décrite sur le demi-grand axe est alors ca; la surface est $\frac{ca^2}{2}$; celle de l'ellipse est à celle du cercle comme b est à a; donc celle de l'ellipse est $\frac{ca^2}{2} \cdot \frac{b}{a}$ ou $\frac{cab}{2}$.

† dont $c = 2\pi$

3401. La surface d'une ellipse est donc égale à celle d'un cercle dont le diametre est moyen proportionnel entre les deux axes de l'el-

lipse; car le rayon de ce cercle seroit $\sqrt{ab}$, et sa surface $\frac{c}{2}\sqrt{ab}$. $\sqrt{ab}$ ou $\frac{cab}{2}$, égal à la surface de l'ellipse. Nous en avons fait usage (1258, 3477).

3402. Si de l'extrémité Z du petit axe (FIG. 285), avec un rayon ZS égal au demi grand axe CA, l'on décrit un arc de cercle, il coupera le grand axe en deux points S et F, qu'on appelle les foyers; supposant $CZ = b$, $CS = e$, CA et $SZ = a$, l'on aura $aa - ee = bb$. | $e^2 = a^2 - b^2$ |

3403. Le rayon vecteur SM est égal à $\frac{PB \cdot SA}{CA} - SB$, c'est-à-dire $= \frac{(a+x)(a+e) - a(e+x)}{a}$, ou $\frac{a^2 + ex}{a}$. Supposons $SM = a + z$; on a $SM^2 = SB^2 + BM^2$, ou $BM^2 = y^2 = a^2 + zaz + zz - e^2 - 2ex - xx = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$ ou $\frac{aa-ee}{aa}(aa - xx)$; d'où l'on tire $zz + 2az = \frac{2a^2ex + e^2x^2}{a^2}$; ajoutant de chaque côté a^2, et tirant la racine, on a $z + a = \frac{a^2 + ex}{a}$ et $z = \frac{ex}{a}$; donc $SM = a + \frac{ex}{a}$, ou, ce qui revient au même, comme on l'a vu au commencement de cet article, $SM = \frac{PB \cdot SA}{CA} - SB$. Ceci se rapporte à l'article 1240.

3404. On peut dire également que $SM = PS + \frac{CS \cdot PB}{CA} = a - x + \frac{e(a+x)}{a} = a + \frac{ex}{a}$. Nous en avons fait usage (3194).

3405. Si l'on fait $a = 1$, l'on aura l'expression du rayon vecteur $1 + ex$; et comme alors x est le cosinus de l'anomalie excentrique, on aura $r = 1 + e \cos. an \cdot exc.$

3406. De là on peut conclure que dans l'ellipse on a $SM + FM = 2a$, propriété connue de l'ellipse. Pour cela il suffit de considérer que si le point M passoit en n de l'autre côté du centre, et à la même distance, le second terme $\frac{ex}{a}$ changeroit de signe, et SM auroit alors la valeur que FM a dans la figure, mais SM seroit alors $a - \frac{ex}{a}$; c'est donc la valeur de FM: ajoutant cette quantité avec SM, qui est $a + \frac{ex}{a}$, on trouve $2a$ pour la somme des deux lignes SM et MF.

3407. Si l'on tire au point V un rayon vecteur SV, un diametre VCp, et son diametre conjugué CI, ce dernier intercepte sur le rayon vecteur SV une partie Vq égale à AC. En effet, ayant tiré la tangente Vu, Su : Cu :: SV : qV, ou $e + \frac{a^2}{x}$ (3391) : $\frac{a^2}{x}$ :: $\frac{a^2 + ex}{a}$ (3403) : qV, d'où l'on tire $q\text{V} = a$, ou à la moitié du grand axe.

3408. La sous-normale RN (FIG. 287) est égale à $\frac{bbx}{a^2}$; car dans le

triangle NFQ rectangle en F, QR : RF :: RF : RN, ou $\frac{aa - xx}{x}$: $\frac{b}{a}\sqrt{aa-xx}$ :: $\frac{b}{a}\sqrt{aa-xx}$: $\frac{bbx}{a^2}$.

Sur le petit axe de l'ellipse, la sous-normale seroit $\frac{aa}{bb}x$, les propriétés étant pareilles pour les deux axes. Nous en ferons usage (3752).

La normale FN se trouvera par le moyen du triangle rectangle NFR; car $FN = \sqrt{FR^2 + RN^2} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(aa - xx) + \frac{b^4 x^2}{a^4}}$, ce qui revient à $\frac{b}{a^2} = \frac{b}{4}\sqrt{}(a^4 - e^2 x^2 \sqrt{a^4 - a^2 xx + b^2 xx} = \frac{b}{a}\sqrt{a^4 - e^2 x^2}$.

3409. Si de l'extrémité F d'un diametre FC l'on abaisse une perpendiculaire FH sur son diametre conjugué CD, et que l'on nomme m et n le sinus et le cosinus de l'angle DCL, on aura $CH \cdot FH = mn(aa - bb)$. Car $RN = \frac{bbx}{aa}$ (3408); donc $CN = x - \frac{bbx}{aa}$. Mais $CQ = \frac{aa}{x}$ (3391); donc $CN \cdot CQ = aa - bb$. Dans le triangle CNH, rectangle en H, CN : CH :: 1 : sin. CNH, ou au cosinus n de l'angle HCN; de même CQ : CT ou FH :: 1 : m; ainsi l'on a ces deux proportions; 1 : n :: CN : CH, et 1 : m :: CQ : FH; multipliant terme à terme, 1 : mn :: $CN \cdot CQ$ (ou $aa - bb$) : $CH \cdot FH$; donc enfin $CH \cdot FH = mn(aa - bb)$ art. 3704.

3410. Le rayon osculateur ou le rayon de la développée dans une ellipse est égal au cube de la normale divisé par le quart du carré du parametre. Soit FP (fig. 286) le diametre du cercle FSP qui touche l'ellipse en F et se confond avec elle plus qu'aucun autre cercle; FCV le diametre de l'ellipse qui passe au point de contact, et qui est coupé en S par le cercle osculateur; supposons que DFM soit un arc infiniment petit, ou supposé assez petit pour être commun au cercle et à l'ellipse; cette supposition va nous servir à trouver la valeur du diametre FP. Ce cercle a une ordonnée infiniment petite, commune avec l'ellipse et répondant à une même abscisse FO; et il touche l'ellipse au point F sans la couper; il a au moins trois points communs avec l'ellipse; tout cercle plus grand ou plus petit sortiroit de l'ellipse ou rentreroit au dedans. Par la propriété des cordes qui se coupent dans un cercle, on a $MO \cdot OD = FO \cdot OS$; et parceque $MO = OD$, l'ordonnée de l'ellipse étant coupée en deux parties égales par le diametre FC, $MO^2 = FO \cdot OS$: mais par la propriété des diametres de l'ellipse $MO \cdot OD$ ou $FO \cdot OS$: $FO \cdot OV$ :: CE^2 : CF^2 (3388); donc OS : OV :: CE^2 : CF^2; ou bien FS : FV ou 2CF :: CE^2 : CF^2; donc $FS = \frac{2CE^2}{CF}$, c'est-à-dire au parametre du dia-

metre FCV (3385) ; ainsi le cercle osculateur intercepte toujours sur le diametre FV de l'ellipse une partie FS égale au parametre de ce diametre.

3411. Pour trouver la valeur de FP l'on considérera que FH : FC :: FS : FP; donc $FP = \frac{2CE^2}{FH}$: mais $CE^2 = \frac{a^2b^2}{FH^2}$ (3394) ; donc $\frac{1}{2}FP = \frac{a^2b^2}{FH^3}$: or $FH^3 = \frac{b^6}{FN^3}$ (3392) ; donc $\frac{1}{2}FP = \frac{a^2}{b^4}FN^3$. Le parametre $p = \frac{2b^2}{a}$, ou $p^2 = \frac{4b^4}{a^2}$; donc $\frac{1}{2}FP = \frac{4FN^3}{p^2}$; c'est-à-dire supposant $a = 1$, $\frac{1}{2}FP = \frac{4b^3}{pp}\sqrt{1 - xx + bbxx}^3$ (3408), et mettant $4b^4$ à la place de pp, $\frac{1}{b}(1 - xx + bbxx)^{\frac{3}{2}}$: nous en avons fait usage (2686).

3412. L'équation de l'ellipse, entre le rayon vecteur et l'anomalie vraie (1234), est celle dont on fait usage dans les calculs de l'attraction (3621, 3654). Dans une ellipse dont le demi-axe est a, l'anomalie MSA $= u$, le rayon vecteur SM (FIG. 285) $= r$, l'excentricité CS $= e$, le demi-parametre $= p = \frac{bb}{a} = \frac{aa - ee}{a}$, l'on a $\frac{p}{r} = \frac{a - e.\cos.u}{a}$. En effet $r = \frac{a^2 + ex}{a}$ (3403), $a^2 = ar - ex$; substituant cette valeur dans $\frac{aa - ee}{a}$, on a $p = \frac{ar - ex - e^2}{a} = \frac{ar - e(e + x)}{a}$. Or SB $=$ SM $\cdot$ cos. MSB, ou $e + x = r \cos. u$; donc $p = \frac{ar - er.\cos.u}{a}$ et $\frac{p}{r} = \frac{a - e.\cos.u}{a}$, expression dans laquelle le parametre $p = \frac{aa - ee}{a}$. Si l'on fait $a = 1$, l'on aura $\frac{p}{r} = 1 - e \cos. u$, ou $r = \frac{p}{1 - e.\cos.u}$; c'est le rayon vecteur r en parties de la distance moyenne a qui est prise pour unité.

3413. Si l'on suppose $u = 90°$, on aura $r = p$, c'est-à-dire qu'alors le rayon vecteur est égal au demi-parametre de l'ellipse ; ce qui est connu d'ailleurs, puisque l'ordonnée entiere au foyer d'une section conique est toujours égale au parametre.

3414. Si l'on compte le mouvement de la planete d'un autre point qui soit plus éloigné que l'apside d'une quantité m, l'anomalie vraie au lieu d'être u sera $u - m$; et il faudra mettre $u - m$ dans l'équation à la place de u : l'on trouvera (3812), $\frac{p}{r} = 1 - e \cos. m \times \cos. u - \sin. m \sin. u$, et faisant les constantes $e \cos. m = h$ et $e \times \sin. m = g$, on aura $\frac{p}{r} = 1 - h \cos. u - g \sin. u$; c'est la forme sous laquelle on l'emploie dans le calcul des attractions (3617), l'apside étant immobile.

3415. Si dans le même temps que la planete décrit un angle u la ligne des apsides avançoit elle-même, c'est-à-dire si l'apside étoit mobile, de façon que le mouvement de la planete par rapport à

son apside fût mu, celui de l'apside seroit $u - mu$, ou $(1 - m)u$; l'anomalie vraie de la planete dans son ellipse mobile seroit mu, et l'équation de l'ellipse mobile, $\frac{p}{r} = 1 - e \cos. mu$; on en fera usage (3675).

3416. La section oblique d'un sphéroïde elliptique applati, tel que la Terre, est toujours une ellipse. Soit GF (fig. 288) le diametre de l'équateur, AR le diametre de la section oblique AOR dont on cherche la propriété, BD un diametre de l'ellipse tiré parallèlement à la section AR, MN le diametre d'un parallele MON relevé perpendiculairement au-dessus de MN, PO une ordonnée commune au cercle MON et à la courbe ROA. Par la propriété du cercle l'on a $MP \cdot PN = PO^2$; mais par la propriété de l'ellipse GBF, $AP \cdot PR : MP \cdot PN :: QD^2 : GQ^2$ (3389); donc $AP \cdot PR : PO^2 :: QD^2 : GQ^2$, c'est-à-dire en raison constante quelle que soit la situation du point P sur la ligne AR; donc la courbe AOR est une ellipse, et cette ellipse est semblale à celle qui passe par BD, puisqu'on y trouveroit également le rapport de QD^2 à GQ^2. Cette proposition est nécessaire pour la figure de la Terre (3748).

Cette proposition a lieu pour les cas même où le plan de section n'est point parallele à l'axe ni perpendiculaire au plan de l'équateur; mais la proposition suivante est limitée à un plan de section parallele au petit axe du sphéroïde ou à l'axe du monde.

3417. La section d'un sphéroïde applati, tel que la Terre, parallèlement au méridien est une ellipse semblable au méridien. Car si la ligne AR devient perpendiculaire à GQF, le rapport de GQ^2 à DQ^2 deviendra celui du carré du grand axe au carré du petit axe; dans la section AOR, lorsque AR sera parallele à l'axe du monde, le rapport des axes sera le même que dans l'ellipse GDF du méridien. Nous en ferons usage (3706, 3760).

3418. De là il suit que la section d'un sphéroïde elliptique est toujours semblable à l'ellipse du méridien, pourvu que le plan de cette section soit perpendiculaire au plan de l'équateur ou parallele à l'axe; car alors il sera toujours parallele à quelqu'un des méridiens; c'est ce que suppose Clairaut (Figure de la Terre, *pag.* 181), et ce que je supposerai (3706).

De l'Arithmétique des Infinis, ou du Calcul des Suites.

3419. Le carré du binome $a + b$ est $aa + 2ab + bb$, son cube est $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; et si l'on continue à chercher les puissances

de ce binome en multipliant continuellement par $a+b$, on remarquera bientôt que les puissances de a vont toujours en diminuant d'une unité, a^3, a^2, etc., que celles de b vont toujours en augmentant, b, b^2, b^3, etc.; que les coëfficiens des différens termes sont les lignes verticales du triangle arithmétique, dont Pascal donna la description en 1654.

3420. *Regle générale pour élever un binome* a+b *à une puissance quelconque* m. On mettra d'abord les puissances de a, ou du premier terme, dans cet ordre, a^m, a^{m-1}, a^{m-2}, etc., en diminuant toujours l'exposant d'une unité à chaque terme; 2°. l'on écrira les puissances de b ou du second terme dans cet ordre, 1, b, b^2, b^3, etc. en augmentant toujours l'exposant d'une unité; 3°. on écrira les coëfficiens dans cet ordre, 1, m, $\frac{m.(m-1)}{1.2}$, $\frac{m.(m-1).(m-2)}{1.2.3}$, $\frac{m(m-1).(m-2).(m-3)}{1.2.3.4}$, et ainsi de suite.

3421. Ce théorême de Newton est d'un usage immense dans tous les calculs de l'attraction, et il faut avoir la regle suivante très familiere, quand on veut s'occuper de pareilles recherches : $(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m.(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2 + \frac{m.(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^{m-3}b^3$, etc.

3422. Pour exprimer la quantité $\frac{1}{1+2a}$ (2691), dans laquelle a est une fraction très petite, on considérera d'abord en général cette quantité comme si c'étoit $1+2a$ élevé à la puissance -1, suivant le calcul des exposans (Wallis, *Arithmet. infinit.* 1655): si l'on y applique la formule du binome, on trouvera $1-2a$, en négligeant les termes suivans. On auroit la même chose en faisant une division à la maniere ordinaire, de 1 par $1+2a$.

3423. On trouve, par les mêmes principes, que la différence des carrés est double de celle des racines, quand la différence est fort petite (2686); car le carré de $1+a$ est $1+2a$, en négligeant a^2, qui est le carré d'une fraction très petite, et par conséquent encore plus négligeable : ainsi le carré de 1 et celui de $1+a$ different de $2a$, tandis que les racines different seulement de la quantité a.

3424. Pour élever à la puissance $-\frac{3}{2}$ le binome $1+(mm-1)ss$, dont nous avons fait usage (2686), on emploie la formule 3421 ; les puissances du premier terme sont toutes égales à 1, celles du second terme sont $(mm-1)ss$, $(mm-1)^2s^4$, etc.; les coëfficiens sont 1, $-\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}\times-\frac{5}{2}\times\frac{1}{2}$, ou $+\frac{15}{8}$, etc.; donc le binome $(1+(mm-1)ss)^{-\frac{3}{2}} = 1-\frac{3}{2}(mm-1)ss+\frac{15}{8}(m^2-1)^2s^4$, etc.; et si, à la place de $mm-1$, on met $-2a$, on aura $1+3ass$, etc.

3425. Cette regle générale pour l'élévation des puissances nous sert à exprimer le côté d'un triangle rectiligne dont on connoît les

deux autres côtés et l'angle compris, ce qui est d'un grand usage pour le calcul des forces attractives des planetes (3644). Soit le triangle RTS (FIG. 290), dont on connoît le côté $ST=r$, le côté $SR=f$, et l'angle compris $RST=t$; on demande le côté $RT=s$, et la valeur de $\frac{1}{s^3}$. Je suppose d'abord que $RT=s=\sqrt{f^2-2fr\cos. t+r^2}$ (3849), $s^3=(f^2+r^2-2fr\cos. t)^{+\frac{3}{2}}$, et $\frac{1}{s^3}=(f^2+r^2-2fr\cos. t)^{-\frac{3}{2}}$, qu'il faut développer en une suite de termes où il n'y ait que cos. t, $2t$, $3t$, etc. Voici une maniere de le faire, adaptée aux usages de l'attraction, mais dans laquelle je suppose f beaucoup plus grand que r (*Mém. acad.* 1758.)

3426. Pour réduire ce trinome à la formule générale (3421), soit $2fr\cos. t-r^2=a$, en sorte que $\frac{1}{s^3}=(f^2-a)^{-\frac{3}{2}}$; et, en élevant f^2-a à la puissance $-\frac{3}{2}$, l'on aura, par la regle générale, $\frac{1}{s^3}=\frac{1}{f^3}+\frac{3a}{2f^5}+\frac{15a^2}{8f^7}+\frac{35a^3}{16f^9}+\frac{315a^4}{128f^{11}}$, etc. On substituera pour a, a^2, a^3, leurs valeurs; d'abord pour a la valeur $2fr\cos. t-r^2$; pour a^2 l'on aura $4f^2r^2\cos. t^2-4fr^3\cos. t+r^4$; mais $\cos. t^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos. 2t$ (3820); ainsi, $a^2=2f^2r^2+2f^2r^2\cos. 2t-4fr^3\cos. t+r^4$. De même $a^3=8f^3r^3\cos. t^3-12f^2r^4\cos. t^2+6fr^5\cos. t-r^6$; substituant la valeur de $\cos. t^3=\frac{3}{4}\cos. t+\frac{1}{4}\cos. 3t$ (3831), et celle de $\cos. t^2$, on aura $a^3=6f^3r^3\cos. t+2f^3r^3\cos. 3t-6f^2r^4-6f^2r^4\cos. 2t+6fr^5\cos. t-r^6$. L'on trouvera aussi $a^4=16f^4r^4\cos. t^4-32f^3r^5\cos. t^3+24f^2r^6\cos. t^2-8fr^7\cos. t+r^8$; mais $\cos. t^4=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos. 2t+\frac{1}{8}\cos. 4t$ (3832); substituant cette valeur, aussi bien que celles de $\cos. t^3$ et $\cos. t^2$, l'on a $a^4=6f^4r^4+8f^4r^4\cos. 2t+2f^4r^4\cos. 4t-24f^3r^5\cos. t$. Je néglige les cinq autres termes, qui sont plus petits, parcequ'ils sont multipliés par de plus hautes puissances de r, et de moindres puissances de f, et que je suppose f beaucoup plus grand que r.

Ces valeurs de a, a^2, etc., substituées dans la série $\frac{1}{f^3}+\frac{3a}{2f^5}$, etc. donnent enfin $\frac{1}{s^3}=\frac{1}{f^3}+\frac{9r^2}{4f^5}+\frac{225r^4}{64f^7}+\left(\frac{3r}{f^4}+\frac{45r^3}{8f^6}\right)\cos. t+\left(\frac{15r^2}{4f^5}+\frac{105r^4}{16f^7}\right)\cos. 2t+\frac{35r^3}{8f^6}\cos. 3t+\frac{315}{64}\cdot\frac{r^4}{f^7}\cos. 4t$, en négligeant les termes où f est au-dessus de la septieme puissance.

Les coëfficiens, tels que $\frac{9}{4}$, $\frac{225}{64}$, etc., sont formés de l'addition des différentes fractions qu'il faut ajouter ou soustraire suivant les signes; ainsi, parmi les termes $\frac{r^4}{f^7}$, on trouvera $\frac{15}{8}-\frac{105}{8}+\frac{6\cdot315}{128}$, qui font $\frac{120}{64}-\frac{840}{64}+\frac{945}{64}=\frac{225}{64}$, et ainsi des autres. Si l'on poussoit plus loin les ter-

mes où se trouve cos. $4t$, on auroit des termes divisés par f^9, qui deviennent beaucoup moindres, pourvu qu'on suppose que f soit 5 à 6 fois plus grand que r, comme dans l'article 3644, où nous en ferons usage.

3427. LE RETOUR DES SUITES est la méthode qui enseigne à dégager l'inconnue d'une suite infinie. Je suppose qu'on ait une série $z=ay+by^2+cy^3+ey^4$, etc.; on peut en trouver la racine y par la méthode des indéterminées. Supposons la quantité $y=hz+iz^2+kz^3+lz^4$, etc.; on prendra le carré et le cube de cette série, en négligeant les puissances qui sont au-dessus de z^6; on les substituera dans $z=ay+by^2+cy^3$, etc., et l'on aura une nouvelle série, composée de z et de ses puissances: tous les termes de cette série qui renfermeront z sont égaux au coëfficient indéterminé h; tous ceux qui renferment z^2 sont égaux à i, etc.; ce qui donnera autant d'équations qu'il y a de coëfficiens indéterminés dans $hz+iz^2$, etc.; l'on en déduira la valeur de ces coëfficiens, et l'on aura cette valeur $y=\frac{z}{a}-\frac{bz^2}{a^3}+\frac{2b^2-ac}{a^5}z^3+\frac{5abc-5b^3-a^2e}{a^7}z^4+\frac{14b^4+6a^2be-21ab^2c+3a^2c^2-a^3f}{a^9}z^5$, etc. Je n'entre pas dans le détail de ce calcul; on le peut voir dans les *Élémens de Mathémat.* de Wolf, dans ceux de M. l'abbé Marie, et dans la *Trigonométrie* de M. Cagnoli, qui en donne une explication très détaillée, *p.* 48. Je l'indique ici pour servir à trouver les sinus (3458).

3428. RÉSOUDRE L'ÉQUATION $x=u+a$ sin. mu; ou trouver la valeur d'un arc u en x, dans la supposition que a est une fraction assez petite, comme $\frac{1}{10}$, ou 0, 1.

SOLUTION. Supposons, pour une premiere approximation, que u soit égale à l'arc x, puisqu'ils different peu l'un de l'autre, le terme a sin. mu étant très petit, cette supposition nous donnera une valeur de u; et substituant cette valeur de u dans le petit terme a sin. mu, il en résultera une erreur encore plus petite dans la valeur de u, puisqu'elle ne sera que la dixieme partie du petit terme a sin. mu: en supposant donc $x=u$, on a $x=u+a$ sin. mx, ou $u=x-a$ sin. mx; $mu=mx-ma$ sin. mx; donc, mettant cette valeur de mu dans l'équation donnée, on a $u=x-a$ sin. $(mx-ma$ sin. $mx)$. Pour rendre ce second terme plus simple, on y substituera la valeur (3811), sin. mx cos. $(ma$ sin. $mx)$ — cos. mx sin. $(ma$ sin. $mx)$; on supposera aussi le cos. du petit arc ma sin. mx égal à l'unité, et le sinus égal à l'arc lui-même; car il n'en differe que d'une quantité où entre le cube de la petite fraction a (3458); de sorte que si $a=\frac{1}{10}$,

on

on a $a^3 = \frac{1}{1000}$, ce qui rend la différence de cet arc à son sinus mille fois plus petite que l'arc : nous pouvons donc supposer que le sinus est égal à l'arc lui-même, et, au lieu de sin. (ma sin. mx), mettre seulement l'arc ma sin. mx: en faisant ces deux substitutions, nous aurons $u = x - a$ sin. $mx + ma^2$ cos. mx sin. mx; donc $u = x - a$ sin. $mx + \frac{ma^2}{2}$ sin. $2\,mx$ (3817).

3429. Cette seconde valeur de u en x approche encore plus de la vérité, puisqu'on n'y a pas même négligé le terme qui renferme a^2, ou qui est dix fois plus petit que celui qui renferme seulement a. Si l'on substituoit cette valeur de u et du sinus de mu dans le second terme de l'équation donnée $x = u + a$ sin. mu, on auroit une troisieme approximation dans laquelle se trouveroient même les termes qui renferment a^3, ou le cube de la petite fraction a. On trouveroit alors $u = x - a\left(1 - \frac{m^2 a^2}{8}\right)$ sin. $mx + \frac{1}{2} a^2 m$ sin. $2\,mx - \frac{3}{8} a^3 m^2$ sin. $3\,mx$ (Clairaut, *Théorie de la Lune*, art. XXXI). On trouve dans le même livre l'équation plus composée $x = u + a$ sin. $mu + b$ sin. $pu + c$ sin. qu, et elle est nécessaire pour la théorie de la Lune, où il y a trois termes assez considérables (3637). On peut voir de plus grands détails sur cette espece d'équations dans les *Mém. de* 1760, à l'occasion de mes calculs sur les inégalités de Vénus.

Du Calcul différentiel et intégral.

3430. L'usage que nous ferons dans ce livre-ci, et dans le suivant, du calcul des infiniment petits, exigeroit que nous en donnassions ici quelques notions, comme nous l'avions fait dans la premiere édition de cet ouvrage ; mais l'abondance des matieres nous oblige à renvoyer pour celle-ci aux traités de calcul différentiel de l'Hôpital, d'Euler, de Bezout, de M. l'abbé Bossut, de M. l'abbé Saury ; ils sont expliqués aussi, avec beaucoup de clarté, dans la Trigonométrie de M. Cagnoli. Nous nous contenterons de rappeller ici les regles générales et les applications dont nous avons besoin dans cette Astronomie.

Si l'on appelle x une quantité variable quelconque, et dx une augmentation ou diminution infiniment petite, qu'on appelle sa différentielle, celle de mx sera $m\,dx$, celle de x^m sera $mx^{m-1}\,dx$. Pour avoir la différentielle du produit de deux quantités x et y, il n'y a qu'à mettre $x + dx$ à la place de x, et $y + dy$ à la place de y; et, multipliant les quantités ainsi augmentées, on a $xy + x\,dy + y\,dx + dx\,dy$. Il faut rejeter $dx\,dy$, comme étant infiniment plus petit

que dx et que dy; ainsi le produit xy a augmenté de $xdy + ydx$; c'est donc là sa différentielle. D'où suit la regle générale pour différencier un produit : *Multipliez chacune des quantités par la différentielle de l'autre, et prenez la somme des produits.*

Les différences secondes, telles que ddx, se traitent de la même maniere que les différences premieres ; on en verra divers exemples.

3431. La même regle sert à différentier $\frac{x}{y}$ qui revient à xy^{-1}, suivant le calcul des exposans ; la différentielle est donc $y^{-1}dx - xy^{-2}dy$, ou $\frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y^2}$, ou $\frac{ydx - xdy}{y^2}$.

Celle de $\frac{1}{a+x}$ sera $-(a-x)^{-2}dx$, ou $\frac{-dx}{(a+x)^2}$.

3432. En opérant de même sur $\frac{f^2 dr}{S\,rr}$ (3613), l'on trouvera $\frac{f^2 ddr}{S\,rr} - \frac{2Sr\,dr\,f^2 dr}{S^2 r^4}$, ou $\frac{f^2 ddr}{S\,r^2} - \frac{2f^2 dr^2}{S\,r^3}$.

3433. Si le rapport de deux quantités x et y est constant, les différentielles de ces deux quantités seront encore dans le même rapport ; car alors il faut que ces deux variables, avec leurs augmentations, conservent le rapport constant, ou que $x + dx$ soit à $y + dy$ comme x est à y; donc $x + dx - x : y + dy - y :: x : y$, ou $dx : dy :: x : y$. Si le rapport de x à y est égal à une quantité constante a, et qu'on ait $\frac{x}{y} = a$, on aura $x = ay$ et $dx = a\,dy$ (3430); donc $\frac{dx}{dy} = a$. Nous en ferons usage (4003, 4033).

3434. La différentielle de $\sqrt{1+x}$, ou d'une quantité irrationnelle quelconque, se trouve en la réduisant à une quantité rationnelle : supposons $\sqrt{1+x} = y$, et cherchons la différentielle de y; nous aurons $1 + x = y^2$, $dx = 2y\,dy$ (3430, 3444), $dy = \frac{dx}{2y} = \frac{dx}{2\sqrt{1+x}}$.

3435. La différentielle de $\frac{1}{5}xx\sqrt{x}$, ou $\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}$ est $\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x}\,dx$, ou $\frac{1}{2}x\,dx\sqrt{x}$.

De même la différentielle de $\frac{4}{3}bx\sqrt{x}$ ou $\frac{4}{3}bx^{\frac{3}{2}}$ est $\frac{3}{2} \times \frac{4}{3}bx^{\frac{1}{2}}dx$, ou $2b\sqrt{x}\,dx$; on s'en sert quelquefois pour trouver l'attraction d'un sphéroïde.

3436. On trouve, par cette méthode, que la différentielle de $\sqrt{1+xx}$ est $\frac{x\,dx}{\sqrt{1+xx}}$, et que celle de $\sqrt{1-xx}$ est $\frac{-x\,dx}{\sqrt{1-xx}}$.

La différentielle de $\frac{a}{\sqrt{1-x}}$ est $\frac{a\,dx}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}}$.

Celle de $x\sqrt{1-xx}$ est $dx\sqrt{1-xx} - \frac{xx\,dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{dx(1-2xx)}{\sqrt{1-xx}}$

Enfin, la différentielle de $(aa - xx)^{\frac{3}{2}}\,\delta x$, ou de $(aa - xx)\sqrt{aa - x}\,\delta x$ est $3x\sqrt{aa - xx}\,\delta x$.

3437. Lorsqu'une quantité qui a augmenté jusqu'à un certain terme est prête à diminuer, c'est-à-dire qu'elle est arrivée à son *maximum*, elle cesse d'augmenter ; alors sa différentielle est nulle, ou égale à 0 ; c'est en quoi consiste la regle *de maximis et minimis*, dont nous avons fait usage plus d'une fois (1197, 2265). Il suffit de considérer le progrès des sinus jusqu'à 90°, où est le plus grand de tous, pour sentir la raison de cette regle.

3438. LE CALCUL INTÉGRAL est l'inverse du calcul différentiel. Nous avons supposé que δx étoit la différentielle de x (3430) ; nous dirons ici que l'intégrale de δx est x. On dira de même que l'intégrale $mx^{m-1}\,\delta x$ est x^m ; d'où suit la regle suivante, pour intégrer les quantités où il n'y a qu'une simple puissance de l'inconnue x : *augmentez d'une unité l'exposant de l'inconnue* x, *et divisez-la par cet exposant ainsi augmenté, et par* δ x.

3439. Trouver l'intégrale d'une quantité comme $mx^{m-1}\,\delta x$, c'est trouver le rapport qu'il y a entre x et la quantité qui a produit $mx^{m-1}\,\delta x$ par son petit accroissement : nous connoissons la relation des différentielles, ou des petits accroissemens, et nous en voulons conclure celle des quantités finies qui ont reçu ces petits accroissemens ; cela est extrêmement utile dans les calculs de l'attraction (3648), parceque le petit accroissement de distance ou de vîtesse, que produit une certaine attraction, se trouve facilement ; mais le total de la quantité à laquelle appartient ce petit accroissement seroit impossible à trouver sans les regles de ces petits accroissemens.

On peut voir le *Traité du calcul intégral* par M. de Bougainville, en 2 volumes *in*-4°, 1754 et 1756, et sur-tout le grand ouvrage d'Euler, qui a pour titre *Institutionum calculi integralis*, etc., en 3 volumes *in*-4°, 1768, etc. On peut consulter aussi les Traités des Fluxions de Mac-Laurin et de Simpson, l'Analyse démontrée du P. Reynau, le Calcul intégral du P. Jacquier, et du P. le Seur, celui du P. Riccati, les Leçons de M. Cousin, le Cours de M. Bezout.

3440. Quand on ne peut intégrer une différentielle, on se contente d'indiquer son intégrale, et cela se fait par le moyen de la lettre $\int$; ainsi l'intégrale de $r^3\,\delta u$ est $\int r^3\,\delta u$; et, par la même raison, la différentielle de $\int r^3\,\delta u$ seroit $r^3\,\delta u$ tout simplement.

Pour avoir l'intégrale de $\frac{aa - xx}{aa} \cdot \frac{xx\,\delta x}{a}$, il faut achever la multiplication qui n'est qu'indiquée, et l'on aura $\frac{xx\,\delta x}{a} - \frac{x^4\,\delta x}{a^3}$, dont

l'intégrale est $\frac{x^3}{3a}-\frac{x^5}{5a^3}$ (3438) ; si l'on fait $x=a$, elle deviendra $\frac{1}{3}a^2-\frac{1}{5}a^2=\frac{2}{15}a^2$, c'est l'intégrale de $\frac{aa-xx}{aa}\cdot\frac{xx\,dx}{a}$ pour le cas où $x=a$.

3441. Suivant la regle donnée pour les fractions (3431), la différentielle de $\frac{f\,dr\sqrt{1+2\rho}}{rr\,du}$ (3611), en supposant du constant, sera composée de trois termes; 1°. la différentielle de dr, qui est ddr, multipliée par tout le reste de la quantité donnée; 2°. la differentielle de $\sqrt{1+2\rho}$, qui est $\frac{d\rho}{\sqrt{1+2\rho}}$ (3434), multipliée par tout le reste de la quantité; 3°. la differentielle de $\frac{1}{rr\,du}$, qui est $\frac{-2r\,dr\,du}{r^4\,du^2}$ (3431), multipliée par $f\,dr\sqrt{1+2\rho}$; la différentielle totale sera $\frac{f\,ddr\sqrt{1+2\rho}}{rr\,du}+\frac{f\,dr}{rr\,du}\cdot\frac{d\rho}{\sqrt{1+2\rho}}-\frac{2f\,dr^2\sqrt{1+2\rho}}{r^3\,du}$.

3442. La différentielle de $\frac{1}{2}(\int\Pi r\,dx)^2$ se trouvera par la regle ordinaire (3430), en multipliant la quantité donnée par son exposant 2, diminuant l'exposant lui-même de 1, et multipliant encore par la différentielle de l'inconnue simple $\int\Pi r\,dx$, qui est $\Pi r\,dx$ (3440); on aura donc $\Pi r\,dx\int\Pi r\,dx$ pour la différentielle cherchée (3609).

3443. La différentielle de $\sqrt{f^2+2\int\Pi r^3\,du}$ (3609) peut se trouver par celle de $\sqrt{1+x}$ (3434); il n'y a qu'à mettre f^2 au lieu de 1, et $2\int\Pi r^3\,du$ à la place de x: la différentielle de cette derniere quantité est $2\Pi r^3\,du$, qu'on mettra à la place de dx, et l'on aura $\frac{\Pi r^3\,du}{\sqrt{f^2+2\int\Pi r^3\,du}}$ pour la différentielle cherchée.

3444. La differentielle d'une quantité comme $a+x$, composée d'une constante a et d'une variable x, est dx, aussi bien que celle de la quantité x toute seule; la constante n'y entre pour rien. Ainsi, quand on a une différentielle dx, son intégrale est x; mais, en général, cette quantité x doit être augmentée de quelque constante a pour exprimer la quantité que l'on cherchoit, c'est-à-dire $a+x$: ordinairement les conditions et les circonstances d'un problême déterminent la constante qu'il faut ajouter à l'intégrale. On verra cette addition de constante (3609, 3614, 3616).

3445. Souvent il arrive, par la nature du problême, que l'intégrale cherchée doit être égale à 0, quand l'inconnue elle-même s'évanouit : si l'on reconnoît que ce cas doive avoir lieu, on observera la regle suivante : quelques auteurs appellent cela, en général, *com-*

pléter l'intégrale, mais improprement, puisque ce n'est que satisfaire à la condition particuliere du problême. Après avoir intégré par les regles précédentes, on fera l'inconnue $=0$; si toute la quantité ne devient pas aussi $=0$, qu'elle ait une valeur, on retranchera cette valeur de l'intégrale trouvée, et l'on aura l'intégrale complete; car, puisqu'on est sûr que la quantité finie qui auroit produit la différentielle donnée doit disparoître quand l'inconnue $=0$, il faut donc la rendre telle, et en ôter ce qui est nécessaire pour que le total s'évanouisse avec l'inconnue, si l'on veut avoir la quantité qui a dû produire la différentielle donnée; par exemple, l'intégrale de $\frac{dx}{(a+x)^2}$, qui est $-\frac{1}{a+x}$, devient $-\frac{1}{a}$ quand $x=0$; il faut donc ajouter $\frac{1}{a}$, et l'on aura $\frac{1}{a}-\frac{1}{a+x}$, ce qui devient égal à 0 quand $x=0$. J'ai fait usage de cette regle (3556, 3733).

3446. Le plus grand usage que nous fassions du calcul intégral, dans l'Astronomie, est pour les sinus. Supposons qu'un arc x augmente ou diminue d'une quantité infiniment petite dx, alors son sinus augmentera ou diminuera d'une quantité dx cos. x, c'est-à-dire que d sin. $x = dx$ cos. x.

Soit un arc AB (FIG. 293), dont le sinus est BD, le cosinus DC, la différentielle BE; le sinus diminuera de la quantité BF, lorsque l'arc diminuera de BE, et le cosinus croîtra de la quantité FE; ainsi BF $= d$ sin. x, FE $= d$ cos. x. Le triangle infiniment petit BEF est semblable au triangle BCD; car ils sont tous deux rectangles; et de plus l'angle FBE, qui est le complément de CBF, est égal à l'angle BCD; donc BF : BE :: CD : BC, c'est-à-dire d sin. $x : dx ::$ cos. $x : 1$; donc d sin. $x = dx$ cos. x.

3447. De là il suit que la différentielle de $x + e$ sin. x est $dx + e\,dx$ cos. x, ou $dx\,(1 + e$ cos. $x)$. Nous en avons fait usage (1250), où z étant égale à $x + e$ sin. x, nous avons fait $dz = dx\,(1 + e$ cos. $x)$, et $dx = \frac{dz}{1+e\cos. x}$.

3448. On trouvera de même que d cos. $x = -dx$ sin. x; car les triangles semblables BCD, BEF, donnent cette proportion: FE : BE :: BD : BC, c'est-à-dire $+d$ cos. $x : -dx ::$ sin. $x : 1$; donc d cos. $x = -dx$ sin. x. Cette expression a un signe négatif, tandis que la précédente avoit un signe positif, parceque les cosinus changent en sens contraire des sinus, ils décroissent tandis que les arcs ou les sinus augmentent.

3449. Connoissant la différentielle de cos. x, on doit chercher celle de cos. mx, dont nous ferons un fréquent usage dans les calculs de l'attraction; la différentielle de x est dx, celle de mx est $m\,dx$;

au lieu de cos. x, nous aurons cos. mx; ainsi, au lieu de l'expression trouvée ci-devant $-dx$ sin. x, nous aurons d cos. $mx =$ $-m\,dx$ sin. mx. Par la même raison, si l'on cherche la différentielle de $+\frac{a}{m}$ cos. mx, on aura $-a$ sin. $mx \cdot dx$. Pour différencier cos. $^2\frac{1}{2}x$, on a $-2 \cdot \frac{1}{2}$ cos. $\frac{1}{2}x \cdot$ sin. $\frac{1}{2}x \cdot dx$.

3450. Ainsi, pour intégrer une formule a sin. $mx\,dx$, qui renferme un sinus, il faut, 1°. changer les signes, 2°. mettre cosinus à la place de sinus, 3°. diviser la formule par $m\,dx$, m étant le multiple de x compris dans la formule, et l'on a l'intégrale cherchée $-\frac{a}{m}$ cos. mx.

3451. L'intégrale de a cos. $mx\,dx$ est $\frac{a}{m}$ sin. mx; car, si l'on différencie cette expression, on a $\frac{a}{m}$ cos. $mx \cdot m\,dx = a$ cos. $mx\,dx$, qui est la quantité proposée. Ainsi, pour intégrer une formule qui renferme le cosinus d'un arc mx, il faut, sans changer les signes, mettre sinus à la place de cosinus, et diviser la quantité par $m\,dx$: nous en avons fait usage (3616, 3627, etc.)

3452. La tangente AG (FIG. 293) diminue de la quantité GH quand l'arc diminue de la quantité BE; pour exprimer cette différentielle GH de la tangente AG, on considérera que les triangles GHI, CBD, sont semblables; donc GH : IH :: CB : CD, c'est-à-dire GH : IH :: 1 : cos. x; donc GH $= \frac{\text{IH}}{\text{cos. } x}$. Les triangles, ou petits secteurs CBE, CIH, sont semblables; donc CB : BE :: CI : IH, ou 1 : dx :: sec. x : IH; donc IH $= dx$ sec. $x = \frac{dx}{\text{cos. } x}$ (3806); donc GH $= \frac{dx}{\text{cos. } x^2}$; c'est-à-dire que d tang. $x = \frac{dx}{\text{cos. } x^2}$. On en verra l'usage (3616, 4039).

3453. J'ai supposé dans ces calculs que la ligne GI étoit parallele à HE, et que l'angle GHI étoit le complément de l'angle IGH; il ne s'en faut que de l'angle infiniment petit ICH: or, toutes les fois qu'on compare entre elles deux quantités finies (telles que les angles finis G et H), ou leurs complémens, on néglige les quantités infiniment petites dont elles peuvent différer entre elles, et qui ne produiroient que des infiniment petits du second ordre.

D'ailleurs, comme on le verra bientôt (3490), dans un triangle dont les côtés sont infiniment petits (les angles étant des angles finis, comme il y en a nécessairement un, ou deux d'entre eux), un changement infiniment petit, dans un des angles, ne change les côtés, dont on calcule les rapports, que d'un infiniment petit du second ordre. C'est une considération qu'il faut avoir présente dans tous les calculs de cette espece.

3454. La différentielle de $\frac{s}{\cos. u}$ (3616) renferme la différentielle de s multipliée par $\frac{1}{\cos. u}$ moins la différentielle de cos. u, qui est — sin. $u \partial u$ (3448), multipliée par s, et divisée par cos. u^2 (3431); cette différentielle de $\frac{s}{\cos. u}$ est donc $\frac{\partial s}{\cos. u} + \frac{s \partial u \sin. u}{\cos. u^2}$. On en verra l'usage (3616).

3455. Il arrive souvent, dans le calcul intégral, que l'on traite des quantités variables comme si elles étoient constantes; par exemple, la différentielle de $\frac{\partial r}{\partial x}$, en supposant ∂x constant, sera simplement $\frac{\partial \partial r}{\partial x}$; mais ce qu'il est essentiel de remarquer, c'est qu'en l'exprimant ainsi, $\frac{\partial\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)}{\partial x}$, on ne suppose plus que ∂x soit constant. Supposons A$n = \partial x$ (planche XLII, FIG. 304), N$n = \partial r$, en sorte que $\frac{\partial r}{\partial x}$ soit la sécante de l'angle AnN : soit $\frac{\partial r}{\partial x} = z$, et, ayant pris MD $= z$, construisons une nouvelle courbe ODB, dans laquelle DF $= \partial x$, BF $= \partial z$, et $\frac{\partial z}{\partial x}$ ou $\frac{\partial\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)}{\partial x}$ sera la tangente de l'angle fini FDB. Or, cet angle fini sera le même, soit que ∂x soit constant ou qu'il varie d'une petite quantité $\partial \partial x$ (3453); ainsi l'expression $\frac{\partial\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)}{\partial x}$ ne suppose point que ∂x soit constant, et l'on peut dire que c'est la différentielle de $\frac{\partial r}{\partial x}$, même dans le cas où ∂x est variable. Nous ferons usage de cette remarque (3610).

3456. L'expression d'un arc, par le moyen de sa tangente, peut se trouver par les principes exposés jusqu'ici. Soit AG (FIG. 293) $= t$, GH $= \partial t$, CG$^2 = 1 + tt$; on a ces deux proportions (3452), HI : GH : : CA : CG, et CH : HI : : CE : EB; donc EB $= \frac{\partial t}{1+t^2}$, et, exprimant $\frac{1}{1+t^2}$ en série (3422), on a EB $= \partial t - t^2 \partial t + t^4 \partial t - t^6 \partial t$, etc., dont l'intégrale (3438) est l'arc AB $= t - \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{7} t^7$, etc. Cette valeur d'un arc de cercle est employée dans la *Figure de la Terre* de Clairaut.

3457. On peut trouver de même un arc x par le moyen de son sinus; car ∂ sin. $x = \partial x$ cos. x (3446). Si l'on appelle y le sinus de x, on aura $\partial x = \frac{\partial y}{\cos. x} = \frac{\partial y}{\sqrt{1+y^2}} = \partial y\,(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}$; réduisant en série (3422), et, intégrant chaque terme, l'on aura l'arc $x = y + \frac{1}{2 \cdot 3} y^3$

$+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}y^5+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}y^7+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9}y^9$, etc.

3458. Il est un peu plus difficile, quand on connoît l'arc lui-même, de trouver le sinus BD, ou la valeur de y; pour y parvenir, on appellera z l'arc donné, et l'on résoudra l'équation $z=y+\frac{1}{2\cdot 3}y^3+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}y^5$, etc., par approximation (3427), et l'on aura $y=z-\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{120}z^5$, etc., $=z-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}z^3+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}z^5$, etc.

3459. Ainsi, lorsqu'on connoît un arc a en secondes, on connoît son sinus $a-\frac{a^3}{6}$; donc la différence entre un petit arc et son sinus est égale à $\frac{a^3}{6}$, ou la sixieme partie du cube de cet arc; or, comme le cube d'une petite fraction devient une fraction beaucoup plus petite, on voit combien est négligeable la différence entre un petit arc et son sinus. Si a est infiniment petit, a^3 est un infiniment petit du troisieme ordre, qu'il faut rejeter du calcul, comme je l'ai fait (3107, 3494, 3711).

3460. Le cosinus CD d'un arc AB, dont le sinus BD$=y$, est $\sqrt{1-y^2}$; si donc on extrait la racine de 1 moins le carré du sinus exprimé par la série $z-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}z^3$, etc., l'on aura pour la valeur du cosinus la série suivante, $1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{2\cdot 3\cdot 4}-\frac{z^6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$, etc. (*Philos. Transact.*, n°. 219; *Volfii Elementa*, T. I; La Caille, édition de M. l'abbé Marie; *Trigonométrie* de M. Cagnoli, *pag.* 57). Si l'arc z est infiniment petit, le cosinus $1-\frac{z^2}{2}$ différera du rayon 1 d'une quantité $\frac{z^2}{2}$, qui est infiniment plus petite que l'arc, ou qui est un infiniment petit du second ordre par rapport au rayon.

3461. Cette expression $\frac{z^2}{2}$, en y ajoutant les termes suivans de la série, dont on change les signes, donne le sinus verse d'un arc z: on trouveroit, par exemple, que, pour un arc de 1′, le sinus verse en décimales du rayon est 0,0000000423079 75, comme dans les grandes tables de Rhéticus (4103).

Si l'on veut en conclure le sinus verse de l'arc décrit par la Lune en 1″ de temps, on prendra, pour plus d'exactitude, le mouvement diurne (1481); on ôtera de son logarithme celui de 24^h en secondes, et l'on aura 9,7395852, logarithme de l'arc décrit, 0″5490163, qui vaut à-peu-près 33‴ de degré. Le double de ce logarithme, moins le double de celui de 1′, ou 60″, étant ajouté avec le logarithme du sinus verse de 1′, qui est 2,6264222, donne celui du sinus verse de l'arc

décrit

décrit par la Lune en une seconde de temps, 8,5492901. En général, il suffit d'ajouter le logarithme 9,0701197 avec le double du logarithme des secondes, pour avoir celui du sinus verse, qui répond aux secondes données. La caractérisque 8 indique ordinairement qu'il y a deux zéro dans le nombre cherché (4108); mais ici il y en a dix de plus, parcequ'on a ajouté 10 pour faire la soustraction des logarithmes. Si l'on ajoute ce logarithme avec celui de la distance de la Lune en pieds, qui est 9,0730528, sa parallaxe moyenne étant de 57′ 0″, on a le logarithme de 0,0041912, qui vaut environ $\frac{1}{239}$ de pied. Nous en ferons usage (3549).

3462. Si l'on a une quantité fort petite, telle que a sin. A, son sinus sera égal à $(a - \frac{1}{8}a^3)$ sin. A $+ \frac{a^3}{24}$ sin. 3 A. Car le sinus est égal à l'arc, moins la sixieme partie du cube de l'arc (3459); donc le sinus de a sin. A est égal à a sin. A $- \frac{a^3 \text{ sin. A}^3}{6}$; mais sin. $\text{A}^3 = \frac{3}{4}$ sin. A $- \frac{1}{4}$ sin. 3 A (3830); donc le sinus cherché $= a$ sin. A $- \frac{a^3}{6} \times \frac{3}{4}$ sin. A $+ \frac{a^3}{24}$ sin. 3 A $= (a - \frac{1}{8}a^3)$ sin. A $+ \frac{a^3}{24}$ sin. 3 A, en négligeant les puissances ultérieures de a, qui est supposé une petite fraction.

3463. On trouveroit, par une méthode semblable, la valeur du cosinus de a sin. A, qui est $1 - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$ cos. 2 A. On a besoin de ces valeurs pour faire les calculs que j'ai indiqués (3428) à l'occasion de la théorie de la Lune.

3464. On déduit de l'article 3459 une maniere d'exprimer en secondes la différence d'un arc à son sinus. Supposons un arc a fort petit, par exemple égal à 1°, ou 3600″; on divisera d'abord cet arc par 57°, ou 206265″, qui est la longueur du rayon exprimé en secondes, et l'on aura l'arc exprimé en décimales du rayon (3499), dont le logarithme est 8,24188; le triple de ce logarithme est 4,72564, logarithme de a^3; on en ôtera celui de 6, et l'on aura le logarithme d'une fraction du rayon qui est égale à $\frac{a^3}{6}$; c'est-à-dire à l'excès de l'arc a sur son sinus en parties du rayon. Si l'on veut exprimer cet excès en secondes, on le multipliera par 57° (en ajoutant le logarithme 5,31442); et l'on aura 0″ 18. Le logarithme constant 1,40700152, ôté du triple du logarithme de l'arc en secondes, donne également celui de cette différence de l'arc au sinus. J'ai supposé (1629) le sinus de la parallaxe de la Lune égal à la parallaxe elle-même, et l'on voit qu'elle est en effet bien négligeable. Il faudroit 1° 45′ 44″ pour qu'il y eût 1″, et 3° 0′ 47″ pour que la différence entre l'arc et le sinus fût de 5″.

3465. Dans le calcul de l'équation du centre, on suppose d'abord que les petits arcs sont égaux à leurs sinus (1247), mais on corrige ensuite cette supposition par la table de l'article 1247. Pour construire cette table, il ne suffiroit pas d'employer $\frac{a^3}{6}$, et il faut se servir des tables des sinus, en disant, l'arc égal au rayon est à l'unité comme l'arc donné est à sa valeur en parties du rayon; on en retranchera le sinus de l'arc pris dans les tables, et l'on aura la différence en décimales; on la multipliera par 206265″ (3499), et l'on aura cette différence en secondes.

3466. La connoissance des segmens d'un cercle suppose qu'on connoisse l'arc et le sinus. Soit CP = 1 (planche XXXVIII, FIG. 266), PS = b, et l'arc PA de 18°. Pour avoir le segment PEAP, l'on réduira l'arc AP en décimales du rayon, en le divisant par l'arc de 57°, on aura 0,3142; on le multipliera par la moitié du rayon CP ou par $\frac{1}{2}$; on aura la surface du secteur PCA = 0,1571. Celle du triangle CAD est égale à la moitié du produit de AD par DC, ou du sinus de 18° par son cosinus, c'est-à-dire 0,1469; le triangle APD est égal au produit du sinus AD par la moitié du sinus verse PD, c'est-à-dire 0,0076; ces deux triangles étant ôtés de la surface du secteur PCA, il reste le segment PEAP = 0,0026. Halley, dans la table qu'il a donnée pour faciliter le calcul du mouvement des cometes dans une orbite elliptique (3193), emploie le double de ce segment, qu'il trouve 0,00514227; et cela revient à la différence de l'arc au sinus.

Il y a une table des segmens calculés très au long par Sharp (*Geometry improv'd*, 1717); j'en ai mis une petite dans la Connoissance des temps de 1765; on en trouve aussi dans des Traités du jaugeage: celle que je joins ici est tirée de la table de M. Bailly (*Mém.*, 1771), et suffit pour les satellites (3045). Les segmens sont ici des décimales du cercle entier, et les fleches sont des décimales du diametre entier.

SEGMENT.	FLECHE.	SEGMENT.	FLECHE.
0,00882	0,03015	0,06548	0,11698
0,01166	0,03641	0,07506	0,12843
0,01506	0,04322	0,08538	0,14033
0,01902	0,05060	0,09630	0,15267
0,02362	0,05852	0,10838	0,16543
0,02882	0,06698	0,12124	0,17860
0,03472	0,07597	0,13440	0,19217
0,04132	0,08548	0,14864	0,20610
0,04864	0,09549	0,16356	0,22040
0,05668	0,10599	0,17916	0,23504

3467. La quadrature du cercle consiste à trouver la surface du segment ABD (FIG. 293), dont la différentielle est le petit rectangle FEKD. Supposons le rayon $= a$, CD $= x$, DK $= \partial x$, BD $= \sqrt{aa - xx}$, FEKD sera $= \sqrt{aa - xx} \cdot \partial x$; c'est la différentielle dont il faudroit avoir l'intégrale pour trouver la quadrature du cercle; mais nous ne connoissons aucune quantité qui, étant différentiée (3430), puisse produire $\sqrt{aa - xx} \cdot \partial x$. Il faut donc se contenter de trouver la quadrature du cercle par approximation, ce qui est aisé dès qu'on connoît les sinus, ou les segmens, par les approximations précédentes.

Supposant le diametre égal à 1, l'on a pour la circonférence le nombre suivant, calculé par *Ludolph de Ceulen, Fundam. Géomet.*, lib. 6: 3,14159265358979323846264338327950288419716939937 51 (*Histoire de la quadrature du cercle*, par M. Montucla, 1754). De là on conclut que le rayon du cercle en degrés et décimales de degrés vaut 57,295779513082320876798, ou 57° 17′ 44″ 48‴ 22'''' 29''''' 21'''''', etc. (Euler, *Introd.*, T. II, *pag.* 305.)

3468. Il y a des différentielles dont on ne peut avoir l'intégrale qu'en supposant connue la mesure des arcs de cercle; ces intégrales dépendent donc de la quadrature du cercle; telle est l'intégrale de $\frac{\partial x}{\sqrt{1 - xx}}$: il n'y a aucune quantité qui, étant différentiée (3430 et suiv.), puisse faire $\frac{\partial x}{\sqrt{1 - xx}}$; mais, si l'on fait CB $= 1$ (FIG. 293), et BD $= x$, CD sera $= \sqrt{1 - xx}$; or CD : CB :: BF : BE, donc BE $= \frac{\partial x}{\sqrt{1 - xx}}$; c'est la différentielle de l'arc BA : ainsi l'intégrale cherchée sera l'arc dont le sinus est x: si donc on avoit la mesure rigoureuse et exacte d'un arc dont le sinus est x, on auroit, par là même, l'intégrale exacte de $\frac{\partial x}{\sqrt{1 - xx}}$. Quoiqu'on ne l'ait que par approximation, on ne laisse pas de regarder comme résolu un problême que l'on a réduit ainsi à la quadrature ou à la rectification du cercle; et il y en a un très grand nombre (voyez *le Calcul intégral* de M. de Bougainville). Nous ferons usage de cette maniere d'intégrer (3734).

3469. On réduit à la quantité $\frac{\partial x}{\sqrt{1 - xx}}$ beaucoup d'autres différentielles; par exemple $\sqrt{1 - xx}\, \partial x$, qui exprime un segment de cercle. L'intégrale de celle-ci se trouvera par le moyen d'un arc dont x est le sinus. En effet, $\sqrt{1 - xx}\, \partial x = \frac{2 \partial x (1 - xx)}{2 \sqrt{1 - xx}} = \frac{\partial x}{2 \sqrt{1 - xx}}$

$+ \frac{dx(1-2xx)}{2\sqrt{1-xx}}$; or $\frac{dx(1-2xx)}{\sqrt{1-xx}}$ est la différentielle de $x\sqrt{1-xx}$ (3436), et $\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$ la différentielle d'un arc dont x est le sinus (3468); ainsi l'intégrale cherchée est composée de deux quantités, dont l'une, $x\sqrt{1-xx}$, est une quantité algébrique finie, l'autre est l'intégrale de $\frac{dx}{2\sqrt{1-xx}}$; c'est une quantité qui est donnée seulement par la rectification ou la quadrature du cercle. Nommant z l'arc dont x est le sinus, l'intégrale de $\sqrt{1-xx}\,dx$ sera $\frac{z}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{1-xx}$. Nous en ferons usage (3734).

3470. L'intégrale de $\frac{xx\,dx}{\sqrt{1-xx}}$ dépend également de la rectification du cercle, c'est-à-dire que, si l'on avoit l'intégrale de $\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$, on auroit celle de $\frac{xx\,dx}{\sqrt{1-xx}}$; et voici la maniere de les ramener l'une à l'autre. On choisit une troisieme quantité $x\sqrt{1-xx}$, dont la différentielle renferme celle qui est donnée, et celle d'un arc de cercle ou d'un segment; cette nouvelle quantité étant différentiée donne (3436) $\frac{dx(1-2xx)}{\sqrt{1-xx}}$; ainsi l'on aura $\int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}} - 2\int \frac{xx\,dx}{\sqrt{1-xx}} = x\sqrt{1-xx}$; donc $\int \frac{xx\,dx}{\sqrt{1-xx}} = -\frac{x}{2}\sqrt{1-xx} + \int \frac{dx}{2\sqrt{1-xx}}$; ce second terme est la moitié de l'arc dont x est le sinus (3468), et, si cet arc s'appelle z, on aura $\frac{z - x\sqrt{1-xx}}{2}$ pour l'intégrale de $\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-xx}}$. Nous en ferons usage (3726).

3471. On trouvera, par une méthode semblable, l'intégrale de $xx\sqrt{aa-xx}\,dx$, en supposant connue celle de $dx\sqrt{aa-xx}$ (3467); on choisit une fonction de x dont la différentielle renferme ces deux différentielles proposées; telle est la quantité $x(aa-xx)^{\frac{3}{2}}$, dont la différ. est $dx(aa-xx)^{\frac{3}{2}} - 3x^2\,dx\sqrt{aa-xx}$ (3436) $= dx(aa-xx)\sqrt{aa-xx} - 3x^2\,dx\sqrt{aa-xx} = aa\,dx\sqrt{aa-xx} - 4xx\,dx\sqrt{aa-xx}$; donc $x(aa-xx)^{\frac{3}{2}} = \int aa\sqrt{aa-xx}\,dx - \int 4x^2\sqrt{aa-xx}\,dx$; ainsi l'intégrale cherchée $\int xx\sqrt{aa-xx}\,dx = \frac{1}{4}aa\int\sqrt{aa-xx}\,dx - \frac{x}{4}(aa-xx)^{\frac{3}{2}}$. Si dans l'intégrale on fait $x=a$, et $\int\sqrt{aa-xx}\,dx = A$, qui est la surface d'un quart de cercle; le terme $\frac{x}{4}(aa-xx)^{\frac{3}{2}}$

disparoît, et l'on trouve $\frac{aaA}{4}$ pour l'intégrale cherchée. Si A exprime le cercle entier, on aura une intégrale quatre fois plus grande; c'est sous cette forme que nous en ferons usage (3704).

3472. La surface d'un segment parabolique est les deux tiers du produit de l'ordonnée et de l'abscisse; car le petit rectangle élémentaire PMmp (FIG. 289) est $y \partial x$; et, à cause de $y^2 = px$, il est égal à $\frac{2y^2 \partial y}{p}$; cette quantité, étant intégrée, donne $\frac{2y^3}{3p}$; et, mettant px pour y^2, il se réduit à $\frac{2}{3} xy$, comme nous l'avons supposé (3112).

3473. On a besoin, dans les calculs de l'attraction (3661), de trouver une quantité qu'on peut représenter par $\int y \partial x$, sans avoir y exprimé en x, et sans pouvoir réduire la formule à une fonction de x et de ∂x; il faut alors calculer arithmétiquement un grand nombre de fois la valeur de y. Pour cela, on considere ces valeurs comme les ordonnées d'une courbe dont x est l'abscisse, et y l'ordonnée; la surface de cette courbe est $\int y \partial x$, et cette surface, calculée ainsi par des opérations arithmétiques, donne à très peu près l'intégrale cherchée. Supposons que PM, SN, TV, représentent trois valeurs de y qui, exprimées en nombres, soient a, b, c, les intervalles PS et ST étant chacun $= 1$, la surface PMVT, supposée rectiligne, ou composée de deux trapezes, sera $\frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2}$; et, s'il y avoit un grand nombre d'ordonnées d, e, f, etc., on auroit, pour les espaces suivans, $\frac{c+d}{2}$, $\frac{d+e}{2} + \frac{e+f}{2}$, etc. Cela suppose que MN, NV, soient des lignes droites; mais, si l'on suppose que la ligne MNV, qui joint trois ordonnées consécutives, soit un arc de courbe déterminé par ces trois ordonnées, le calcul de la surface comprise entre ces trois ordonnées en sera plus exact. Voici la maniere de trouver cette surface PMVT dans ce cas-là.

3474. Soit une équation générale $y = m + nx + px^2 + qx^3$, etc. qui exprime des courbes de tous les degrés qu'on appelle quelquefois courbes paraboliques; ne prenons que les trois premiers termes et supposons trois ordonnées PM, SN, TV, ou a, b, c, répondantes aux abscisses 0, 1, 2, il s'agit de trouver la surface PMVT. L'équation doit être disposée de maniere que, mettant 0 à la place de x, comme cela doit avoir lieu au point P, l'on ait $y = a$, que mettant 1 à la place de x, l'on ait $y = b$, ce qui a lieu en S, et qu'en mettant 2 à la place de x, l'équation devienne $y = c$, comme au point T: ces conditions sont remplies, comme il est aisé de s'en assurer, si l'on fait $y = a + (b - a)\,x + \left(\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2}\right) x\,(x - 1)$; l'élément de

la surface de la courbe, ou le petit trapeze PMmp, sera $y\partial x = a\partial x + (b-a)\,x\partial x + \left(\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2}\right)(xx\partial x - x\partial x)$, dont l'intégrale $\int y\partial x = \text{PMVT} = ax + \frac{b-a}{2}x^2 + \left(\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2}\right)\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)$; dans cette expression de l'aire PMVT, l'on substituera PT $=2$ à la place de x, et l'on aura la surface dans le cas des trois ordonnées $= \frac{1}{3}a + \frac{4}{3}b + \frac{1}{3}c$.

3475. Si l'on avoit une suite d'ordonnées a, b, c, d, e, f, g, etc. dans une courbe plus étendue, on trouveroit l'aire de la courbe en la divisant en plusieurs arcs de même espece; on auroit le segment compris entre les ordonnées a et c, $= \frac{1}{3}a + \frac{4}{3}b + \frac{1}{3}c$; le segment compris entre les ordonnées c & e seroit $\frac{1}{3}c + \frac{4}{3}d + \frac{1}{3}e$, le segment compris entre les ordonnées e & g seroit $\frac{1}{3}e + \frac{4}{3}f + \frac{1}{3}g$, etc. Ainsi la somme seroit égale à un tiers de la premiere et de la derniere, plus $\frac{4}{3}$ de la seconde, de la quatrieme, etc., c'est-à-dire de tous les nombres pairs, plus $\frac{2}{3}$ de la troisieme, de la cinquieme, etc., c'est-à-dire de tous les nombres impairs : par-là nous chercherons les surfaces des courbes qui expriment des intégrales qu'on ne pourroit avoir autrement (3663).

3476. La surface et la cubature des solides se trouve par le calcul intégral, aussi bien que la quadrature des courbes; nous nous en servirons pour trouver la surface et la solidité, ou le volume de la Terre, c'est-à-dire pour cuber un ellipsoïde qui seroit engendré par la circonvolution d'une ellipse autour de son petit axe.

Soit une ellipse PLQO (planche XLII, FIG. 304), qui tourne autour du petit axe CP pour engendrer un sphéroïde aplati; soit QM $=x$; ML $=y$, CQ $=a$, CP $=b$; on aura, par la propriété de l'ellipse (3385), $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - xx)$; $a^2y^2 = 2ab^2x - b^2x^2$, et, prenant la différent. (3430), $2a^2y\partial y = 2ab^2\partial x - 2b^2x\partial x$; $\partial x = \frac{2a^2y\partial y}{2ab^2 - 2b^2x} = \frac{a^2y\partial y}{b^2(a-x)}$; $\partial x^2 = \frac{a^4y^2\partial y^2}{b^4(a-x)^2} = \frac{a^4y^2\partial y^2}{b^4\left(aa - \frac{aa}{bb}y^2\right)}$ (3386) $= \frac{a^2y^2\partial y^2}{b^4 - b^2y^2}$; ainsi l'arc L$l = \sqrt{\partial x^2 \partial y^2} = \sqrt{\frac{a^2y^2\partial y^2 + b^4\partial y^2 - b^2y^2\partial y^2}{b^4 - b^2y^2}} = \frac{\partial y}{b}\sqrt{\frac{a^2y^2 + b^4 - b^2y^2}{b^2 - y^2}}$; et, si l'on appelle e l'excentricité, en sorte que l'on ait $ee = aa - bb$, on aura L$l = \frac{\partial y}{b}\sqrt{\frac{b^4 + eey^2}{b^2 - y^2}}$. Nommant c la circonf. pour le rayon 1 (3467), l'on aura, pour le rayon, CM $= a - x$, ou $\frac{a}{b}\sqrt{bb - yy}$ (3386), et, pour la circonf., $\frac{ca}{b}\sqrt{bb - yy}$. La différentielle de la surface décrite par la courbe PL, en tournant autour de CP, est égale à la surface du petit cône tronqué decrit par l'élément Ll, ou à Ll multipliée par la circonférence que décrit RL;

ainsi l'expression de la circonférence, multipliée par l'élément de l'ellipse, ou par la valeur de Ll, donnera la différentielle de la surface du sphéroïde, $= \frac{\partial y}{b} \frac{ca}{b} \sqrt{b^4 + eey^2} = \frac{eca\,\partial y}{bb} \sqrt{\frac{b^4}{ee} + y^2}$, qu'il faut intégrer. On réduit d'abord le radical en série (3421); et l'on a $\sqrt{\frac{b^4}{ee} + y^2} = \frac{b^2}{e} + \frac{ey^2}{2b^2} - \frac{e^3y^4}{8b^6} + \frac{e^5y^6}{16 \cdot b^{10}} - \frac{5e^7y^8}{128 \cdot b^{14}} + \frac{7e^9y^{10}}{256 \cdot b^{18}} - \frac{21e^{11}y^{12}}{1024 \cdot b^{22}}$, etc., multipliant par ∂y, et, intégrant chaque terme, on trouve $\frac{b^2y}{e} + \frac{ey^3}{6b^2} - \frac{e^3y^5}{40b^6} + \frac{e^5y^7}{112b^{10}} - \frac{5e^7y^9}{1152b^{14}} + \frac{7e^9y^{11}}{2816b^{18}} - \frac{21e^{11}y^{13}}{13312b^{22}}$, etc. On fera $y = b$ pour avoir le demi-sphéroïde, on doublera le tout, et l'on multipliera par $\frac{eca}{bb}$; l'on aura $\frac{2eca}{bb}\left(\frac{b^3}{e} + \frac{eb}{6} - \frac{e^3}{40b} + \frac{e^5}{112b^3} - \frac{5e^7}{1152b^5} + \frac{7e^9}{2816b^7} - \frac{21 \cdot e^{11}}{13312b^9}, \text{etc.}\right)$, dont les premiers termes sont $2cab + \frac{cae^2}{3b} - \frac{e^4ca}{20b^3} + \frac{e^6ca}{56b^5}$, etc. C'est la surface d'un sphéroïde: nous en avons donné la valeur en nombres pour la Terre (2701). $e^2 = a^2 - b^2$ (No. 3402)

3477. LA SOLIDITÉ, ou le volume du sphéroïde, est le produit des deux tiers du grand axe entier par la surface du méridien. L'on a vu (3476) que $\frac{ca}{b}\sqrt{bb - yy}$ est la circonférence décrite par le mouvement du point M autour du centre C; multipliant par $\frac{a}{2b}\sqrt{bb - yy}$, qui est la moitié du rayon, on aura la surface du cercle décrit par RL $= \frac{ca^2}{2bb}(bb - yy)$; l'on multiplie par ∂y pour avoir la tranche cylindrique, et intégrant, on a $\frac{ca^2y}{2} - \frac{ca^2y^3}{6bb}$, valeur du solide décrit par le segment CQLR. Si l'on fait $y = b$, l'on a $\frac{1}{3}ca^2b$, qu'il faut doubler pour avoir la valeur du sphéroïde entier, $\frac{2}{3}ca^2b$, ou, ce qui revient au même, $\frac{cba}{2} \cdot \frac{4}{3}a$. Mais la surface de l'ellipse est $\frac{cba}{2}$ (3400): si l'on appelle A cette surface, on aura le sphéroïde $= \frac{4}{3}a$A. On en verra l'usage à l'occasion de la précession des équinoxes (3708, et 3719). Nous avons déja même employé l'expression de la solidité du sphéroïde (2701). Dans le cas de la sphere où $b = a$, l'on a, pour la solidité, $\frac{2}{3}ca^3$. (observez, que $c = 2\pi$)

Si l'on appelle x le rayon de la sphere dont le volume est égal à celui du sphéroïde aplati, l'on a $\frac{2}{3}cx^3 = \frac{2}{3}cba^2$, ou $x = \sqrt[3]{ba^2}$. Nous en avons fait usage (2701).

3478. La solidité que nous avons trouvée $\frac{cba}{2} \cdot \frac{4}{3}a$, ou $\frac{2}{3}cba^2$, seroit $= \frac{2}{3}cb^2a$, dans le cas du sphéroïde ou ellipsoïde allongé que produit une ellipse en tournant autour de son grand axe; parceque le carré de b, qui devient le diametre tournant, prend la place du carré de a.

3479. Supposons maintenant une sphere qui, par une force étrangere, se change en un ellipsoïde alongé, en conservant la même quantité de matiere, comme cela arrive dans le soulèvement des eaux de la mer; supposons le demi-diametre de la sphere $= b$, la différence des deux demi-axes du nouvel ellipsoïde $= \beta$, et cherchons le rapport de ces deux demi-axes. Soit la différence entre le rayon de la sphere (qui est égale en masse au sphéroïde) et le demi petit axe, $= x$, on aura $b - x$ pour le demi petit axe du sphéroïde, et $b + \beta - x$ pour le demi grand axe, donc la solidité de l'ellipsoïde sera $\frac{2}{3} p (b + \beta - x)(b - x)^2$; et, négligeant les produits, ou les puissances des quantités β et x, qui sont fort petites, cette solidité $= \frac{2}{3} p (b^3 - 3 b^2 x + b^2 \beta)$. Il faut l'égaler à $\frac{2}{3} p b^3$, qui est la solidité de la sphere, et l'on a $3 b^2 x = b^2 \beta$; donc $x = \frac{1}{3} \beta$. Nous nous servirons de cette proposition quand il s'agira du flux et du reflux de la mer (3785).

Expressions analytiques de l'Anomalie vraie et du Rayon vecteur.

3480. Les calculs de l'attraction, et ceux où l'on fait usage des anomalies, ou des rayons vecteurs, exigent que ces quantités soient exprimées analytiquement (3658).

Soit le demi-axe CA (fig. 285) $= 1$, le rayon vecteur SM $= r$, l'anomalie vraie ASM $= u$, l'anomalie moyenne $= z$, l'excentricité CS $= e$, l'angle MSm $= d u$; on aura le petit secteur elliptique MSM $= \frac{rr\, d u}{2}$, parceque le petit arc qui mesure l'angle $d u$ est $r d u$ (3498). Soit p la circonférence pour le rayon CA $= 1$, et $\frac{p}{2}$ sa surface; on aura $\frac{p}{2} \sqrt{1 - ee}$ pour la surface de l'ellipse (3400); $\frac{d z}{2}$ est la surface du secteur circulaire qui représente l'anomalie moyenne, dans le cercle (1235), comme $\frac{rr\, d u}{2}$ est celle du secteur elliptique; ainsi l'on aura cette proportion, $\frac{rr\, d u}{2} : \frac{d z}{2} :: \frac{p}{2} \sqrt{1 - ee} : \frac{p}{2}$, donc $d z = \frac{rr\, d u}{\sqrt{1 - ee}}$; c'est l'élément de l'anomalie moyenne, dans lequel $\sqrt{1 - ee}$ est le demi petit axe. L'intégrale donnera l'anomalie moyenne par le moyen de l'anomalie vraie.

3481. Cette formule peut servir à trouver le mouvement horaire vrai (1252) par le moyen du rayon vecteur. Elle sert aussi à trouver le rapport des variations de l'anomalie moyenne et de l'anomalie vraie, par le moyen de l'anomalie excentrique; car puisque $d z : d u :: rr : \sqrt{1 - ee}$, en substituant pour rr sa valeur (1246), on a

d

$\delta z : \delta u :: \frac{b^2 \sin.^2 x}{\sin.^2 u} : b :: b \sin.^2 x : \sin.^2 u.$

La variation du rayon vecteur peut s'exprimer aussi par le moyen de celle de l'anomalie moyenne ; car, puisque $r = 1 + e \cos. x$ (3405), $\delta r = - e \sin. x \delta x$: mais $\delta x = \frac{\delta z}{1 + e \cos. x}$ (3447); donc $\delta r = \frac{- e \sin. x \delta z}{1 + e \cos. x}$; et mettant, pour sin. x, $\frac{r \sin. u}{b}$ (1246), on a $\delta r = \delta z \cdot \frac{e}{b} \sin. u$. Il faut réduire l'arc δz en parties du rayon pour avoir la variation du rayon vecteur dans la forme ordinaire.

3482. Pour avoir la valeur de l'anomalie moyenne, ou l'intégrale de $\frac{rr \delta u}{\sqrt{1 - ee}}$, il faut substituer la valeur du rayon vecteur $r = \frac{1 - ee}{1 - e \cos. u}$ (3412); alors $rr \delta u = (1 - ee)^2 (1 - e \cos. u)^{-2} \delta u$; et $\delta z = \frac{rr \delta u}{\sqrt{1 - ee}} = (1 - ee)^{\frac{3}{2}} (1 - e \cos. u)^{-2} \delta u$. Il faut donc chercher la valeur de $(1 - e \cdot \cos. u)^{-2}$ par la formule du binome (3421); on trouvera $1 + 2e \cos. u + 3 e^2 \cos. u^2 + 4 e^3 \cos. u^3 + 5 e^4 \cos. u^4$; nous négligerons les puissances supérieures à e^4. On substituera pour cos. u^2 sa valeur $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos. 2 u$ (3820), pour cos. u^3 sa valeur (3831), et pour cos. u^4 sa valeur (3832); on aura celle de $(1 - e \cos. u)^{-2}$, qui est aussi celle de $\frac{rr}{(1 - ee)^2}$. Voici cette valeur multipliée par δu, c'est-à-dire $\frac{rr \delta u}{(1 - ee)^2} = (1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{15}{8} e^4) \delta u + (2 e + 3 e^3) \cos. u \delta u + (\frac{3}{2} e^2 + \frac{5}{2} e^4) \cos. 2 u \delta u + e^3 \cos. 3 u \delta u + \frac{5}{8} e^4 \cos. 4 u \delta u$, dont l'intégrale (3451) sera la valeur de $\int \frac{rr \delta u}{(1 - ee)^2} = (1 + \frac{3}{2} e^2 + \frac{15}{8} e^4) u + (2e + 3e^3) \sin. u + (\frac{3}{4} e^2 + \frac{5}{4} e^4) \sin. 2u + \frac{1}{3} e^3 \sin. 3 u + \frac{5}{32} e^4 \sin. 4u$; il faut multiplier $\int \frac{rr \delta u}{(1 - ee)^2}$ par $(1 - ee)^{\frac{3}{2}}$, ou diviser chacun des termes de sa valeur par $1 + \frac{3}{2} ee + \frac{15}{8} e^4$, etc., $= (1 - ee)^{-\frac{3}{2}}$ (3421); par ce moyen, u se trouvera dégagée, et l'on aura $z = u + 2 e \sin. u + (\frac{3}{4} e^2 + \frac{1}{8} e^4) \sin. 2 u + \frac{1}{3} e^3 \sin. 3 u + \frac{5}{32} e^4 \sin. 4 u$, etc. C'est ainsi que nous avons l'expression de l'anomalie moyenne par le moyen de l'anomalie vraie : cette série donneroit la solution du problême, que nous avons déja résolu d'une autre maniere (1240); mais nous avons cherché cette expression pour parvenir à celle de l'anomalie vraie u.

3483. *Connoissant l'anomalie moyenne, trouver l'anomalie vraie par une expression analytique.* L'expression précédente de l'anomalie moyenne étant mise sous cette forme, $z = u + a \sin. u + b \sin. 2 u$, etc., (K) dans laquelle on substitue les valeurs de sin. u, sin. $2 u$, etc. (3458); on aura, en réunissant les coëficiens de chaque puissance de u, $z = (1 + a + 2 b + 3 c$, etc.$) u - \frac{1}{6} (a + 2^3 b +$

$3^3 c +$ etc.) $u^3 + \frac{1}{120}(a + 2^5 b + 3^5 c +$ etc.) $u^5 - e\,\varpi$. (M).

Supposons que l'anomalie vraie soit exprimée par $u = z +$ A sin. z + B sin. $2z$, etc (L).

En traitant de même cette série, elle deviendra

(N) ... $u = (1 + \mathrm{A} + 2\mathrm{B} + 3\mathrm{C} +$ etc.) $z - \frac{1}{2\cdot 3}(\mathrm{A} + 2^3\mathrm{B} + 3^3\mathrm{C}$ + etc.) z^3.

$+ \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(\mathrm{A} + 2^5\mathrm{B} + 3^5\mathrm{C} +$ etc.) $z^5 -$ etc.

Pour plus de simplicité, exprimons ces deux séries comme il suit:

$z = mu - nu^3 + pu^5 - qu^7 + ru^9 -$ etc.

$u = \mathrm{M}z - \mathrm{N}z^3 + \mathrm{P}z^5 - \mathrm{Q}z^7 + \mathrm{R}z^9 -$ etc.

Substituons ensuite dans la derniere les valeurs de z, z^3, z^5, etc., prises de la précédente, et, ordonnant les termes relativement aux puissances de u, nous aurons

$$u = \left\{ \begin{array}{llllll} \mathrm{M}z = \mathrm{M}mu & - \mathrm{M}nu^3 & + \mathrm{MP}u^5 & - \mathrm{M}qu^7 & + \mathrm{M}ru^9 & - \text{etc.} \\ -\mathrm{N}z^3 = & - \mathrm{N}m^3 & + 3\mathrm{N}m^2n & - 3\mathrm{N}m^2p & + 3\mathrm{N}m^2q & - \text{etc.} \\ & & & - 3\mathrm{N}mn^2 & + 6\mathrm{N}mnp & - \text{etc.} \\ & & & & + \mathrm{N}n^3 & - \text{etc.} \\ +\mathrm{P}z^5 = & & + \mathrm{P}m^5 & - 5\mathrm{PM}^4n & + 5\mathrm{P}m^4p & - \text{etc.} \\ & & & & + 10\mathrm{P}m^3n^2 & - \text{etc.} \\ -\mathrm{Q}z^7 = & & & - \mathrm{Q}m^7 & + 7\mathrm{Q}m^6n & - \text{etc.} \\ +\mathrm{R}z^9 = & & & & + \mathrm{R}m^9 & - \text{etc.} \\ - \text{etc.} & & & & & \end{array} \right.$$

Pour tirer la valeur des coëfficiens de u par la méthode des indéterminées, on mettra la série sous cette forme : $0 = (\mathrm{M}m - 1)u - (\mathrm{M}n + \mathrm{N}m^3)u^3$, etc.; et comme cette série doit être égale à o dans tous les cas, ou pour toutes les valeurs de u, l'on donnera aux indéterminées des valeurs qui réduisent chaque terme à o; on fera donc $\mathrm{M}m - 1 = 0$, et l'on aura $\mathrm{M} = \frac{1}{m}$. De même $-(\mathrm{M}n + \mathrm{N}m^3) = 0$; et, mettant pour M sa valeur $\frac{1}{m}$, je trouve $\mathrm{N} = -\frac{n}{m^4}$; en continuant à faire les autres termes $= 0$, j'ai $\mathrm{P} = \frac{3n^2 - pm}{m^7}$; $\mathrm{Q} = -\frac{12n^3 - 8mnp + qm^2}{m^{10}}$; $\mathrm{R} = \frac{55n^4 - 55mn^2p + 10m^2nq + 5m^2p^2 - rm^3}{m^{13}}$. Ce sont les cinq équations finales du problême.

3484. En substituant dans ces opérations les valeurs de M, N, P, etc., m, n, p, etc., prises dans les séries (N), (M), il ne reste plus qu'à les résoudre par les méthodes ordinaires, pour en tirer les valeurs des indéterminées de l'équation (L), ou A, B, C, etc.; en voici un essai sur le problême de Képler, où M. Cagnoli s'est borné à la quatrieme indéterminée D.

Au lieu de $M = \frac{1}{m}$, on a, par les séries (N), (M), $1 + A + 2B + 3C + 4D = \frac{1}{1+a+2b+3c+4d}$, ou

(O) $\cdot\cdot A + 2B + 3C + 4D = -\frac{a+2b+3c+4d}{1+a+2b+3c+4d}$. Au lieu de $N = -\frac{n}{m^4}$, on a $\frac{1}{6}(A + 8B + 27C + 64D) = -\frac{a+8b+27c+64d}{6(1+a+2b+3c+4d)^4}$, ou

(P) $\cdots\cdots A + 8B + 27C + 64D = -\frac{a+8b+27c+64d}{(1+a+2b+3c+4d)^4}$.

Or, dans le problême de Képler, $a = 2e$, $b = \frac{3}{4}e^2 + \frac{1}{8}e^4$; $c = \frac{1}{3}e^3$; $d = \frac{5}{32}e^4$ (3482); substituant ces valeurs dans l'équation (O), et réduisant, on a

$$A + 2B + 3C + 4D = -\frac{2e + \frac{3}{2}e^2 + e^3 + \frac{7}{8}e^4}{1 + 2e + \frac{3}{2}e^2 + e^3 + \frac{7}{8}e^4}.$$

Si l'on effectue la division en négligeant les puissances e^5, on aura

(Q) $\cdots A + 2B + 3C + 4D = -2e + \frac{5}{2}e^2 - 3e^3 + \frac{27}{8}e^4$.

Pour simplifier de la même maniere l'équation (P), il faut premièrement élever à la quatrieme puissance $(1 + 2e + \frac{3}{2}e^2 + e^3 + \frac{7}{8}e^4)$, qui est la valeur de $1 + a + 2b + 3c + 4d$. Dans cette opération, on peut négliger même la quatrieme puissance de e, parceque, dans la division, elle n'influe que sur la cinquieme. Alors, on a $(1 + 2e + \frac{3}{2}e^2 + e^3)^4 = 1 + 8e + 30e^2 + 72e^3$. En divisant par le second membre de cette équation la valeur de $a + 8b + 27c + 64d$, qui est $2e + 6e^2 + 9e^3 + 11e^4$, l'équation (P) deviendra

(R) $\cdots A + 8B + 27C + 64D = -2e + 10e^2 - 29e^3 + 65e^4$.

3485. Dans le problême de Képler, la série (K) a cette propriété que les coëfficiens a, c, etc., correspondans aux multiples impairs de u, contiennent seulement les puissances impaires de l'excentricité e, et que les coëfficiens b, d, etc., correspondans aux multiples pairs de u, renferment seulement les puissances paires de u. La même loi doit avoir lieu, par analogie, dans la série (L) composée sur le modele de la série (K); et l'on en a la preuve par l'équation de la forme (L), déja calculée par d'autres auteurs. Si donc on admet pour principe que la valeur des indéterminées A, C, doit être exprimée par les puissances impaires de e, et celles de B, D, par les puissances paires, on pourra tirer la valeur de ces quatre inconnues de deux seules équations (Q), (R), en les décomposant en quatre autres comme il suit.

$A + 3C = -2e - 3e^3$	$2B + 4D = \frac{5}{2}e^2 + \frac{27}{8}e^4$
$A + 27C = -2e - 29e^3$	$8B + 64D = 10e^2 + 65e^4$.

Au moyen de cet artifice, M. Cagnoli a tiré, des cinq équations finales seulement (3183), la valeur de neuf indéterminées, en poussant l'approximation de la série (L) jusqu'à sin. $9z$, et à la neuvieme

puissance de l'excentricité ; et il m'a dit n'y avoir employé que neuf heures de temps, tandis que M. Bardin, géometre de Sens, avoit employé plusieurs jours par la méthode de Clairaut, que j'avois expliquée dans les premieres éditions de ce livre.

3486. Voici l'expression entiere pour l'anomalie vraie que trouve M. Cagnoli, pag. 381 : $(u = z - (2e - \frac{1}{4}e^3 + \frac{5}{96}e^5 + \frac{107}{4608}e^7 + \frac{6217}{368640}e^9)$ sin. $z + (\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 + \frac{17}{192}e^6 + \frac{43}{5760}e^8)$ sin. $2z - (\frac{13}{12}e^3 - \frac{43}{64}e^5 + \frac{95}{512}e^7 - \frac{973}{61440}e^9)$ sin. $3z + (\frac{103}{96}e^4 - \frac{451}{480}e^6 + \frac{4123}{11520}e^8)$ sin. $4z - (\frac{1097}{960}e^5 - \frac{5957}{4608}e^7 + \frac{164921}{258048}e^9)$ sin. $5z + (\frac{1223}{960}e^6 - \frac{7913}{4480}e^8)$ sin. $6z - (\frac{47273}{32256}e^7 - \frac{1173271}{737280}e^9)$ sin. $7z + \frac{556403}{322560}e^8$ sin. $8z - \frac{10661993}{5160960}e^9$ sin. $9z$.

Les calculs précédens, que je n'ai fait qu'indiquer, pourront servir d'exemple, et exercer ceux qui auront envie de faire des progrès dans ce genre de calcul. Telle est la formule que j'ai annoncée (1252) : M. Jeaurat ne l'avoit poussée que jusqu'à e^6, et il résultoit 9″ d'erreur pour Mercure, à 90° d'anomalie moyenne (*Mém. présentés*, T. IV.).

On voit par là que le terme principal de l'équation est $2e$ sin. z, c'est-à-dire la double excentricité multipliée par le sinus de l'anomalie moyenne. Si, au lieu de $2e$, on mettoit la plus grande équation elle-même, en la nommant c, on auroit l'équation dans tout autre point égale à c sin. z, en négligeant les termes suivans, qui sont ordinairement fort petits. En effet, pour calculer la valeur de $2e$ sin. z, il faudroit réduire en secondes la double excentricité $2e$ (1242), et ce seroit à-peu-près la plus grande équation.

3487. On trouveroit, par une méthode semblable, la valeur r du rayon vecteur ; voici celle de M. Jeaurat : $r = 1 + \frac{1}{2}e^2 + (e - \frac{3}{8}e^3 + \frac{5}{192}e^5 - \frac{7}{9216}e^7)$ cos. $z + (-\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{3}e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \frac{1}{180}e^8)$ cos. $2z + (\frac{3}{8}e^3 - \frac{45}{128}e^5 + \frac{567}{5120}e^7)$ cos. $3z + (-\frac{1}{3}e^4 + \frac{2}{5}e^6 - \frac{8}{45}e^8)$ cos. $4z + (\frac{125}{384}e^5 - \frac{4375}{9216}e^7)$ cos. $5z + (-\frac{27}{80}e^6 + \frac{81}{140}e^8)$ cos. $6z + \frac{16807}{46080}e^7$ cos. $7z - \frac{128}{315}e^8$ cos. $8z$. Ces formules peuvent servir à résoudre le problême de Képler ; je préfere ordinairement la méthode indirecte (1238) ; mais la méthode analytique a son avantage quand il s'agit de construire des tables.

M. l'abbé Bossut, dans un mémoire sur l'orbite des planetes, imprimé en 1766, à la fin de ses *Recherches sur les altérations du mouvement moyen,* qui remporterent le prix de l'académie en 1762, a donné aussi une solution analytique très simple de ce problême de Képler.

Remarques pour les Calculs de l'Attraction.

3488. Les élémens du calcul des attractions célestes, que je vais bientôt expliquer, n'étant point dans les livres élémentaires, et ayant été négligés par ceux qui pouvoient les donner, je suis obligé d'éten-

dre mon introduction. Voici donc encore plusieurs propositions élémentaires qu'il est nécessaire de bien entendre pour passer au livre suivant.

Deux quantités finies, qui ne different entre elles que d'un infiniment petit, sont égales, même dans le calcul différentiel, où il ne s'agit cependant que du calcul des quantités infiniment petites : en effet, le calcul différentiel ne consiste que dans les rapports qu'ont entre elles des quantités infiniment petites (3439); ainsi une quantité infiniment petite ne peut pas se négliger par rapport à une autre quantité de même espece; mais, par rapport à une quantité finie, elle est totalement nulle, elle n'y ajoute rien et n'en peut rien ôter. Soit un triangle rectiligne BKL, rectangle en K (FIG. 292), dont l'angle B et le côté KL sont infiniment petits : l'angle L ne differe de l'angle droit que de la quantité de l'angle infiniment petit B ; dès lors il peut être pris également pour un angle droit, sans qu'il puisse en résulter de l'inexactitude dans le calcul des infiniment petits. Pour en sentir la vérité, tirons LD parallele à BK, et ED parallele à KL; ED sera égal à KL; mais EF ne differe de ED que d'une quantité FD, qui est un infiniment petit du second ordre (3490), et par conséquent absolument négligeable, même dans le calcul des infiniment petits; ainsi l'on pourra prendre l'angle FLK pour un angle droit.

3489. Il en est de même dans les triangles sphériques; l'arc CBF (planche XLIII, FIG. 327) étant supposé infiniment voisin de l'arc CEG, si l'on tire BE perpendiculaire à CB, elle sera également perpendiculaire sur CE, parceque l'angle E ne différera de l'angle B que d'un infiniment petit; et, ce qui pourroit en résulter dans les rapports des quantités infiniment petites, comme ED, DB, BE, ne seroit qu'un infiniment petit du second ordre, c'est-à-dire infiniment plus petit que les infiniment petits, comme je le supposerai (3998, *et suiv.*)

3490. DANS UN TRIANGLE BGH (FIG. 292), dont l'angle B est infiniment petit, et BG un côté infiniment petit, le côté GH est un infiniment petit du second ordre.

En effet, si l'on prenoit une quantité finie, comme BK, l'arc KL, qui mesure l'angle B, seroit de même ordre, c'est-à-dire un infiniment petit du premier ordre : mais BG est infiniment plus petit que BK; donc GH est infiniment plus petit que KL, ou que l'angle B, dont KL est la mesure; donc si l'angle B est infiniment petit, aussi bien que le côté BG, la ligne GH sera un infiniment petit du second ordre.

3491. Si à l'angle B, qui est un infiniment petit du premier ordre, on ajoutoit un infiniment petit du second ordre, il n'en résulteroit sur

GH qu'un infiniment petit du troisieme ; car puisque B, étant infiniment petit du premier, n'a produit pour GH qu'un infiniment petit du second, si vous l'augmentez d'un infiniment petit du second, vous n'aurez fait sur GH qu'une augmentation infiniment plus petite, c'est-à-dire du troisieme ordre.

3492. Il faut aussi considérer que BG ne differe de BH que d'une quantité infiniment plus petite que GH ; car BG étant pris pour sinus total, BH sera le cosinus de l'angle B ; mais le cosinus d'un arc infiniment petit differe du rayon d'une quantité infiniment plus petite que l'arc (3460), ou qui est, par rapport au rayon, un infiniment petit du second ordre ; donc, en supposant GH perpendiculaire sur BG, le côté BH ne differe de BG que d'un infiniment plus petit que GH, ou d'un infiniment petit du troisieme ordre, si BG est lui-même un infiniment petit ; ainsi nous les prendrons l'un pour l'autre (3537, etc.).

3493. De là il suit que, si l'on tire une tangente PA (FIG. 291) à un arc PB, supposé infiniment petit, le petit écart de la tangente, ou la quantité AB, ne différera du sinus verse PC de l'arc PEB que d'une quantité infiniment plus petite que AB. Soit tirée BG parallele et égale à CP ; l'angle ABG = PSA est infiniment petit ; donc les lignes AB et BG different d'une quantité infiniment plus petite que n'est AG, c'est-à-dire infiniment petite du second ordre par rapport à AB, et infiniment petite du quatrieme ordre, dans le cas où AB est elle-même un infiniment petit du second (3494).

3494. LE SINUS VERSE AE (planche XLIII, FIG. 315) d'un arc infiniment petit AP est égal à $\frac{AP^2}{AD}$; car, par la propriété connue du cercle, $EP^2 = AE \cdot ED$; donc $AE = \frac{EP^2}{ED}$: mais ED, ou ED + EA, c'est-à-dire AD, sont absolument la même chose, dès que AE est infiniment petite (3488) ; donc $AE = \frac{EP^2}{AD}$. A la place de EP, nous pouvons mettre l'arc AP, qui n'en differe que d'un infiniment petit du troisieme ordre (3459) ; donc nous aurons $AE = \frac{AP^2}{DA}$: ainsi les sinus verses sont comme les carrés des arcs, ou les arcs comme les racines des sinus verses, quand les arcs sont infiniment petits.

Si, dans la figure 291, on suppose l'arc PB infiniment petit, on aura $PC = \frac{PB^2}{2PS} = BG$: mais on a vu que BG ne differe pas de BA (3493); donc l'écart de la tangente, ou la petite ligne AB, $= \frac{PB^2}{2PS}$, qui est un infiniment petit du second ordre. On verra dans le livre suivant que cette expression est du plus grand usage pour la théorie des forces centrales.

3495. Le choix des unités, ou l'usage des équations qui n'expriment que des rapports, est une maniere utile de simplifier les calculs : nous en avons fait un usage fréquent dans ce livre ; mais de peur que cela ne paroisse embarrassant ou même suspect à quelques lecteurs, nous allons en expliquer le principe de la façon la plus élémentaire.

Toutes les fois qu'on a une proportion, on peut la réduire à une équation ; par exemple, si l'on a deux arcs très petits PE et PB (fig. 291), l'on aura cette proportion, $PD : PC :: PE^2 : PB^2$ (3494), d'où l'on tirera l'équation $PC = \frac{PD \cdot PB^2}{PE^2}$. Supposons que l'abscisse DP soit d'une ligne, et l'arc PE d'une seconde, et qu'on veuille exprimer toutes les abscisses, comme PC, en lignes, et tous les arcs PB en secondes, on a $PD = 1$ et $PE = 1$; donc l'équation précédente $PC = \frac{PD \cdot PB^2}{PE^2}$ se réduit à celle-ci, $PC = PB^2$, qui m'apprend que quand PB sera de deux secondes, ou égale à 2, l'abscisse $PC = PB^2$ sera égale à 4, c'est-à-dire de 4 lignes ; et ainsi de toutes les autres valeurs de PC. Donc, au moyen de ce qu'on a pris PD pour unité des abscisses, et PE pour unité des arcs, on aura $PC = PB^2$, quoique la ligne PC soit hetérogene à l'arc PB, ou d'une espece toute différente.

3496. Lorsqu'on a des temps t et T, des espaces e et E, des vîtesses v et V à comparer ensemble, on sait, par la nature du mouvement, que l'espace e est à l'espace E en raison composée de la vîtesse v à la vîtesse V, et du temps t au temps T ; car les corps parcourent d'autant plus d'espace que leur vîtesse est plus grande et dure plus long-temps ; on aura donc $e : E :: tv : TV$. Mais, si l'on prend le temps t d'une seconde pour unité, l'espace e d'un pied pour unité des espaces, et la vîtesse v d'un pied par seconde pour unité des vîtesses, l'on aura simplement $E = T \cdot V$, qui nous apprend que quand la vîtesse V sera de deux pieds par seconde, le temps T de deux secondes, on aura l'espace E de 4 pieds. Cette équation $E = TV$ exprime donc le rapport qu'il y a de E à e par le moyen de celui de tv à TV ; car elle revient au même que s'il y avoit $\frac{E}{e} = \frac{TV}{tv}$, équation qui marque l'égalité entre le rapport des espaces E, e, et celui des produits TV, tv, de la vîtesse et du temps. Ainsi l'équation $E = TV$ est aussi exacte que l'autre, dès qu'on suppose que chacune des lettres E, T, V, exprime une fraction d'une certaine unité d'espace, de temps et de vîtesse. Il en est de même de l'expression des forces attractives (3532).

3497. La même quantité, exprimée en fraction, peut appartenir

à différentes unités, en changeant le nombre des parties : une ligne est $\frac{1}{144}$ de pied ; si l'on veut exprimer le même mouvement en fraction du pouce, qui est plus petit, on aura $\frac{1}{12}$, qui est une fraction plus grande. Si un mouvement absolu de $1''$ est $\frac{1}{1296000}$ du mouvement diurne total, qui est de 360° en un jour, il sera $\frac{1}{3600}$ du mouvement annuel qui, dans le même temps, n'est que d'un degré environ, c'est-à-dire que la fraction qui exprime $1''$ sera 360 fois plus grande. Nous ferons usage de cette remarque pour la précession (3725).

3498. Par une suite de ces principes (3495), nous disons souvent qu'un arc infiniment petit est égal au rayon de l'arc multiplié par le petit angle dont il est la mesure (2202, 3605, 3686, 3761, etc.). Il est évident que plus on augmentera ou le rayon BK (FIG. 292) d'un petit arc KL, ou l'angle KBL, plus aussi le petit arc KL augmentera ; ainsi les petits arcs comme KL, GH, sont en raison composée de leurs rayons, et des angles dont ils sont la mesure. Appellons r le rayon, du le petit angle KBL, et dx le petit arc KL ; supposons que pour un rayon d'une perche, on ait un arc d'une ligne et un angle d'une minute, si tous les rayons sont exprimés en perches, les arcs en lignes, et les angles en minutes, on aura toujours $r\,du = dx$; par exemple, lorsque $r = 2$ perches et $du = 2'$, on aura $dx = 4$ lignes.

On peut concevoir encore autrement la vérité de cette équation $r\,du = dx$: supposons que l'arc dx soit exprimé en parties du rayon r, en sorte que $\frac{dx}{r}$ soit le sinus du petit angle du (3803), c'est-à-dire une fraction du rayon (3799) ; nous aurons précisément la même fraction, si nous comparons le petit angle du avec l'angle de 57°, qui est égal au rayon ; car le sinus d'un arc infiniment petit est de même longueur que l'arc ; ainsi le petit sinus comparé au rayon, ou le petit arc comparé avec l'arc égal au rayon, donneront exactement le même rapport ou la même fraction ; donc si nous convenons d'exprimer tous les angles ou arcs en parties de l'arc de 57°, comme cela se fait souvent, nous aurons véritablement $du = \frac{dx}{r}$, ou l'arc égal au sinus, c'est-à-dire $r\,du = dx$, parceque du et $\frac{dx}{r}$ sont alors des fractions égales. Si dx est la millieme partie du rayon, ou $= \frac{r}{1000}$, l'angle du sera aussi un millieme de l'angle qui répond à 57°. Nous en ferons usage (3602).

Lorsque, dans ces cas-là, on est obligé de faire du égal à la circonférence entiere du cercle, pour avoir une intégrale (3733, 3758), on met le double du nombre 3, 14 pour la circonférence (3467), c'est-à-dire 6, 28, qui suppose aussi que l'arc de 57°, ou le rayon du cercle, est l'unité.

3499. Les petits arcs, dont on fait un usage si fréquent dans les calculs, peuvent s'exprimer en secondes, ou en décimales du rayon : quand je dis qu'un arc est d'une seconde, cela veut dire qu'il est $\frac{1}{1296000}$ de la circonférence entiere, puisque l'on divise le cercle en 360°, ou 1296000″; mais il est souvent plus commode pour le calcul de dire que cet arc est $\frac{1}{206265}$ du rayon, et l'on y est obligé pour avoir une mesure commune entre les lignes droites et les petits arcs ; cela revient au même, puisque la longueur du rayon équivaut à 206265″. Pour s'en assurer, il suffit de dire : la circonférence (3467) est à un demi comme 1296000″ est à un quatrieme terme, qui sera 206264″, 80624.

Nous avons déja vu plusieurs occasions où les arcs étoient exprimés en parties du rayon (art. 1242, 2214, 2567), au lieu d'être en secondes : nous en verrons encore davantage dans le livre suivant ; car, dans tous les calculs de l'attraction, l'on prend pour unité la distance moyenne de la planete qui est attirée ; et toutes les autres quantités qu'on trouve sont des parties ou des fractions de celle-ci. Quand on veut à la fin du calcul les avoir en secondes, on les multiplie par 206265″ (3622, 3628, 3655) ; j'en ai fait sentir la raison (1242), et j'aurai soin de faire voir dans la suite que toutes les quantités trouvées par le calcul de l'attraction sont des fractions du rayon de l'orbite de la planete (3622). Il est évident (puisque la deux cent millieme partie du rayon vaut une seconde) que j'aurai autant de secondes qu'il y aura de deux cent milliemes du rayon dans une fraction donnée ; donc, pour avoir le nombre de secondes, il faudra diviser la fraction donnée par la deux cent millieme partie du rayon ; cela nous apprendra combien cette deux cent millieme partie du rayon, c'est-à-dire une seconde, est comprise de fois dans la fraction donnée. Ainsi, en divisant une fraction du rayon par $\frac{1}{206265}$, ou, ce qui revient au même, en la multipliant par 206265, nous aurons la quantité de secondes qu'elle contient. Puisque le nombre qu'exprime le rayon est 200000 fois plus grand que les secondes, les parties de seconde seront des fractions 200000 fois plus grandes que les parties du rayon (3497).

Les détails contenus dans ce XXIe livre étoient nécessaires pour servir d'introduction au livre suivant, et j'aurai soin de citer les articles précédens toutes les fois que j'en supposerai l'usage ; j'y ai renfermé une espece d'introduction à la géométrie nouvelle et à l'analyse des infinis ; mais comme le plus bel usage qu'on puisse faire de la géométrie transcendante est la recherche des mouvemens planétaires, j'ai borné mon introduction aux articles qui peuvent servir dans ce genre

de théorie. Je passe donc à l'explication de cette importante loi de l'attraction ; je tâcherai de faire voir d'abord par quels degrés on est parvenu à une aussi belle découverte ; et, comme elle a été contestée assez long-temps, je la démontrerai d'une maniere à lever tous les doutes, même pour ceux qui ne veulent point d'algebre ; enfin, j'y appliquerai le calcul, pour faire voir, d'une maniere convaincante, l'accord du principe de l'attraction avec les principaux phénomenes de l'univers. Ce petit Traité fut fait pour être expliqué au college royal en 1761, et, depuis ce temps-là, j'ai eu occasion de le rendre encore plus complet, plus élémentaire et plus clair.

LIVRE VINGT-DEUXIEME.

DE LA PESANTEUR, OU DE L'ATTRACTION DES PLANETES.

La pesanteur est cette force que nous éprouvons à chaque instant, par laquelle tous les corps tiennent au globe de la Terre, et y retombent d'eux-mêmes aussitôt qu'on les en eloigne et qu'ils sont libres.

3500. Cette pesanteur est l'effet d'une force universelle répandue dans toute la nature, et qui réside dans tous les corps, aussi bien que dans le globe de la Terre, comme nous le démontrerons bientôt (3517): mais il faut commencer par examiner ses effets sur la Terre, avant de la considérer dans le reste de l'univers.

3501. Le premier phénomene qu'on observe dans la pesanteur des corps terrestres est la vîtesse avec laquelle ils tombent vers la Terre: tous les corps, grands ou petits, quelles que soient leurs grosseurs, leurs pesanteurs, leurs densités, commencent à tomber avec une vîtesse de 15 pieds par seconde (ou plus exactement 15,0515, sous l'équateur); mais, après avoir parcouru 15 pieds dans la premiere seconde de temps, ils en parcourent trois fois autant dans la suivante, cinq fois autant dans la troisieme; les espaces parcourus en une seconde sont comme les nombres impairs 1, 3, 5, 7, 9, etc. Galilée reconnut le premier cette loi, confirmée ensuite par toutes les expériences, et par la théorie de la pesanteur.

3502. De là il suit que les espaces entiers parcourus depuis le commencement de la chûte sont comme les carrés des temps; car le corps qui n'avoit parcouru qu'une perche à la fin de la premiere seconde se trouve avoir parcouru en tout quatre perches au bout de deux secondes, neuf après trois secondes, etc.: donc les espaces parcourus dans la chûte des corps sont comme les carrés 1, 4, 9, 16, des temps 1, 2, 3, 4, que la chûte a duré.

3503. Ce fait, qui fut indiqué par l'expérience, est prouvé par la nature même de la chose: la gravité, étant une force continue, agit sans interruption sur le corps qui y est soumis pendant la durée de

sa chûte ; dès lors les espaces qu'elle lui fait parcourir doivent être comme les carrés des temps. En effet, exprimons les instans ou les petites parties de temps que dure la chûte, par les petites portions d'une ligne BK (FIG. 292), croissant également, ou qui soit divisée en parties égales BG, GM ; les vîtesses du corps qui tombe croissent dans la même proportion, puisqu'à chaque instant il survient un nouveau degré de vîtesse égal au précédent, qui ne le détruit point, mais qui se joint avec lui ; ces vîtesses peuvent donc s'exprimer légitimement par les ordonnées GH, KL du triangle, puisque ces ordonnées croissent uniformément, et comme les abscisses BG, BK, c'est-à-dire comme les temps. Les espaces parcourus à chaque partie de temps doivent être d'autant plus grands que le temps est plus long et la vîtesse plus grande ; ils sont donc comme le produit du temps multiplié par la vîtesse : or les instans sont exprimés par BG ou BK, et les vîtesses par GH ou par KL ; ainsi la valeur absolue des espaces parcourus pourra être exprimée par le produit des lignes BG et GH, ou par celui des lignes BK et KL, c'est-à-dire dans chaque cas par la surface du triangle. La surface du petit triangle BGH est à celle du grand BKL comme le carré de BG est à celui de BK ; donc les espaces parcourus sont comme les carrés des temps.

Si la vîtesse KL étoit constante, le temps BK étant le même, l'espace parcouru seroit le parallélogramme BKLN double du triangle ; ainsi l'espace parcouru uniformément, avec la vîtesse acquise, est double de celui que le corps a parcouru par le mouvement accéléré.

3504. Les espaces étant comme les carrés des temps, et les vîtesses comme les temps pendant lesquels elles ont été acquises, les espaces sont comme les carrés des vîtesses ; donc les vîtesses sont comme les racines des espaces parcourus, c'est-à-dire des hauteurs d'où les graves doivent tomber pour acquérir ces vîtesses.

On peut dire également que les vîtesses sont comme les racines des hauteurs doubles, c'est-à-dire des espaces qui seroient parcourus uniformément avec les mêmes vîtesses acquises[a].

3505. La force accélératrice qui agit continuellement sur les graves est à chaque instant proportionnelle à l'espace dde ; si cet espace

[a] Un temps 2 produit donc une vîtesse 2 et un espace 4 ; ainsi le corps remontant avec la vîtesse 2 parcouroit aussi un espace 4 ; Leibnitz et Bernouilli en concluoient que la *force vive* étoit comme le carré de la vîtesse : mais cet espace 4 en un temps 2 ne fait toujours que 2 en temps égal ; ainsi on peut dire également que cette force est comme la vîtesse simple, en considérant son effet dans un même temps. Cette fameuse question des forces vives, agitée si long-temps entre Leibnitz, Bernouilli et Wolf d'un côté, Desaguliers, Mairan, et les Anglois de l'autre, n'est donc véritablement qu'une question de mots.

δe, parcouru à chaque instant, étoit double, nous dirions que la force est double ; car nous n'avons pas d'autre maniere d'exprimer une force que par l'espace qu'elle fait décrire en un temps donné. Ainsi nous supposerons toujours que la force accélératrice est proportionnelle à l'espace qu'elle fait parcourir dans un petit espace de temps.

3506. On doit étendre la proposition des espaces qui sont comme les carrés des temps à toute force attractive constante, c'est-à-dire à toute force qui agit uniformément, constamment, et sans interruption ; les espaces parcourus sont nécessairement alors comme les carrés des temps : nous ferons souvent usage de cette remarque ; nous supposerons toujours que si f est la force, δt le petit intervalle de temps, et δe le petit espace, on doit avoir $f \delta t^2 = \delta e$; car l'espace parcouru δe est d'autant plus grand que la force est plus considérable, et que le carré du temps est plus long. Ainsi, pour comparer la force d'une planete quelconque avec la force que la Terre exerce sur les corps graves, supposons que f est la force accélératrice d'une autre planete, comme la Lune, en sorte que f soit $\frac{1}{66}$ de la force de la Terre, à pareille distance, et δt un nombre de secondes, comme 4″; on aura l'espace que cette force f feroit parcourir en 4″ égal à $f \delta t^2 = \frac{1}{66} \cdot 16$, ou $\frac{16}{66}$ des 15 pieds que la Terre fait parcourir aux corps terrestres (3501). Si la force n'est pas constante et uniforme, l'augmentation de la vîtesse est, à chaque moment, en raison composée de la force, et du temps pendant lequel cette force s'exerce, comme nous l'avons supposé (2198).

3507. De ce que toutes les forces accélératrices constantes font parcourir des espaces qui sont comme les carrés des temps, on avoit conclu que les équations séculaires qu'on admettoit autrefois dans les planetes devoient être comme les carrés des temps (1166), et cela suit des mêmes raisonnemens ; car, si la cause agit toujours également, et que son effet ne soit jamais détruit, cet effet croîtra comme les carrés des temps ; mais les équations séculaires n'ont plus lieu.

3508. La même loi s'observe dans les mouvemens célestes ; une planete ne se meut dans une orbite que parcequ'elle est sans cesse retenue par une force centrale (1231, et suiv.) ; aussi l'écart de la tangente, ou la petite ligne AB (FIG. 291), qui marque l'effet de la force centrale, et la quantité dont cette force retire la planete du mouvement rectiligne, est comme le carré des temps qui sont exprimés par les petits arcs décrits (3494).

3509. Quand un corps, au lieu de descendre verticalement, descend le long d'un plan incliné, sa vîtesse est moindre le long du plan,

parcequ'il n'y a qu'une partie de la gravité naturelle qui soit employée à agir le long du plan. Soit le plan incliné NA (planche XLIV, FIG. 331); supposons la gravité naturelle exprimée par la ligne verticale BA; elle se décompose en deux forces BN et NA (1232), et il n'y a que la force NA qui soit employée à faire descendre le corps N le long du plan NA : si donc NA n'est que la moitié de BA, la force accélératrice du corps N sera diminuée de moitié, et le corps emploiera le même temps à parcourir le plan incliné NA, ou la ligne verticale BA. Ainsi, dans un cercle BNMA, toutes les cordes telles que MA, NA, BA, sont parcourues exactement dans le même espace de temps.

De plus, BA : NA :: NA : AQ; donc si la hauteur AQ du plan incliné NA est la moitié de la longueur du plan, la force accélératrice est réduite à moitié, et le corps N emploiera, à parcourir NA, un temps double de celui qu'il emploieroit à parcourir cette ligne avec la force de la gravité naturelle; ainsi le temps de la chûte, le long de NA, est à celui qui auroit lieu avec la gravité toute entiere comme NA est à QA.

3510. Si deux corps descendent, l'un dans une courbe GKIF (FIG. 332), et l'autre dans une ligne droite verticale CDEF, et qu'on les considere sur une même ligne horizontale EI, l'un quand il passe en D, l'autre quand il passe en K, on trouve pour tous deux la même quantité d'accélération. En effet, supposons d'abord qu'ils partent ensemble de D et de K, que DE = NI exprime la force de la pesanteur naturelle, qui est la même pour tous les deux; la force NI se décompose, suivant NT et TI, et la force TI est la seule qui concoure à augmenter le mouvement le long de KI; donc les accélérations des deux corps D et K sont comme les forces accélératrices, ou comme DE est à TI : mais le temps de la chûte le long de KI est à celui qui auroit lieu avec la gravité naturelle, comme KI est à NI (3509), et les forces accélératrices sont comme les temps pendant lesquels elles agissent (3506); donc la force qui agit sur le corps D est à celle qui agit sur le corps K en raison composée de DE à TI, et de DE à KI, ou comme $DE^2 : TI \cdot KI$; donc les accélérations sont comme $DE^2 : TI \cdot KI$: mais ces deux quantités sont égales, parceque les triangles semblables KNI, TNI, donnent cette proportion, KI : NI ou DE :: NI : TI; ainsi les accélérations des deux corps en D et en K sont égales. Il en sera de même dans les instans suivans: ainsi, quoique les corps soient descendus des points C et G, la même égalité a lieu sur la ligne horizontale DK.

De là il suit que lorsqu'un pendulle CF oscile dans un arc de cercle

GKF, en partant du point G, sa vîtesse en K est égale à celle du corps libre qui seroit tombé de la même hauteur, ou de C en D, puisque, dans tous les points correspondans à même hauteur, les accélérations ont été les mêmes; ainsi sa vîtesse est aussi comme la racine de la hauteur CD.

3511. *Trouver la durée de l'oscillation du pendule* CN (fig. 331) *dans un arc* AN *supposé infiniment petit.* Considérons le corps qui décrit l'arc NMA lorsqu'il est au point M de sa chûte; tirons les cordes AM, AN; ces cordes étant infiniment proches l'une de l'autre, leur différence pourra être prise pour l'arc NM; il n'en différeroit que d'un infiniment petit du troisieme ordre (3459). Soit AC$=a$, AQ$=b$, AP$=x$; et, ayant décrit sur AQ un demi-cerle ARQ, soit l'arc AR$=z$. A cause des triangles semblables ANB, ANQ, l'on a AB : AN :: AN : AQ, ou AN$=\sqrt{2ab}$. De même, à cause des triangles AMB, AMP, l'on aura AB : AM :: AM : AP, ou AM$=\sqrt{2ax}$; donc la différence de ces deux lignes, ou l'arc NM, $=\sqrt{2ab}-\sqrt{2ax}$. Prenons la différentielle Mm de cet arc MN, afin de pouvoir supposer un mouvement uniforme pendant le temps que le corps parcourra la ligne infiniment petite Mm; cette différentielle (3434) est $\frac{-2a\,dx}{2\sqrt{2ax}}$, ou $\frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{2x}}$; c'est le petit espace parcouru, c'est-à-dire Mm. La vîtesse acquise par le corps, depuis N jusqu'en M, est comme la racine de la hauteur QP, ou $\sqrt{2(b-x)}$ (3510); donc le temps dt employé à parcourir Mm, ou l'espace divisé par la vîtesse, sera $=\frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{2(b-x)}\sqrt{2x}}=\frac{dx\sqrt{a}}{2\sqrt{bx-xx}}=dt$. Cette expression contient la différentielle d'un arc de cercle; car si l'on imagine un demi-cercle ARQ (fig. 331), dont le diametre est b, le rayon $\frac{1}{2}b$, et les abscisses $b-x$, et x, ce demi cercle auxiliaire, qui doit servir à exprimer l'intégrale, donnera cette proportion: la différentielle de l'arc AR est à celle du cosinus, ou à celle de l abscisse AP, qui est x, comme le rayon est au sinus RP (3448); le sinus est $\sqrt{bx-xx}$; ainsi $dz : -dx :: \frac{b}{2} : \sqrt{bx-xx}$; donc on aura $dz=\frac{-b\,dx}{2\sqrt{bx-xx}}$, et $\frac{2dz}{b}=\frac{-dx}{\sqrt{bx-xx}}$; donc dt, ou $\frac{dx}{\sqrt{bx-xx}}\cdot\frac{\sqrt{a}}{2}=\frac{2dz}{b}\cdot\frac{\sqrt{a}}{2}=\frac{dz\sqrt{a}}{b}$, dont l'intégrale $t=\frac{z\sqrt{a}}{b}=\frac{\text{arc AR}}{\text{AQ}}\cdot\sqrt{\text{AC}}$. Si l'on fait cet arc auxiliaire z ou AR$=180°$, et c égal à la circonférence pour le diametre 1, on aura $\frac{c}{2}=\frac{\text{arc AR}}{\text{AQ}}$, et $t=\frac{c}{2}\sqrt{\text{AC}}$. Le temps par le diametre AB$=2a$ est (fig. 331)$=\sqrt{4a}=2\sqrt{a}$, et le temps de l'oscillation entiere est

$c\sqrt{AC} = c\sqrt{a}$; donc le temps par le diametre est à celui de l'oscillation entiere $:: 2\sqrt{a} : c\sqrt{a} :: 2 : c :: 1 : \frac{c}{2}$.

3512. Si, au lieu de la demi-circonférence, on veut employer la circonférence entiere, ou doubler le second terme, on ne prendra que la moitié du premier, c'est-à-dire la moitié du temps par le diametre; mais les espaces parcourus sont comme les carrés des temps; et, dans la moitié du temps, l'espace est quatre fois moindre; ainsi il ne faut prendre que la moitié du rayon : donc le temps de l'oscillation entiere est au temps de la chûte par la moitié du pendule CA, comme la circonférence est au diametre (Huygens, *Horol. oscill.*): nous en ferons usage pour déterminer la distance de la Lune à la Terre (3577).

3513. De là il suit que la longueur d'un pendule est en raison inverse du carré du nombre de ses oscillations; car si l'on alonge le pendule, la durée de la chûte augmente comme la racine de la longueur, puisque les espaces sont comme les carrés des temps, et la durée de l'oscillation augmente dans le même rapport; mais le nombre des oscillations, en une heure, par exemple, est en raison inverse de la durée de chacune; donc il est en raison inverse de la racine du pendule.

Il en résulte encore que le pendule à secondes augmente dans le même rapport que la gravité; car le temps de la chûte par la moitié du pendule est toujours à-peu-près un tiers de seconde (3512): si la pesanteur augmente, il faut, pour que le temps soit le même, que le pendule augmente dans le même rapport. (*Euleri Mechanica*, T. II, art. 178.)

Si l'on transporte en différens pays un pendule invariable (2716), le carré du nombre des oscillations qu'il fera dans un jour augmentera comme la longueur du pendule simple, ou comme la pesanteur dans chaque pays; car la durée d'une oscillation entiere est comme la chûte par la moitié du pendule; si la gravité et l'espace parcouru dans un même temps deviennent plus grands, le temps par la moitié du pendule deviendra plus court en raison inverse de la racine de l'espace, ou de la gravité, le carré du temps de l'oscillation diminuera dans le même rapport; donc le carré du nombre des oscillations, en un temps donné, augmentera comme la gravité.

3514. Il peut se présenter une difficulté sur la durée de cette oscillation le long de l'arc NMA : on a supposé l'arc égal à la corde; cependant la corde seroit parcourue dans un temps égal à celui de la chûte BA, qui est de 38‴ (3511), et l'arc NMA est parcouru dans

l'espace

l'espace de $30'''$, quantité qui est sensiblement différente de la premiere ; cela vient de ce que la distribution de la vîtesse accélérée du corps qui tombe le long de l'arc est fort différente de celle du corps qui tombe le long de la corde ; l'arc est d'abord moins incliné que la corde, mais à la fin il est tout-à-fait horizontal. Le point M de l'arc et le point D de la corde, situés sur la ligne horizontale MDP, sont ceux où la vîtesse acquise est la même : or NM et ND different entre elles d'une quantité qui leur est comparable, et qui ne peut point se négliger, étant un infiniment petit comme elles, parceque l'angle D est un infiniment petit du second ordre, étant opposé au sinus verse PA, qui est du second (2712), lorsqu'on suppose AM un infiniment petit du premier ; ainsi le temps par NM et le temps par ND doivent aussi différer sensiblement (*Mém. acad.,* 1744).

3515. L'espace que les corps graves parcourent en une seconde, par l'effet de la pesanteur, se trouve avec beaucoup de précision, et à un quart de ligne près, par le moyen du pendule à secondes. Si l'on appelle p la longueur du pendule à secondes (2712), et c la circonférence (c'est à-peu-près le nombre 3), on aura l'espace parcouru en $1''$, $\frac{pc^2}{2}$. En effet la circonférence est au diametre comme le temps d'une petite oscillation, ou $1''$, est au temps qui répondroit à la descente perpendiculaire sur la moitié du pendule, ou 18 pouces, en sorte que le temps est de $19'''$, ou $0''31831$; mais les espaces parcourus sont comme les carrés des temps ; donc $(19''')^2$ est à $(60''')^2$ comme 18 pouces sont à l'espace parcouru en $1''$: on trouve 15,0515 sous l'équateur, où le pendule est de $36^{po.}\ 7^{lig.}\ 21$ (2712). Il suffit d'ajouter le logarithme constant 8,5349072 avec celui du pendule, réduit à la température moyenne dans le vide, au niveau de la mer, à des arcs très petits, et exprimé en lignes, pour avoir l'espace parcouru en $1''$, exprimé en pieds. Je parlerai de la diminution produite par la force centrifuge (3543). Si p = long. du pendule, g = l'espace des graves, on aura $g = \frac{1}{2}\pi^2 . p.$ et $p = \frac{g}{\frac{1}{2}\pi^2}$

3516. Ainsi la longueur du pendule, observée sous l'équateur et au Spitzberg (2712), nous fait connoître que l'espace parcouru en $1''$ est 15,0515 sous l'équateur, et 15,1265 à $79° 50'$ de latitude ; ces espaces different de $\frac{1}{189}$: on en conclut que la pesanteur est plus grande au Spitzberg que sous l'équateur dans le même rapport.

3517. Après avoir vu l'effet de la pesanteur sur la Terre, examinons si cette force a lieu dans les autres corps célestes. Leur figure ronde suffit d'abord pour démontrer qu'il y a dans chaque planete une pesanteur semblable à celle qu'on éprouve sur notre globe. La Terre s'est arrondie dès l'instant de sa formation, et la mer, qui l'en-

vironne s'arrondit également, parceque toutes les parties tendent vers un centre commun autour duquel elles se disposent et s'arrangent pour trouver l'équilibre : nous faisons abstraction de la petite différence produite par la force centrifuge, qui cause un petit aplatissement (3752). Cet équilibre ne pourroit avoir lieu si une partie de l'océan étoit plus éloignée du centre que l'autre (2672); voilà pourquoi la pesanteur mutuelle des parties d'un corps doit nécessairement y produire la rondeur.

3518. Il y a donc dans toutes les planetes une pesanteur semblable à celle qu'on éprouve sur la Terre; ainsi la matiere de la Terre n'est pas la seule qui soit douée de cette faculté de retenir et d'attirer les corps environnans; de là il étoit naturel de conclure qu'il y avoit dans la matiere en général une force attractive, et que par-tout où il y avoit de la matiere, il y avoit une attraction. Suivons donc le progrès de nos connoissances, et voyons comment a dû se découvrir cette fameuse loi de l'attraction universelle, source de tant d'autres découvertes, et d'où l'on tire encore chaque jour les conséquences les plus singulieres et en même temps les plus conformes à l'observation.

3519. ANAXAGORE, Democrite, Épicure, admettoient déja cette tendance générale de la matiere vers les centres communs, soit sur la Terre, soit ailleurs[a]; Plutarque en parle d'une maniere assez claire dans l'ouvrage sur la cessation des oracles (T. V, *pag.* 346 de la trad. de M. Ricard, *Paris*, 1786); il y explique comment chaque monde a son centre particulier, ses terres, ses mers, et la force nécessaire pour les rassembler et les retenir autour du centre.

Plutarque parle aussi de l'effet de la force centrifuge et de la pesanteur. Vous craignez, dit-il, (si la Lune est d'une nature terrestre) qu'elle ne tombe sur nos têtes; mais sa chûte est prévenue par son mouvement, et par l'impétuosité de sa révolution. C'est ainsi que ce qu'on met dans une fronde est empêché de descendre par sa vîtesse circulaire. Le mouvement que chaque corps tient de sa nature l'entraîne, pourvu qu'il ne soit point détourné par quelqu'autre. La pesanteur n'entraîne pas la Lune, parceque l'effet en est empêché par le mouvement de révolution. On devroit sans doute s'étonner si la Lune étoit immobile comme la Terre; mais dans son état actuel, il y a une cause puissante qui l'empêche de s'approcher de nous (*De facie in orbe Lunae*).

[a] Empedocle, plus de 500 ans avant notre ere, disoit que l'univers avoit été arrangé par deux forces, *amour* et *discorde*, c'est-à-dire la force centripete et la force centrifuge (Freret, *Acad. des Inscrip.*, XVIII, 101). Il semble que Pythagore connut même la loi suivant laquelle l'attraction diminue quand on s'éloigne du centre (3526).

3520. COPERNIC avoit la même idée de l'attraction générale, car il attribuoit la rondeur des corps célestes à la tendance qu'ont leurs différentes parties à se réunir (*De Revolut.*, c. 9); d'où il suivoit que cette tendance avoit lieu dans chaque planete aussi bien que sur la Terre. TYCHO lui-même admettoit une force centrale dans le Soleil (1102), pour retenir les planetes dans leurs orbites autour de lui, quoique cette attraction fût difficile à concilier avec son systême. KÉPLER, génie plus vaste et plus hardi que tous ceux qui l'avoient précédé, porta ses idées plus loin; il sentit que l'attraction étoit générale et réciproque, et que l'attraction du Soleil devoit s'étendre aussi à la Terre (*De stella Martis*, 1609, *Epitome astron. Cop.* 1618, pag. 555; *Hist. des Math.* par M. MONTUCLA, 1758, Tom. II, *pag.* 213, 527, 538); dans la préface de sa Physique céleste (1206), il dit précisément que si la Lune et la Terre n'étoient pas en mouvement, elles s'approcheroient l'une de l'autre, et se réuniroient à leur centre de gravité commun. Il dit ailleurs que l'action du Soleil produit les inégalités de la Lune; que l'action de la Lune produit le flux et le reflux de la mer; que le Soleil attire les planetes et en est attiré.

Et comment ne pas tirer cette conséquence des phénomenes que l'on observoit? la pesanteur des corps terrestres s'étend sur le sommet des montagnes; elle s'étend jusqu'au plus haut des airs, d'où la grêle tombe avec violence aussitôt qu'elle est formée: il étoit donc évident que cette pesanteur devoit s'étendre plus loin que la Terre, et au-delà des nuages qui l'environnent. La Lune n'est pas fort éloignée de la Terre, dut dire Képler, elle tourne autour de la Terre, elle y présente toujours le même côté; n'y auroit-il point vers la Lune un reste de cette pesanteur qui ramene tout à la Terre? les corps qui tournent en rond s'échappent bientôt par la tangente, s'ils ne sont retenus (1231): la Lune devroit s'échapper de son cercle (comme une goutte d'eau s'échappe de dessus une meule), si la Terre n'avoit assez de force pour l'en empêcher. Ce même raisonnement fit trouver ensuite à Newton quelle étoit la loi de cette pesanteur (3526).

3521. Képler ayant une fois conçu que la Lune étoit attirée par la Terre, et considérant que chaque planete attiroit aussi (3517), devoit en conclure que la Lune attiroit la Terre; mais, en considérant les eaux de la mer, qui se soulevent tous les jours quand la Lune passe au méridien, il ne douta plus que ce ne fût là un effet de l'attraction lunaire. Aussi Képler s'exprime sur la gravité d'une façon bien remarquable pour ce temps-là. Il voyoit toutes les planetes assujetties au Soleil, et la Lune à la Terre, comme les corps terrestres; il sentoit

que l'attraction étoit générale entre tous les corps de l'univers; que deux pierres se réuniroient, par leur attraction mutuelle, si elles étoient hors de la sphere d'activité de la Terre; que les eaux de la mer s'éleveroient vers la Lune si la Terre ne les attiroit, et que la Lune retomberoit vers la Terre, s'il n'y avoit une force avec laquelle elle décrit son orbite et qui la soutient. Voici ce passage remarquable.

Vera igitur doctrina de gravitate his innititur axiomatibus.... Si duo lapides in aliquo loco mundi collocarentur, propinqui invicem, extra orbem virtutis tertii cognati corporis; illi lapides, ad similitudinem duorum magneticorum corporum, coirent loco intermedio, quilibet accedens ad alterum tanto intervallo quanta est alterius moles in comparatione. Si Luna et Terra non retinerentur vi animali, aut aliâ aliquâ aequipollenti, quaelibet in suo circuitu, Terra ascenderet ad Lunam quinquagesimâ quartâ parte intervalli; Luna descenderet ad Terram quinquagintâ tribus partibus intervalli, ibique jungerentur: posito tamen quod substantia utriusque sit unius et ejusdem densitatis. Si Terra cessaret attrahere ad se aquas suas, aquae marinae omnes elevarentur et in corpus Lunae influerent (*Nova Phys. cœl. Introd.* pag. 5). Il explique ensuite très bien les marées par l'attraction de la Lune sur l'océan (3768).

3522. La comparaison entre les attractions célestes et celle de l'aimant paroissoit d'autant plus naturelle à Képler que Gilbert considéroit la Terre comme une espece de grand aimant. *Perbellum equidem attigi exemplum magnetis, et omnino rei conveniens, ac parum abest quin res ipsa dici possit. Nam quid ego de magnete tanquam de exemplo? Cùm ipsa Tellus, Gulielmo Gilberto, Anglo, demonstrante, magnus quidam sit magnes* (cap. 34, *pag.* 176)[a].

3523. La lecture des ouvrages de Képler suffisoit pour persuader aux savans que cette attraction de la matiere étoit universelle; aussi voyons-nous qu'en Angleterre et en France, même avant Newton, plusieurs auteurs en parlent disertement.

On trouve dans Fermat le passage suivant: « La commune opinion

[a] Les découvertes de Képler avoient été préparées et annoncées par les écrits de trois hommes célebres; Copernic, Tycho et Gilbert; il leur rend lui-même ce témoignage: *Veritatis in me sit amor, an gloriæ, loquantur dogmata mea, quæ pleraque aliis accepta fero: totam Astronomiam Copernici hypothesibus de mundo, Tychonis vero Brahei observationibus, denique Gulielmi Gilberti Angli magneticæ philosophiæ inædifico.* (Epit. Astr. Cop. *pag.* 429). L'ouvrage dont parle ici Képler a pour titre: *Gulielmi Gilberti Colcestr. medici Londinensis, Tractatus de magnete, et de magno magnete Tellure* (Lond. 1600, *Sedini,* 1633).

« est que la pesanteur est une qualité qui réside dans le corps même « qui tombe ; d'autres sont d'avis que la descente des corps procede « de l'attraction d'un autre corps qui attire celui qui descend, comme « la Terre. Il y a une troisieme opinion *qui n'est pas hors de vraisem-* « *blance,* que c'est une attraction mutuelle entre les corps, causée « par un desir naturel que les corps ont de s'unir ensemble ; comme « il est évident au fer et à l'aimant, lesquels sont tels, que si l'aimant « est arrêté, le fer, ne l'étant pas, l'ira trouver, et, si le fer est ar- « rêté, l'aimant ira vers lui ; et, si tous deux sont libres, ils s'appro- « cheront réciproquement l'un de l'autre, en sorte toute fois que « le plus fort des deux fera le moins de chemin » (*Var. Op. Mat.*, pag. 24.).

3524. Bacon, dans ce livre fameux qui a pour titre *Instauratio magna* ou *Novum organum* (Liv. II, art. 36, 45 et 48), parle souvent de l'attraction magnétique de la Terre sur les corps graves, de la Lune sur les eaux de la mer, du Soleil sur Mercure et Vénus ; il propose des expériences propres à vérifier ces attractions ; et, quoiqu'il m'ait paru, à la lecture de cet ouvrage, que l'auteur n'étoit point au fait de l'astronomie, on voit cependant que ce qu'il dit des attractions célestes étoit propre à fournir des idées très lumineuses et très physiques sur la gravité universelle.

Galilée reconnoissoit aussi cette sympathie de la Lune avec la Terre (3295) : Hévélius attribuoit au Soleil une force semblable (3097).

L'attraction générale étoit sur-tout le principe fondamental du systême que Roberval publia en 1644, intitulé *Aristarchi Samii de mundi systemate liber ;* il attribue à toutes les parties de matiere dont l'univers est composé la propriété de tendre les unes vers les autres. C'est pour cela, dit-il, qu'elles se disposent sphériquement, non par la vertu d'un centre, mais par leur attraction mutuelle, et pour se mettre en équilibre les unes avec les autres. Pascal avoit la même idée (Maupertuis, *Mém. acad.*, 1734), de même que Borelli *Theoricae medic. planet.* 1666, Liv. I, *c.* 2).

3525. On voit encore l'attraction mutuelle de tous les corps célestes indiquée d'une maniere positive dans un livre du docteur Hooke (504). « J'expliquerai, dit-il (*pag.* 27), un systême du monde qui differe, « à plusieurs égards, de tous les autres, mais qui s'accorde parfaite- « ment avec les regles ordinaires de la mécanique ; il est fondé sur « ces trois suppositions ; 1°. que tous les corps célestes, sans en ex- « cepter aucun, ont une attraction, ou gravitation, vers leur propre « centre, par laquelle, non seulement ils attirent leurs propres par- « ties, et les empêchent de s'écarter, comme nous le voyons sur la

« Terre, mais attirent encore les autres corps célestes qui sont dans
« la sphere de leur activité...... ; 2°. que tous les corps qui ont reçu
« un mouvement simple et direct continuent à se mouvoir en ligne
« droite jusqu'à ce que, par quelque autre force effective, ils en soient
« détournés et forcés à décrire un cercle, une ellipse, ou quelque
« autre courbe composée ; 3°. que les forces attractives sont d'autant
« plus puissantes dans leurs opérations que le corps sur lequel
« elles agissent est plus près de leur centre. Pour ce qui est de la *pro-*
« *portion* suivant laquelle ces forces diminuent à mesure que la dis-
« tance augmente, j'avoue que je ne l'ai pas encore vérifiée..... Je
« donne cette ouverture à ceux qui ont assez de loisir et de connois-
« sances ». Cette loi, qu'il proposoit de trouver, fut précisément celle que chercha Newton ; aussi voyons-nous qu'il cite le docteur Hooke, au commencement de son livre *De mundi systemate* (*Newtoni Opuscula,* 1744). Voyez la traduction de Newton par madame du Châtelet, et l'*Histoire des Mathém.* de M. Montucla, 1758, T. II, *pag.* 527.

3526. Il ne manquoit donc plus à l'attraction qu'un géometre qui découvrît la loi suivant laquelle elle décroît : Pythagore l'avoit connue à en juger par son harmonie des spheres, dont parlent Pline, Macrobe et Censorin ; le Soleil agissoit sur les planetes en raison harmonique des distances (*Gregory, praef. in fine*) ; ce qui revient à la raison inverse des carrés : mais cette loi étoit oubliée ; elle n'étoit point démontrée, ou plutôt il falloit la découvrir, et Newton étoit plus que personne en état de le faire ; s'il n'eût pas trouvé cette loi, je crois qu'avant la fin du dernier siecle d'autres géometres l'auroient apperçue ; les choses étoient trop avancées pour qu'on pût l'ignorer plus long-temps ; mais Newton en eut la gloire. Je vais tracer l'histoire de cette découverte, en traduisant un passage de Henri Pemberton, contemporain et ami de Newton.

« Les premieres idées qui donnerent naissance au livre des *Prin-*
« *cipes* de Newton lui vinrent en 1666, lorsqu'il eut quitté Cambridge
« à l'occasion de la peste. Il se promenoit seul dans un jardin, médi-
« tant sur la pesanteur et sur ses propriétés. Cette force, disoit-il,
« ne diminue pas sensiblement, quoiqu'on s'éleve au sommet des
« plus hautes montagnes ; il étoit donc naturel d'en conclure que
« cette puissance devoit s'étendre beaucoup plus loin ; pourquoi ne
« s'étendroit-elle pas jusqu'à la Lune? Mais si cela est, il faut que
« cette pesanteur influe sur le mouvement de la Lune ; peut-être
« sert-elle à retenir la Lune dans son orbite : et, quoique la force de
« la gravité ne soit pas sensiblement affoiblie par un petit changement

« de distance, tel que nous pouvons l'éprouver ici-bas, il est très « possible que, dans l'éloignement où se trouve la Lune, cette force « soit fort diminuée. Pour parvenir à estimer quelle pouvoit être la « quantité de cette diminution, Newton songea que si la Lune étoit « retenue dans son orbite par la force de la gravité, il n'y avoit pas « de doute que les planetes principales ne tournassent autour du Soleil en vertu de la même puissance. En comparant les périodes des « différentes planetes avec leurs distances au Soleil, il trouva que, si « une puissance semblable à la gravité les retenoit dans leurs orbites, « sa force devoit diminuer en raison inverse du carré de la distance « (3546). Il supposa donc que le pouvoir de la gravité s'étendoit jus- « qu'à la Lune, et diminuoit dans le même rapport, et il calcula si « cette force seroit suffisante pour retenir la Lune dans son orbite. Il « faisoit ces calculs dans un temps où il n'avoit pas sous la main les « livres qui lui auroient été nécessaires; et il supposoit, suivant l'es- « time commune des géographes et des marins, avant la mesure de « la Terre faite par Norwood (2640), que 60 milles d'Angleterre fai- « soient un degré de latitude sur la Terre: mais comme cette suppo- « sition étoit très defectueuse, puisque chaque degré doit contenir « $69\frac{1}{2}$ milles (2650), le calcul ne répondit point à son attente; il crut « alors qu'il y avoit au moins quelque autre cause jointe à la pesan- « teur qui agit sur la Lune, et il abandonna ses recherches sur cette « matiere. Quelques années après, une lettre du docteur Hooke lui « fit rechercher quelle est la vraie courbe décrite par un corps grave « qui tombe, et qui est entraîné par le mouvement de la Terre sur « son axe. Ce fut une occasion pour Newton de reprendre ses pre- « mieres idées sur la pesanteur de la Lune. Picard venoit de mesurer « en France le degré de la Terre (2661), et, en se servant de ces me- « sures, Newton vit que la Lune étoit retenue dans son orbite par le « seul pouvoir de la gravité (3549); d'où il suivoit que cette gravité « diminuoit, pour un corps plus éloigné du centre de la Terre, de la « même maniere qu'il l'avoit autrefois conjecturé. D'après ce prin- « cipe, Newton trouva que la ligne décrite par la chûte d'un corps « étoit une ellipse dont le centre de la Terre occupoit un foyer; or les « planetes principales décrivent aussi des ellipses autour du Soleil « (1220): il eut donc la satisfaction de voir que cette solution, qu'il « avoit entreprise par pure curiosité, pourroit s'appliquer aux plus « grandes recherches. Il composa une douzaine de propositions rela- « tives au mouvement des planetes principales autour du Soleil. Plu- « sieurs années après, le docteur Halley étant allé voir Newton à « Cambridge, l'engagea, dans la conversation, à reprendre ses mé-

« ditations à ce sujet, et fut l'occasion du grand ouvrage des *Princi-*
« *pes*, qui parut vers le milieu de l'été 1687 (*A View of Sir Isaac*
« *Newton's Philosophy*, London 1728, *in*-4°. *Préface*) ». Cet ouvrage a été traduit en françois en 1755, *in*-8°. *Élémens de la Philosophie neutoniene.*

3527. J'ajouterai, d'après la vie de Newton (*Biographia britannica, in-fol.*), que c'est dans l'hiver de 1676 à 1677 qu'il trouva que les orbites elliptiques supposoient la force en raison inverse du carré de la distance, et à la fin de 1683, qu'il présenta les propositions dont nous venons de parler. Halley, vers la fin de 1683, apperçut que cette loi étoit une suite de celle de Képler; Hooke et Wren reconnurent aussi la regle de l'attraction vers le même temps, du moins Newton en convint dans le scholie de la proposition IV du premier livre; mais on croit que c'étoit par complaisance, et parcequ'il étoit ennemi de la dispute : et l'on voit que, dans une lettre du 20 juin 1686, il réfutoit les prétentions de Hooke; voyez la vie de Hooke (*Biographia britan.*). Au reste, Newton avoit sous les yeux plusieurs indications de cette attraction : la diminution du pendule observée à Cayenne (2669), l'aplatissement de Jupiter observé par Cassini, la libration de l'apogée de la Lune, remarquée par Horoccius (1435), etc.

Depuis ce temps-là, cette attraction universelle des planetes, la tendance réciproque de l'une à l'autre, a été prouvée par les faits de tant de façons différentes, elle se retrouve dans des circonstances si éloignées, enfin toutes les conséquences qu'on en tire sont si bien d'accord avec les phénomenes, qu'il n'est plus possible de la révoquer en doute.

3528. Voici une énumération succincte des phénomenes observés, qui, chacun séparément, suffiroient pour prouver l'attraction, quand on ignoreroit tous les autres, et qui nous procurent au moins quinze especes de preuves différentes de cette attraction universelle. I. Le flux et le reflux de la mer, qui fournit deux fois le jour la preuve la plus palpable et la plus frappante, pour tous les yeux, de l'attraction lunaire (3765). II. Les inégalités de la Lune, qui dépendent visiblement du Soleil (1455). III. Le mouvement des planetes autour du Soleil (1233), avec cette loi, que les carrés des temps sont comme les cubes des distances (1224, 3546). IV. La figure elliptique des orbites de la Lune autour de la Terre, de toutes les planetes et des cometes autour du Soleil (3582). V. La précession des équinoxes (3727). VI. La nutation de l'axe de la Terre, produite par l'action de la Lune (3735). VII. Les inégalités que Jupiter, Saturne, et toutes les planetes, éprouvent dans leurs différentes positions (1168, 3671).

VIII.

VIII. Les inégalités prodigieuses de la comete de 1759, dont la derniere révolution s'est trouvée de 585 jours plus longue que la précédente, suivant le calcul des attractions de Jupiter et de Saturne (3205). IX. L'aplatissement de Jupiter et de la Terre (3764). X. L'attraction des montagnes sur le pendule (2703). XI. Le changement de latitude et de longitude des étoiles (2750), et la diminution de l'obliquité de l'écliptique (2740). XII. Les mouvemens des apsides des planetes (1314 et suiv. 3672). XIII. Le mouvement de l'apogée de la Lune, qui est prodigieux (1432). XIV. Le mouvement des nœuds de toutes les planetes (1337, 3681), sur-tout des nœuds de la Lune, qui est si considérable et si sensible, que, dans neuf ans, l'orbite de la Lune se renverse, et qu'elle passe à 10° des étoiles qu'elle couvroit auparavant (1488). XV. Les inégalités des satellites de Jupiter (3018).

3529. De ces quinze especes de phénomenes, la plupart sont inexplicables dans le systême des tourbillons et du plein, et c'est avoir démontré d'une maniere complete l'impossibilité du systême des Cartésiens, que d'avoir prouvé l'existence de ces phénomenes, et la maniere dont ils résultent de l'attraction. Il ne sauroit y avoir actuellement un géometre, ou un astronome passablement instruit des phénomenes et des nouvelles théories, qui puisse rejeter l'attraction newtonienne.

3530. Plusieurs physiciens célebres se sont efforcés d'expliquer la loi universelle de l'attraction par une cause impulsive, par un fluide, comme l'éther, par le mouvement des atomes, etc.[a]. Mais en seroit-on plus avancé? il resteroit à expliquer la cause de ce mouvement primitif; or les causes premieres sont au-dessus de notre entendement.

Pour moi, je pense avec Maupertuis et la plupart des métaphysiciens anglois, que l'attraction dépend d'une propriété intrinseque de la matiere. « Si cette propriété étoit métaphysiquement impossible, « dit Maupertuis[b], les phénomenes les plus pressans de la nature « ne pourroient pas la faire recevoir; mais, si elle ne renferme ni im-

[a] Voyez sur-tout l'*Essai de Chymie méchanique* par M. le Sage, citoyen de Geneve, qui a remporté le prix de l'académie de Rouen, la Lettre du même auteur, dans le mercure de mai 1756, et son Mémoire intitulé *Lucrece neutonien* (*Mémoires de Berlin*, 1782). Il y a long-temps qu'il travaille à un grand ouvrage dans lequel il explique rigoureusement l'attraction et les autres grands phénomenes de la nature, par le mouvement en tout sens des corpuscules ultramondains. Il y avoit déja un ouvrage intitulé *Franc. Alb. Redekeri de causa gravitatis Meditatio*, Lemgoviæ *(Lemgou, en Westphalie)*, 1736, 64 pages *in*-12, dont M. le Sage fait cas. M. de Luc et M. Prevost ont fait usage de cette cause méchanique pour expliquer l'électricité, le magnétisme, etc.

[b] Discours sur les différentes figures des astres, 1732, *in*-8°.

« possibilité ni contradiction, on peut librement examiner si les « phénomenes la prouvent ou non; car dès lors l'attraction n'est plus « qu'une question de fait, et c'est dans le système de l'univers qu'il « faut aller chercher si elle est un principe qui ait effectivement lieu « dans la nature. Or certainement il n'y a point d'impossibilité mé- « taphysique ni de contradiction dans la loi de l'attraction; c'est-à- « dire que rien ne démontre la proposition contradictoire: *Les corps « célestes ne s'attirent point.* Je me flatte qu'on ne m'objectera pas « que cette propriété dans les corps, de peser les uns vers les autres, « est moins concevable que celles que tout le monde y reconnoît. La « maniere dont les propriétés résident dans un sujet est toujours in- « concevable pour nous; on ne s'étonne point de voir un corps en « mouvement communiquer ce mouvement à d'autres corps; l'habi- « tude qu'on a de voir ce phénomene empêche qu'on en voie le « merveilleux; mais au fond la force impulsive est aussi peu conce- « vable que l'attractive. Qu'est-ce que cette force impulsive? Com- « ment réside-t-elle dans les corps? Qui eût pu deviner qu'elle y ré- « side avant que d'avoir vu les corps se choquer?

« L'existence des autres propriétés dans les corps n'est pas plus « aisée à concevoir, et nous sommes par-tout obligés de supposer « des loix primitives dont nous ne connoissons ni la cause ni l'origine; « leur existence est la seule chose qui soit du ressort de l'esprit hu- « main, mais sur-tout de la géométrie.»

3531. Supposons donc l'existence de l'attraction universelle, et cherchons les effets qui doivent en résulter; leur accord avec les phénomenes observés et connus nous fera voir par-tout la certitude et l'évidence de cette loi.

Nous supposerons, comme il est naturel de le faire, que l'attraction est proportionelle à la masse ou à la quantité de matiere qui attire: on ne peut pas le démontrer par les faits, car nous ne pouvons juger de la quantité de matiere que par le poids ou l'attraction; mais à moins qu'on ne pût démontrer le contraire, on est obligé de supposer que chaque particule de matiere est douée de la même propriété, c'est-à-dire que l'attraction de deux particules sera double de l'effet d'une seule, et qu'en général l'attraction est proportionelle à la matiere qui attire.

La force avec laquelle une planete est attirée ne dépend point de la masse de cette planete attirée: l'expérience le prouve, puisque les grosses masses tombent avec la même vîtesse que les petites. On comprend d'ailleurs que si une seule particule de matiere est attirée avec une force quelconque, toutes les particules qui seront auprès

d'elles seront attirées chacune avec la même force; il n'y a aucune raison pour que la seconde soit attirée moins que la premiere, et la présence de la seconde ne change rien à la force qui agissoit sur la premiere; donc la force attractive ne dépend que de la masse qui attire, et non pas de celle qui est attirée.

3532. Il y a, dans la géométrie nouvelle, des expressions abrégées qui peuvent d'abord embarrasser; par exemple celle-ci: la masse du Soleil étant supposée S, la force qu'il exerce à la distance r, sur une planete quelconque, est $\frac{S}{r^2}$: il s'agit d'une force attractive, et on la suppose égale à une masse S divisée par le carré d'une distance; or les forces, les masses et les distances sont des choses hétérogenes et de nature fort différente. On peut demander comment il peut y avoir égalité entre des choses si disparates.

Pour le concevoir, il faut se rappeller ce que nous avons dit sur le choix des unités (3495); on verra que cette expression de forces est une proportion réduite en équation. On ne calcule l'effet d'une force qu'en la comparant avec une autre force; ainsi, en prenant la Terre pour terme de comparaison, la masse S du Soleil étant supposée 351886 fois plus considérable que celle de la Terre, et son rayon r, 111,45, c'est-à-dire 111½ fois plus grand que le rayon de la Terre, $\frac{S}{r^2}$ sera $\frac{351886}{(111)^2} = 28\frac{1}{2}$; cela veut dire que l'attraction du Soleil sur les corps solaires placés à sa surface est 28 fois plus grande que celle de la Terre sur les corps terrestres, et, qu'au lieu de parcourir 15 pieds en 1″, ils en parcourent 428: en effet la masse seule à distance égale feroit parcourir 531481 pieds; mais à une distance 111½ fois plus grande, l'attraction agit 12421 fois moins (3546); donc le Soleil fera parcourir vers sa surface 428 pieds par seconde, au lieu de 15, et la force $\frac{S}{r^2}$ vaut 28, en supposant que celle de la Terre est l'unité (3566).

3533. Si l'on cherche les dérangemens que la force du Soleil cause à la Lune, c'est en examinant le rapport qu'il y a entre la force du Soleil pour tirer la Lune de son orbite, et la force de la Terre pour l'y retenir, ou la quantité dont la force du Soleil peut balancer ou contrarier celle-ci. En faisant cette comparaison des forces, on prend pour unité la masse d'une planete, et l'on exprime les autres masses en parties de cette unité: on prend aussi une distance pour unité, et l'on exprime toutes les autres distances en unités ou en fractions de cette premiere distance, c'est-à-dire qu'on compare une fraction avec une autre (3495). Par exemple, on peut faire cette proportion: la force du Soleil sur la Lune est à la force de la Terre sur la Lune, dans sa

moyenne distance, en raison composée de la masse du Soleil à la masse de la Terre, et du carré de la distance moyenne de la Lune à la Terre au carré de la distance moyenne du Soleil à la Lune, c'est-à-dire comme la masse du Soleil, divisée par le carré de sa distance à la Lune, ou par r^2, est à la masse de la Terre divisée par le carré de sa distance moyenne à la Lune. Prenons pour l'unité des masses la masse de la Terre, pour unité des distances celle de la Lune à la Terre, et pour unité des forces celle que la Terre exerce sur la Lune dans ses moyennes distances; alors la proportion précédente donnera, pour la force du Soleil sur la Lune, $\frac{S}{r^2}$ par rapport à celle de la Terre sur la Lune.

3534. Lorsqu'il s'agit des troubles qu'une planete éprouve par l'attraction d'une autre, on emploie les mêmes expressions; par exemple, la masse du Soleil, qui est 1, retient la Terre dans son orbite à une distance qui est 1. Jupiter trouble cette action avec une masse environ 1000 fois plus petite que celle du Soleil (3559); ainsi sa masse ou sa force peut s'appeller $\frac{1}{1000}$; et, comme il agit encore à une distance environ 5 fois plus grande que le Soleil (1222), son action est 25 fois plus petite que celle du Soleil; ainsi il faut encore rendre 25 fois plus petite la force $\frac{1}{1000}$, c'est-à-dire qu'il faut écrire $F=\frac{1}{25000}$ pour avoir la force de Jupiter sur la Terre; cette force n'est autre chose qu'une vingt-cinq millieme partie de la force du Soleil sur la Terre; c'est la force dont nous chercherons l'effet dans la suite (3644 et suiv.); c'est-à-dire que nous chercherons combien le mouvement de la Terre doit être altéré par une force qui est $\frac{1}{25000}$ de celle qui retient la Terre dans son orbite.

3535. On a vu ci-devant que, dans toute force accélératrice, les espaces parcourus sont comme les carrés des temps (3506); si la force est $\frac{S}{r^2}$, on aura $\frac{S\,dt^2}{r^2}=de$; c'est l'espace que cette force feroit parcourir dans un espace de temps infiniment petit dt; et il seroit aisé de comparer cet espace à celui de 15 pieds, que la gravité naturelle fait parcourir à tous les corps terrestres, et qui est le point de comparaison auquel nous rapportons souvent toutes les autres attractions.

De la Force centrale dans les orbites circulaires.

3536. Les orbites des planetes sont des ellipses (1220); mais les loix de l'attraction auroient lieu de la même maniere dans les mouvemens circulaires, car les cercles sont aussi des ellipses dont l'excentricité est infiniment petite; et comme la considération des orbites

circulaires est beaucoup plus facile, je commencerai par celles-là. Si une planete P (FIG. 291) décrit autour du Soleil S l'orbite circulaire PEB, ce n'est qu'à raison de la force ou de l'attraction du Soleil qui l'oblige à se courber en B, au lieu de suivre la ligne droite PA (1231, 3519). C'est un principe reconnu même autrefois par Anaxagore (3519), qu'un corps en mouvement continue de se mouvoir sur une même ligne droite, s'il ne rencontre aucun obstacle, et qu'un corps mu circulairement s'échappe par la tangente aussitôt qu'il cesse d'être contraint et assujetti à tourner dans le cercle ; ainsi la planete décriroit PA si elle n'étoit forcée par l'attraction du centre S à descendre de A en B ; donc A B est l'effet ou la mesure de la force centripete, pendant le temps que mesure l'arc PEB ; cela est également vrai, quelle que soit la nature de cet arc P B, circulaire, parabolique, elliptique, puisque c'est la quantité dont la planete est détournée de la ligne droite, ou rapprochée du centre, et qu'elle seroit également rapprochée si la planete destituée de toute force de projection descendoit de P en C. La force PA perpendiculaire au rayon solaire ne peut empêcher que l'attraction du Soleil n'ait tout son effet, ne lui étant pas opposée.

3537. Si la planete P n'avoit reçu aucun mouvement de projection de P en A, ou que ce mouvement qui tend à lui faire parcourir P A vînt à être détruit, la planete P, livrée à la seule force centrale qui agit de P en S, descendroit dans le même temps et avec la même vîtesse de la quantité P C, égale à B G ou à B A (3492). Si l'on conçoit le côté P B de la courbe, parcouru en une seconde, comme infiniment petit, il sera la diagonale du parallélogramme C A ; B A est l'espace que feroit décrire aussi en une seconde la force centrale si elle agissoit seule ; donc le sinus verse P C de l'arc PEB, décrit en une seconde, exprime la force centrale dont il est l'effet. Le sinus verse est comme le carré de l'arc P B (3494) ; donc la force centrale est comme le carré de la vîtesse, c'est-à-dire que, pour retenir une planete dans la même orbite, si la vîtesse doubloit, il faudroit une force quadruple.

Huygens est le premier qui ait donné les loix des forces centrifuges à la fin de son *Horologium oscillatorium*, en 1673 : le marquis de l'Hôpital les démontra d'une maniere générale (*Mém.* de 1701, p. 16). Les démonstrations que l'on trouvera ici seront encore plus simples ; je les réduirai aux seuls cas dont on a besoin pour la suite de ce traité.

3538. L'écart de la tangente, c'est-à-dire B A, est aussi l'effet de la force centrifuge, ou de la force par laquelle les corps qui

tournent autour d'un centre tendent à s'en écarter (1231), puisque c'est l'espace que le corps parcourroit en s'éloignant du centre S s'il étoit libre : or $BA = PC = \frac{CB^2}{2CS} = \frac{BP^2}{2PS}$ (3494); donc le mouvement circulaire produit une force centrifuge qui est égale au carré de la vîtesse, divisé par le diametre du cercle, la force de projection, ou l'arc PB, étant l'unité, puisque c'est par rapport à cette force que l'on trouve la force centrifuge; donc celle-ci, aussi bien que la force centripete, est comme le carré de la vîtesse.

3539. Dans le calcul différentiel, on regarde les courbes comme des polygones d'une infinité de côtés, et alors on trouve la quantité BA double de ce que nous venons de trouver en considérant le cercle comme une courbe rigoureuse; dans le cas du polygone, la force centrifuge est $\frac{PB^2}{PS}$ (3608) : quoique cette expression soit double de la précédente, elle donnera le même résultat, si l'on a soin de suivre la même regle dans les expressions de toutes les forces que l'on comparera l'une à l'autre; mais il faut prendre garde à ne pas supposer tantôt une courbe rigoureuse et tantôt un polygone (d'Alembert, *Traité de Dynamique*, 1743, *pag.* 21) : Newton s'y trompa dans la premiere édition de ses Principes (*OEuvres de* J. Bernouilli, T. I, *pag.* 505; *Histoire de l'acad.* 1722).

3540. Le P. Grégoire Fontana, professeur de Pavie, reproche au P. Frisi de s'être trompé en prenant le diametre au lieu du rayon, et d'avoir trouvé une expression trop petite de moitié pour la force centrifuge. Le P. Fontana observe qu'il faut prendre le double de l'écart de la tangente, parceque cet écart est parcouru, en vertu de la force centrifuge et de son action continuée et invariable pendant l'instant donné, avec un mouvement uniformément accéléré : ainsi c'est le double de cette ligne qui doit représenter l'effet entier de la force centrifuge, c'est-à-dire la vîtesse engendrée par cette force pendant la durée de cet instant, comme nous l'avons remarqué pour les corps terrestres (3503) (*Memorie della società italiana*, T. II, 1784, *pag.* 384).

3541. On emploie, pour exprimer la vîtesse d'une planete, un arc infiniment petit, parceque c'est le seul qui soit parcouru uniformément, et que l'uniformité est nécessaire pour la mesure du mouvement. Or un arc infiniment petit ne se courbe que d'un infiniment petit du second ordre AB ou BG; ainsi la force centrale ne peut être exprimée que par un infiniment petit du second ordre, ce qui prouve la nécessité des secondes différences (3430).

3542. Si l'on examine les forces centrifuges des différentes parties

d'une sphere qui tourne sur son axe comme la Terre, on verra que cette force est la plus grande sous l'équateur, où la vîtesse est la plus forte, qu'elle est nulle sous les poles autour desquels tourne la Terre, et que, dans les autres points, elle est proportionelle au rayon de chaque parallele; car tous les cercles étant décrits dans un même espace de temps, les angles décrits autour du centre de chaque parallele sont les mêmes : ainsi la vîtesse de chaque partie est alors comme le rayon du cercle qu'elle décrit; c'est-à-dire que PB est proportionel à PS; donc la force centrifuge est proportionelle à $\frac{PS^2}{2PS}$, c'est-à-dire à PS; ce sera l'ordonnée parallele au grand axe de l'ellipse du méridien, quand nous parlerons de l'aplatissement de la Terre.

3543. La force centrifuge, sous l'équateur de la Terre, est $\frac{1}{288}$ de la pesanteur qu'on y éprouve; car cette pesanteur fait parcourir en 1″ de temps moyen 15,0515 pieds (3515); la force centrifuge est mesurée par le petit écart de la tangente pour un arc de 15″ que la Terre parcourt en 1″ de temps : mais comme la Terre n'emploie réellement que 23ʰ 56′ à tourner sur son axe, il faut augmenter le sinus verse de 15″ dans le rapport du carré des heures solaires moyennes aux heures du premier mobile; il faut ensuite le multiplier par le rayon de la Terre (2701) réduit en lignes; on aura 7,5189, qui sont contenus 288,26 fois dans les 15,0515 pieds, et 289,261 dans l'espace total 15,1037 que les corps graves décriroient sous l'équateur sans la force centrifuge. Pour faire ce calcul, on cherche d'abord l'espace que la gravité fait parcourir sous l'équateur (3515); ensuite on ajoute le logarithme du sinus verse d'un arc de 15″, ou 1,42230, avec le double de la différence des logarithmes de 24ʰ et de 23ʰ 56′ 4″ 1, et celui du rayon de l'équateur en lignes 94514794; on retranche cette somme du logar. de l'espace parcouru en 1″, et l'on a le logar. de 288,26.

Ainsi un corps qui se trouveroit dégagé de la pesanteur (abstraction faite du mouvement annuel), s'échapperoit à l'instant par la tangente, et s'éloigneroit de 7 lignes de la surface de la Terre dans la premiere seconde. Cette tendance à s'échapper, qui vient de la rotation de la Terre, diminue de $\frac{1}{289}$ la pesanteur qui auroit lieu sous l'équateur. De là il suit que si les corps graves parcourent 15,0515 pieds par seconde (3516), ils en parcourroient sans le mouvement de rotation 15,1037.

3544. Quand on parvient à d'autres latitudes, cette force centrifuge de l'équateur diminue dans le même rapport que la grandeur des paralleles, c'est-à-dire comme le cosinus de la latitude, du moins à ne la considérer que dans le plan de chaque parallele (3542); mais

elle diminue comme le carré du cosinus de la latitude quand on la considere dans la direction du centre de la Terre; ce qui est nécessaire pour pouvoir en tenir compte dans les observations, puisque ce n'est qu'au centre de la Terre que se rapportent les pesanteurs que nous observons. Soit CA (FIG. 293) l'axe de la Terre, BD le rayon d'un parallele, BF l'effet de la force centrifuge sur ce parallele; ayant tiré FK perpendiculaire sur BC, le point F et le point K sont à la même distance du centre C, et BK est l'effet de la force centrifuge dans la direction du centre; car la force BF se décompose suivant BK et KF (3594), et la force BK est la seule qui affecte la pesanteur. Les triangles BKF, CBD sont semblables; donc BK : BF :: BD : BC; ainsi BF est encore diminuée dans le rapport de BC à BD: mais la force centrifuge qui a lieu sous l'équateur est à celle qui est exprimée par BF comme BC est à BD; donc elle est à la force BK comme BC^2 est à BD^2, c'est-à-dire qu'elle diminue comme le carré du cosinus de la latitude.

3545. Cette force centrifuge diminue celle de la pesanteur qui auroit lieu si la Terre étoit immobile, et par conséquent rend la longueur du pendule à secondes plus petite qu'elle ne seroit par l'attraction naturelle de la Terre; par exemple, il faut ajouter une ligne et $\frac{53}{100}$ à la longueur du pendule à secondes observée sous l'équateur, pour avoir celle qui s'observeroit si la Terre étoit immobile. Sous une latitude de 60°, où le parallele n'est que la moitié de l'équateur, la quantité qu'il faut ajouter au pendule observé n'est que le quart de $1^{lig.}$ 53, ou $0^{lig.}$ 38; en général, on multiplie $1^{lig.}$ 53 par le carré du cosinus de la latitude; on a la correction pour toute autre latitude (Bouguer, *Figure de la Terre*).

3546. LA FORCE CENTRALE QUI RETIENT LES PLANETES DANS LEURS ORBITES EST EN RAISON INVERSE DU CARRÉ DE LA DISTANCE.

DÉMONSTRATION. La premiere démonstration que Newton apperçut de cette fameuse loi (3526) est celle qui se tire de la loi de Képler (1224). Hooke avoit compris que la pesanteur devoit diminuer à mesure qu'on s'éloignoit du centre des graves; il avoit proposé aux géometres de trouver suivant quelle proportion cette force devoit diminuer (3525). Newton avoit eu la même idée, au rapport de Pemberton. Voici la maniere dont je crois qu'il dut s'y prendre pour chercher cette proportion, en comparant les périodes des planetes avec leurs distances, et reconnoître, par exemple, que la force du Soleil, pour retenir Saturne dans son orbite, est *cent* fois plus petite que la force avec laquelle le Soleil retient la Terre dans la sienne, quoique la distance de Saturne soit seulement *dix* fois plus grande que

que la distance de la Terre. J'ai fait voir, dans un assez grand détail (1224), comment Képler découvrit cette loi de laquelle nous allons partir: ainsi je crois qu'il ne manquera rien à l'histoire de cette grande et importante découverte de l'attraction.

3547. Soient deux orbites circulaires et concentriques PB, TV (FIG. 291), dans lesquelles tournent deux planetes, dont les temps périodiques sont t et 1, et les rapports de leurs orbites r et 1, par exemple Saturne et la Terre; supposons les arcs PB et TV infiniment petits et semblables, c'est-à-dire compris entre les rayons STP, SVB; ces arcs PB et TV seroient parcourus en temps égaux si les révolutions des deux planetes étoient égales; mais la planete supérieure P, ayant une révolution plus lente que la Terre T, ne décrira qu'un arc PE, tandis que la Terre décrira l'arc TV; alors PD sera l'effet de la force centrale que le Soleil exerce sur cette planete, tandis que TR est l'effet de la force centrale qu'il exerce sur la Terre T (3537); et nous n'avons à chercher que le rapport de PD à TR. Supposons que TR soit de 100^p pour la Terre; si la distance SP est 10 fois plus grande, c'est à-peu-près le cas de Saturne, PC sera de 1000 pieds, puisque l'arc PB est semblable à l'arc TV, et que toutes les parties des figures PBC, TVR sont proportionelles[a]; mais Saturne est 30 fois plus de temps à décrire un arc semblable à celui de la Terre; ainsi il ne décrira, dans le même temps, qu'un arc PE, 30 fois moindre que PB. Donc le sinus verse PD sera 900 fois moindre que PC, ou la 900e partie de 1000 pieds, c'est-à-dire environ un pied, tandis que TR étoit de 100: or 100 est le carré de 10, qui est la distance de Saturne, en prenant celle de la Terre pour unité; donc la force centrale PD est plus petite dans le même rapport, que le carré de la distance est plus grand.

3548. Pour exprimer ce rapport d'une maniere plus générale, il suffit de considérer que, suivant une proposition démontrée (3494), $PD : PC :: PE^2 : PB^2$; mais la planete P auroit parcouru PB, si la durée de sa révolution, que j'appelle t, étoit égale à la durée 1 de la révolution de la Terre; donc $PE : PB :: 1 : t$, et $PD : PC :: 1 : t^2$, ou $PD = \frac{PC}{t^2}$; or $PC : TR :: PS : TS :: r : 1$, puisque les arcs PB et TV sont semblables; donc $PC = r \cdot TR$, et $PD = \frac{r\,TR}{t^2}$; donc $\frac{PD}{TR} = \frac{r}{t^2}$. Mais, suivant la loi de Képler (1224), $t^2 : 1 :: r^3 : 1$, ou $r^3 = t^2$; donc $\frac{PD}{TR} \left(= \frac{r}{t^2}\right)$ sera égal à $\frac{r}{r^3}$ ou $\frac{1}{r^2}$; donc $PD : TR :: 1 : r^2$, c'est-à-

[a] Huygens en concluoit que la force centrifuge étoit proportionelle à la distance, c'est le premier de ses théorêmes (3537).

dire que l'effet de la force centrale est en raison inverse du carré de la distance[a].

3549. Il étoit donc facile à Newton de reconnoître cette loi dans l'attraction, par le moyen de la loi de Képler. Quand il eut trouvé ce rapport dans l'attraction du Soleil sur les planetes, il le vérifia bientôt sur la Lune (3526) ; et il reconnut que la force centrale nécessaire pour retenir la Lune dans son orbite, n'est autre chose que la gravité naturelle des corps terrestres, diminuée en raison inverse du carré de la distance de la Lune à la Terre. En effet, les corps graves parcourent 15 pieds en une seconde de temps moyen (3515) ; la Lune décrit dans le même temps un arc de son orbite qui est environ 33‴, et dont le sinus verse est à-peu-près $\frac{1}{240}$ de pied (3461), ou 3600 fois moins que les 15 pieds ; donc la Lune est retenue vers la Terre, ou rapprochée de la Terre 3600 fois moins que les corps terrestres ; or elle est environ 60 fois plus loin qu'eux du centre de la Terre ; donc la force qui agit sur la Lune est la pesanteur diminuée comme le carré de la distance augmente.

3550. On s'est ensuite servi de ce principe reconnu vrai d'ailleurs pour trouver la distance de la Lune et sa parallaxe, avant qu'elle eût été observée avec exactitude. Soit 1 le demi-diametre de l'équateur terrestre réduit en pieds, x la distance moyenne de la Lune, égale environ à 60, f la force de la Terre, exprimée par les 15 pieds qu'elle fait parcourir en une seconde à sa surface ; u le sinus verse de l'arc décrit par la Lune en une seconde de temps ou la quantité dont la Lune descend et se rapproche de nous en une seconde ; cet espace est exprimé par $u\,x$. A cause du principe des forces centrales, le même espace est aussi égal à $\frac{f}{x^2}$ (3548) : égalant ces deux quantités, on a $\frac{1}{x}=\sqrt[3]{\frac{u}{f}}$; c'est le sinus de la parallaxe horizontale de la Lune sous l'équateur. Pour le réduire en nombres, je prends le logarithme du sinus verse de l'arc décrit par la Lune en 1″ de temps (3461) ; j'y ajoute celui du rayon de l'équateur (2701) réduit en pieds, et j'ai le logarithme de $eu=5{,}8419240$; j'en ôte celui de 15,1224, espace que les corps graves parcourent sous la latitude de Paris, en supposant la Terre immobile : le tiers du reste (la caractérisque étant 24), est 8,2207677, sinus de 57′ 9″, c'est la parallaxe moyenne ; elle ne surpasse que de 7″ ou 10″ celle qui résulte des meilleures observations (1700), et prouve, par là même, la loi de

[a] De là il résulte aussi que la vîtesse est en raison inverse de la racine de la distance (3574).

l'attraction. Nous donnerons bientôt une méthode plus rigoureuse pour parvenir à ces résultats (3642).

3551. Ainsi la loi de l'attraction, ou ses changements en raison inverse du carré de la distance furent prouvés de deux manieres très différentes et très bien d'accord entre elles. Cette loi se vérifioit également dans les satellites de Jupiter (2921); ceux de Saturne vinrent ensuite à l'appui de cette loi (3068). Une autre considération différente pouvoit indiquer à Newton qu'il falloit que l'attraction fût en raison inverse du carré de la distance ; c'est que toutes les qualités sensibles, comme les émanations, la lumiere, diminuent de densité et de force en raison inverse du carré de la distance.

3552. Si l'attraction étoit en raison inverse du cube de la distance, au lieu d'être en raison inverse du carré, les planetes ne pourroient pas décrire des ellipses ; mais aussi tôt qu'elles auroient commencé à s'approcher du centre des forces, elles s'en approcheroient toujours, sans pouvoir jamais s'en éloigner (Voyez Maclaurin, *Expos. des découvertes de* Newton, *pag.* 332 ; *Traité des fluxions I*, *pag.* 308, *II*, *pag.* 276). Si l'attraction étoit en raison inverse de la distance simple, les planetes, au lieu d'arriver de l'apside supérieure à l'apside inférieure dans l'espace d'une demi-révolution, ou après avoir décrit 180°, y arriveroient après avoir décrit $\frac{180}{\sqrt{2}}$, ou un peu plus de 127° (*Princ. math. L.* I, *prop.* 45). Dans ce cas, on n'auroit jamais retrouvé l'aphélie de Mars au même point du ciel, mais à des points différens de plus de 50° chaque année : cela prouvoit encore à Newton que l'attraction planétaire suivoit la raison inverse du carré, à l'exclusion de toute autre puissance de la distance.

3553. Il est vrai qu'on a soupçonné dans les corps terrestres une attraction en raison inverse du cube des distances ; mais cela tient à des circonstances particulieres : on peut voir là-dessus Newton, *prop.* 80 et 91 ; Maupertuis (*Mémoires ac.* 1732, *pag.* 362 ; Keill *Attractionis leges*, petit traité composé de 30 propositions, qui se trouve à la fin de sa Physique, édit. de Leyde de 1725 ; d'Alembert, dans l'Encyclopédie, au mot Attraction ; Boscovich, *Philosophiæ natur. Theoria*).

3554. L'élévation des fluides dans les tubes capillaires, est encore une suite nécessaire de l'attraction des corps terrestres. Dans un *Mémoire sur les Tubes capillaires*, inséré dans le Journal des savans du mois d'octobre 1768, et imprimé séparément (chez Desaint, 1770),

j'ai fait voir que l'attraction du tube capillaire qui a plus de densité que l'eau, en souleve les parties placées au-dessous du tube et celles qui sont à l'entrée du tube, que la colonne d'eau renfermée dans le tube, considérée depuis le niveau de l'eau du vase jusqu'en bas, est attirée encore de bas en haut par la partie du tube qui est hors de l'eau, parce que sa partie inférieure occupe la place d'une certaine quantité d'eau qui attiroit déja cette colonne de haut en bas, et qu'elle ne détruit pas l'attraction de la partie supérieure, en sorte qu'il y a trois causes évidentes de l'ascension des fluides dans les tubes capillaires: ainsi, quoi qu'en dise le cardinal Gerdil, dans sa *Dissertation sur l'incompatibilité de l'attraction,* Paris 1754, chez Desaint, ce phénomene est une preuve de l'attraction. *Voy.* Musschenbroëk, *Cours de Phys.* T. II, *pag.* 1, édition de 1769. Nous avons parlé de l'attraction des montagnes (2703).

3555. L'attraction des petits corps a été reconnue et démontrée dans plusieurs expériences de physique par Taylor, Désaguliers, Musschenbroëk, etc. Nos plus habiles chymistes l'admettent aujourd'hui, quoiqu'elle ait été combattue par d'autres. *Voy.* l'Essai de M. le Sage (3530), l'*Encyclopédie,* aux mots *Chymie* et *Menstrue;* le *Dictionnaire de Chymie* de Macquer, au mot *Pesanteur;* les *Elémens de Chymie théorique et pratique,* pour servir aux cours publics de l'académie de Dijon, 1777, T. I, *pag.* 50 et suiv.; et les expériences faites en présence de l'académie de Dijon, le 12 février 1773, par M. de Morveau; *Journal de Physique,* T. I, *pag.* 172 et 460.

Si l'on met en équilibre une balance portant à l'un de ses bras une plaque d'or d'un pouce de diametre, suspendue horizontalement par un crochet mastiqué sur la surface supérieure, et qu'on approche pardessous un vase plein de mercure, il faudra 446 grains dans le bassin opposé pour détacher la glace du mercure et vaincre leur adhésion, et la même chose a lieu dans le vide; ainsi l'on ne peut pas dire que cette adhérence vienne de la compression de l'atmosphere.

Des plaques de différens métaux, ayant toutes un pouce de diametre, adherent au mercure avec des forces plus ou moins grandes; ces forces suivent l'ordre des affinités chymiques, ou de la plus ou moins grande dissolubilité des métaux par le mercure; le plomb exige 397 grains, le fer 115, le cobolt 8 grains seulement. Cela prouve bien que les affinités chymiques sont produites par une attraction; mais cette attraction varie à cause de la figure des parties qui rendent plus ou moins grande la surface du contact (*Elémens de l'académie de Dijon,* pag. 63).

La crystallisation des sels s'opere par le même mécanisme, comme

Newton l'avoit déja remarqué, lorsque des parties similaires qui étoient en équilibre avec un fluide, sont déterminées à se rapprocher par la soustraction d'une certaine portion de ce fluide. On en peut juger en mettant sur la surface de l'eau des aiguilles, ou de petites lames de métal très minces; on les voit s'attirer, se mouvoir, s'arranger, et, malgré la résistance du frottement à la surface du liquide, se chercher et se réunir par les côtés qui offrent un plus grand contact (*Digressions académiques* de M. de Morveau, *pag.* 332 et suiv.; *Elémens de l'académie de Dijon,* pag. 77).

3556. La loi de l'attraction, en raison inverse du carré de la distance, a lieu malgré la grosseur des planetes, en considérant la distance qui est entre leurs centres. Nous allons prouver que l'attraction d'un globe sur un point A (FIG. 296 n°. 2) est la même que si toute la matiere qui le compose étoit réduite au point O. On décrira du point A les arcs DC et dc; l'attraction exercée par le petit arc Cc sur le point A sera $\frac{Cc}{AC^2}$. Il faut la décomposer dans la direction du centre, ou suivant AO (3594), et nous aurons $\frac{AB\cdot Cc}{AC^3}$. Pour avoir l'attraction sur l'anneau décrit par la révolution de AC autour de AO, il faut la multiplier par la circonférence décrite sur BC.

Les triangles COP, CHc sont semblables, puisque l'angle COP et l'angle cCT ont également pour mesure la moitié de l'arc CT; donc $Cc : Hc :: CO : PO$ et $Cc = \frac{Hc\cdot CO}{PO}$; mais $AC : BC :: AO : PO$, ou $PO = \frac{AO\cdot BC}{AC}$; donc $Cc = \frac{Hc\cdot CO\cdot AC}{AO\cdot BC}$; donc, nommant p la circonférence pour un diametre égal à l'unité, l'attraction sur l'anneau circulaire sera $\frac{AB}{AC^3}\cdot\frac{p\cdot BC\cdot Hc\cdot CO\cdot AC}{AO\cdot BC} = \frac{p\cdot CO\cdot AB\cdot Hc}{AO\cdot AC^2}$.

Au lieu de AB, il faut mettre une valeur qui renferme le rayon de la sphere : dans le triangle ACO, on a $AC^2 + AO^2 = CO^2 + 2AO\cdot AB$ (3849), ou $AO^2 - CO^2 = 2AO\cdot AB - AC^2$; mais $AO^2 - CO^2 = (AO+CO)\cdot(AO-CO) = AN\cdot AM$; donc $2AO\cdot AB - AC^2 = AN\cdot AM$, et $AB = \frac{AN\cdot AM + AC^2}{2AO}$. Ainsi l'attract. sur l'anneau circulaire sera $\frac{p\cdot CO\cdot Hc}{AO\cdot AC^2}\times\frac{AN\cdot AM + AC^2}{2AO} = \frac{p\cdot MO\cdot Dd}{2AO} + \frac{p\cdot MO\cdot AN\cdot AM\cdot Dd}{2AO^2\cdot AD^2}$.

Tandis que le point D parcourt le diametre MN, l'intégrale de Dd est 2MO. Pour avoir celle de $\frac{Dd}{AD^2}$, faisons $AM = a$, $MD = x$, l'intégrale de $\frac{\delta x}{(a+x)^2}$, en la complétant (3445), sera $\frac{1}{a} - \frac{1}{a+x}$. Faisant $x = 2MO$, l'intégrale deviendra $\frac{2MO}{AM\cdot AN}$; ainsi les deux membres de l'expression précédente sont chacun $\frac{p\cdot MO^2}{AO^2}$, et l'attraction de l'anneau

sera $\frac{2p \cdot MO^2}{AO^2}$; mais $2p \cdot MO^2$ est la surface de la sphere : donc l'attraction est égale à la surface divisée par le carré de la distance au centre; et, comme la même chose peut se dire de tous les élémens du globe, il s'ensuit que les globes attirent de la même façon que si toute la matiere étoit réduite au centre (Newton, L. I, prop. 71; Maupertuis, *Mém. de l'acad.* 1732; Euler, *Inquisitio in causam fluxûs*, art 19 et 20; Frisi, *De gravitate*, pag. 164). L'aplatissement de la planete change un peu cette loi (3011); mais nous ne parlons que des globes.

3557. La masse des planetes, c'est-à-dire leur quantité de matiere, ou leur force attractive, se déduit du principe de l'attraction, et l'on en conclud aisément leur densité intérieure ou leur pesanteur spécifique. Cette découverte, qui paroît d'abord bien singuliere, est cependant une suite naturelle de la loi d'attraction, puisque la force attractive est un indice certain de la quantité de matiere. Prenons pour terme de comparaison la masse ou la force attractive de la Terre, dont les effets nous sont connus et familiers, et cherchons quelle est la masse de Jupiter par rapport à celle de la Terre. Le premier satellite de Jupiter fait sa révolution à une distance de Jupiter qui est la même que celle de la Lune à la Terre (du moins celle de la Lune n'est que de $\frac{1}{10}$ plus petite). Si ce satellite tournoit aussi autour de Jupiter, dans le même espace de temps que la Lune tourne autour de la Terre, il s'ensuivroit évidemment que la force de Jupiter pour retenir ce satellite dans son orbite seroit égale à celle de la Terre pour retenir la Lune, et que la quantité de matiere dans Jupiter, ou sa masse, seroit la même que celle de la Terre; dans ce cas-là, il faudroit que la densité de la Terre fût 1281 fois plus grande que celle de Jupiter; car la grosseur (ou le volume) de Jupiter contient 1281 fois la grosseur de la Terre (1398): or, si le poids est le même, la densité est d'autant plus grande que le volume est plus petit; mais si le satellite tourne 16 fois plus vîte que la Lune, il faut pour le retenir, 256 fois plus de force (16 fois 16 = 256); car la force centrale est comme le carré de la vîtesse (3537): une vîtesse double exige et suppose une force centrale quadruple à distances égales; et la vîtesse du satellite 16 fois plus grande que celle de la Lune, quoique dans une orbite égale, suppose dans Jupiter une énergie ou une masse 256 fois plus grande que celle de la Terre. Ainsi l'on trouve un volume 1281 fois plus grand, et une pesanteur seulement 256 fois plus grande que celle de la Terre: or 256 est environ 5 fois plus grand que 1281; donc le volume de Jupiter, considéré par rapport à celui de la Terre, sera cinq fois plus grand que la quantité de matiere réelle et effective par rapport à celle

de la Terre; donc la densité de la Terre est cinq fois plus grande que celle de Jupiter. On ne trouve réellement que 4; mais c'est parceque la distance du satellite est plus grande que celle de la Lune. On verra ce calcul, fait avec des nombres plus exacts, dans l'article suivant.

3558. Tel est l'esprit de la méthode par laquelle Newton a calculé les masses et les densités des planetes (1398) : plus un satellite est éloigné de sa planete et tourne rapidement, plus aussi il indique de force et de matiere dans la planete principale qui le retient. Nous allons chercher l'expression générale de la regle qui sert à trouver la masse d'une planete, et nous verrons que le cube de la distance, divisé par le carré du temps périodique d'un satellite, doit donner la masse de la planete. Nous prendrons le Soleil pour terme de comparaison, parceque nous en aurons besoin pour le calcul des attractions célestes.

Soit la distance de Jupiter au Soleil, prise pour unité, $=1$.
La durée de la révolution de Jupiter, $=1$.
La force du Soleil sur Jupiter, $=1$.
La distance d'un de ses satellites, $=r$.
La durée de la révolution du même satellite, $=t$.

La force actuelle de Jupiter sur son satellite est $\frac{r}{t^2}$, comparée à celle du Soleil sur Jupiter (3548); donc, à la dist. 1, il auroit une force $\frac{r^3}{t^2}$, car elle seroit à la force actuelle, qui est $=\frac{r}{t^2}$, comme $r^2 : 1$, c'est-à-dire en raison inverse des carrés des distances 1 et r; donc, à pareille distance, la force de Jupiter est $\frac{r^3}{t^2}$: telle est donc en effet la force absolue qu'exerce Jupiter (par rapport à celle du Soleil considérée à pareille distance), c'est-à-dire sa masse totale ou la quantité de matiere qu'il contient: donc, en général, pour connoître la masse d'une planete, en prenant celle du Soleil pour unité, il suffit de diviser le cube de la distance d'un satellite par le carré du temps de sa révolution, en prenant les unités dans une planete du systême solaire.

On peut encore considérer que la force de Jupiter est $\frac{m}{r^2}$, en appellant m sa masse; c'est aussi l'effet PD (FIG. 291) de la force centrale; ainsi $m=\mathrm{PD}\cdot r^2$; mais $\mathrm{PD}=\frac{r}{t^2}$ (3548); donc $m=\frac{r^3}{t^2}$.

3559. EXEMPLE. La révolution de Vénus autour du Soleil, qui est de 5393^h, est 13 fois plus longue que celle du quatrieme satellite de Jupiter, qui est de 400$^h\frac{1}{2}$ (3025); donc, pour le satell., on a $t=0{,}0742716$; la distance du quatrieme satellite à Jupiter, vue du Soleil, est de 8'

16″; d'où il est aisé de conclure la distance du satellite à Jupiter, celle de Vénus au Soleil étant prise pour unité, ou la valeur de $r=$ 0,017290 (art. 2920). Si l'on prend le cube de r et le carré de t, et qu'on divise r^3 par t^2, on trouve 0,0009370, ou $\frac{1}{1067}$. C'est la masse de Jupiter, celle du Soleil étant prise pour unité.

Si l'on veut trouver de même le rapport des masses du Soleil et de la Terre, on a $r=\frac{8''\,6}{57'\,0''}$, la distance du Soleil étant prise pour unité; c'est le rapport inverse des parallaxes du Soleil et de la Lune, ou celui des distances.

On a aussi le temps périodique de la Lune $t=\frac{27^j}{365}=\frac{129597735}{1732559390''}$; c'est le rapport des révolutions de la Lune et de la Terre, ou des mouvemens séculaires du Soleil et de la Lune: donc $\frac{r^3}{t^2}=\frac{1}{351886}$; c'est la masse de la Terre, celle du Soleil étant prise pour unité, comme je l'ai rapporté dans la table de l'article 1398: elle differe beaucoup de celle que Newton supposoit $\frac{1}{169282}$; mais les élémens que je viens d'employer sont plus exacts que les siens. Par là on réduit à moitié les inégalités produites sur le mouvement de la Terre, et qu'on avoit calculées avec les élémens de Newton; car plus la masse du Soleil augmenteroit, plus il seroit difficile de déranger une planete qui tourne autour de lui.

M. de la Place déduit la masse de la Terre de la longueur du pendule à secondes, et il la trouve $\frac{1}{328266}$ de celle du Soleil (*Mém.* 1788). Si l'on veut comparer celle de Jupiter à la Terre (3557), on aura la distance de la Lune 86351 lieues (1703), celle du satellite 96248; donc $r=1,115$; $r^3=1,386$; les révolutions donnent le temps $t=$ 0,06478; $t^2$0,004196; ainsi $\frac{r^3}{t^2}=330$, ce qui revient à la masse qui est dans la table (1398).

3560. La masse de Saturne que j'ai trouvée est encore sensiblement différente de celle que Newton supposoit $=\frac{1}{3021}$; je trouve $\frac{1}{3403}$ par le quatrieme satellite, et environ $\frac{1}{3927}$ en y faisant entrer les cinq satellites; mais ils donnent des résultats assez différens entre eux, à cause du peu de précision qu'il y a dans les observations des satellites de Saturne, et je préfere le résultat tiré du quatrieme satellite $\frac{1}{3403}$, en supposant l'élongation du satellite, non pas telle que Newton la rapporte, de 3′ 4″, mais de 2′ 58″21, comme on la déduit de l'observation rapportée par Bradley (3070).

3561. Il suit des calculs précédens que la masse du Soleil divisée par le cube de sa distance à la Terre, celle de la Lune étant prise pour unité, est égale à t^2, ou au carré de la révolution sidérale de la Lune divisée par celle du Soleil; car la masse du Soleil est $\frac{t^2}{r^3}$, en prenant pour unité celle de la Terre, et pour r la distance de la Lune: mais si cette distance de la Lune est prise pour unité, celle du Soleil est $\frac{1}{r}$, et le cube de la distance est $\frac{1}{r^3}$; divisant la masse du Soleil $\frac{t^2}{r^3}$ par le cube de la distance du Soleil $\frac{1}{r^3}$, on trouve en effet t^2, c'est le carré de $27^j\ 7^h\ 43'$ divisé par $365^j\ 6^h\ 9'\ 12''$: ce carré fait 0,0055952 $=\frac{1}{179}$ à-peu-près. Nous en ferons usage pour la théorie de la Lune (3628, 3691).

3562. Cette force ou cette masse d'une planete, étant divisée par le volume, exprimé de même en prenant pour unité le volume du Soleil, donne la densité de la planete cherchée par rapport à la densité du Soleil (3557); c'est ainsi que l'on trouve la Terre environ quatre fois plus dense que le Soleil et Jupiter, ou dix fois plus dense que Saturne (Newton trouvoit 6 fois seulement, L. III, *prop.* 8). Nous pouvons les comparer avec des objets familiers: le bois est dix fois plus léger que l'argent; c'est la légèreté de Saturne comparée avec la Terre; la pierre est quatre fois plus légere que le cuivre, c'est le rapport du Soleil ou de Jupiter avec la Terre. Voyez la grande table des pesanteurs spécifiques, donnée par M. Brisson en 1787.

3563. Képler avoit présumé que les densités des planetes les plus voisines du Soleil devoient être les plus considérables; mais il se trompoit sur celle du Soleil: *Consentaneum est ut quodque corpus, ut Soli vicinius, ita et densius esse; nam et Sol ipse est omnium corporum totius mundi densissimum: cujus rei testimonium perhibet immensa multiplex vis quae non potest esse sine subjecto proportionato; et loca ipsa centro vicina ideam quandam angustiae gerunt, qualis est in condensatione materiae multae in locum angustum.* (*Epit.*, p. 487).

3564. Les densités de Vénus, de Mercure et de Mars, ne peuvent se trouver par la méthode précédente, puisque ces planetes n'ont point de satellites qui puissent nous indiquer l'intensité de leur attraction; mais, voyant dans les trois planetes dont les densités sont connues, une augmentation de densité quand on approche du Soleil, on juge que cet accroissement a lieu également pour les trois autres planetes. En essayant de reconnoître une loi dans ces augmentations, on avoit trouvé que les densités étoient presque proportionelles aux racines des moyens mouvemens; par exemple, le mouvement de Ju-

piter est environ $\frac{1}{12}$ de celui de la Terre; la racine est 0,29, et l'on trouve la densité de Jupiter 0,26 (1398); mais la densité de Saturne est plus petite que ne donneroit ce rapport, et il a fallu en chercher un autre pour établir une hypothese sur les densités qui nous sont inconnues.

3565. M. de la Grange observe que les trois densités connues sont plus exactement en raison inverse des distances (*Mém. de Berlin,* 1782, *pag.* 187); en conséquence il suppose la masse de Vénus 1,31, celle de la Terre étant l'unité; mais la diminution de l'obliquité de l'écliptique est moindre que cette masse ne la pourroit causer (2748, 2760); il en est de même des mouvemens de l'apogée du Soleil, de l'aphélie de Mercure et du nœud de Mercure (*Mém. acad.* 1786): ainsi nous avons lieu de croire que la masse de Vénus est plus petite que celle de la Terre, et je ne la supposerai que 0,95 de celle-ci. L'incertitude qu'il y a dans cet élement me permet de choisir la masse qui répond précisément à 50″ de diminution dans l'obliquité de l'écliptique (2760); c'est un peu plus du quart, ou $\frac{27}{100}$ à ôter de tous les résultats des attractions de Vénus calculés par M. de la Grange (1277, 1324, 1351, 1381). M. de la Place trouve le logarithme de sa masse 4,4166456 (*Mém.* 1788), en partant de la même supposition qui donne 50″ pour diminution de l'obliquité de l'écliptique.

M. Herschel, en 1788, par la distance du second satellite de sa planete (3076), et sa révolution, avec le diametre de la planete 3″9, a trouvé sa masse 17,7406,+ celle de la Terre étant prise pour unité, et sa densité 0,2204 (*Philos. trans.* 1788, *pag.* 378): elle devroit être 0,0524, suivant la regle précédente; ainsi nous avons une nouvelle raison de la suspecter. La masse de Herschel est $\frac{1}{19503}$ de celle du Soleil: logarithme 5,7099085. (+ selon M. du Séjour, 1 : 16,633)

3566. Connoissant la masse et le diametre d'une planete, il est aisé de trouver l'effet de la pesanteur à sa surface, c'est-à-dire la force accélératrice des graves dans la planete; car cette force est en raison de la masse, et en raison inverse du carré de la distance, ou du rayon de la planete. C'est ainsi que j'ai calculé la table qui contient la vîtesse des graves dans chaque planete en pieds et en centiemes de pied (1398); ce n'est autre chose que la vîtesse des corps terrestres sous l'équateur 15p, 104 (3543) multipliée par la masse de chaque planete, et divisée par le carré du rayon, en prenant pour unités la masse et le rayon de la Terre. J'en ai donné un exemple pour le Soleil (3532).

La pesanteur des corps situés à la surface de Jupiter est plus que deux fois et demie celle des nôtres. Au lieu de décrire 15 pieds par seconde, ils en décrivent 39. On fait abstraction de la force centri-

fuge (3543) produite par la rotation de Jupiter et des autres planetes, parceque plusieurs sont inconnues.

3567. La masse de la Lune, et par conséquent sa densité, sont difficiles à déterminer exactement, parcequ'elles se manifestent par des phénomenes que nous ne pouvons mesurer avec assez d'exactitude; ce sont les hauteurs des marées, et la nutation de l'axe de la Terre. Par la hauteur des marées à Brest, j'ai trouvé que le rapport de la force du Soleil à celle de la Lune est celui de 1 à 2,7 (3780); on trouve seulement 2 par la nutation (3735). Voy. le Supplém. p. 737.

3568. Supposons la force de la Lune 2,7; pour avoir la masse de la Lune, il suffit de savoir quelle seroit sa force en la supposant à la distance du Soleil. La force diminue en raison inverse du cube de la distance, quand on la décompose sur une direction différente de sa direction primitive (3600); il faut donc multiplier la force actuelle de la Lune par le cube du rapport des distances ou de celui des parallaxes $\frac{8''6}{57'0''}$, et l'on aura la masse de la Lune, celle du Soleil étant prise pour unité. Pour la comparer avec la masse de la Terre, on considérera que celle-ci est seulement $\frac{1}{351886}$ de celle du Soleil (3559): il faut donc encore diviser la masse trouvée par cette fraction, et l'on aura $\frac{1}{66}$, qui est la masse de la Lune, celle de la Terre étant prise pour unité, à-peu-près comme je l'ai supposée (1702). On verra ci-après que la nutation paroît donner une masse un peu plus petite (3571, 3742). + Laplace trouve 3,0. V. les Supplém. p. 735.

3569. La masse de la Terre (3559) est $\left(\frac{8''}{57'}\right)^3 \cdot \left(\frac{365}{27}\right)^2$, celle du Soleil étant l'unité; la masse de la Lune est $\left(\frac{8''}{57'}\right)^3$ multipliées par 2,7; elles sont donc comme $\frac{1}{2,7}\left(\frac{365}{27}\right)^2 : 1$; donc le carré de la durée de l'année 365^j, divisé par celui de la durée du mois ou de la révolution lunaire 27^j, et divisé par 2,7, qui est la force de la Lune, donnera le nombre 66,193, qui exprime combien de fois la masse de la Terre contient celle de la Lune.

3570. La masse de la Lune $\frac{1}{66}$, ou 0,015107, étant divisée par son volume, qui est $\frac{1}{49}$, ou 0,020341 (1702), donne sa densité 0,7396, c'est-à-dire que la densité de la Lune est seulement $\frac{3}{4}$ de celle de la Terre, comme je l'ai mis dans la table des densités (1398). Ainsi la densité de la Lune est à celle du Soleil comme 2,9 est à 1, c'est-à-dire environ trois fois plus grande.

3571. D'Alembert se sert du phénomene de la nutation (2893, 3742) pour déterminer la masse de la Lune (*Précession des équinoxes,* pag. 62); et, supposant la nutation de $9''$ exactement, il trouve

la force de la Lune 2,3, ce qui rendroit sa masse seulement $\frac{1}{80}$ de celle dela Terre.

3572. La masse du Soleil, ou la force attractive qu'il exerce sur la Terre, peut se comparer avec une autre force qui a lieu dans les corps terrestres; je veux dire la force centrifuge d'un corps placé sous l'équateur, à la surface de la Terre, et qui tourne avec elle en 24 heures (3543). Cette force par laquelle un corps tend à s'éloigner de la Terre, et celle qu'a le Soleil pour retenir la Terre dans son orbite, ou du moins les effets de ces forces, sont les petits écarts des tangentes de la circonférence de la Terre et de l'orbite terrestre, qui correspondent à un même intervalle de temps (3536, 3538). Soit TV (FIG. 291) la circonférence de l'équateur terrestre, PEB un cercle égal à l'orbite de la Terre, l'arc PE étant supposé décrit dans le même temps que l'arc TV. Soit $ST = a$, $SP = r$, t la durée de la rotation, qui est de $23^h\ 56'$, T la durée de la révolution, qui est de 365^j, on aura (3546) $TR : PD :: \frac{a}{t^2} : \frac{r}{T^2}$; donc $PD = TR \cdot \frac{r t^2}{a T^2}$; c'est la force centrale que la Terre éprouve par l'action du Soleil : mais si l'orbite PB de la Terre devenoit aussi petite que le cercle TV, la force du Soleil deviendroit plus grande en raison inverse du carré de la distance, il faudroit la multiplier par $\frac{r^2}{a^2}$, donc elle seroit alors $= TR \cdot \frac{r^3 t^2}{a^3 T^2}$; c'est cette force du Soleil qu'il faut comparer avec la force centrifuge, pour avoir le rapport de la masse du Soleil avec la force centrifuge; car il faut supposer que l'une et l'autre agissent à pareilles distances, ou sur des cercles égaux, pour comparer les espaces qu'elles font parcourir, toutes choses égales, c'est-à-dire pour comparer leur énergie; ainsi l'on trouve la masse du Soleil en multipliant TR, qui est l'effet de la force centrifuge sur la Terre, par $\frac{r^3 t^2}{a^3 T^2}$, et si l'on appelle $\mathcal{E}$ cette force centrifuge, on pourra appeller la masse du Soleil $\frac{\mathcal{E} r^3 tt}{a^3 T^2}$. Nous en ferons usage pour la précession des équinoxes (3697).

3573. La masse du Soleil entre aussi dans l'expression du temps qu'une planete emploie à décrire un arc quelconque de son orbite. Supposons cet arc z exprimé en parties de la circonférence; le carré du temps qui répond à cet arc est d'autant plus grand que le cube de la distance est plus grand, et que la masse attractive est plus petite; car si la masse attractive doubloit, son effet PC doubleroit, et le carré de la vîtesse PB augmenteroit en même proportion (3538); ainsi la masse $S = \frac{1}{t^2}$, ou $t = \frac{1}{\sqrt{S}}$. mais puisque les carrés des temps sont comme les cubes des distances $t^2 = r^3$, ou $t = r^{\frac{3}{2}}$; donc

$t=\frac{r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{S}}$: de plus, le temps est représenté par l'espace z, en supposant un mouvement uniforme ; donc enfin le temps qui répond à un arc z est $\frac{r^{\frac{3}{2}}z}{\sqrt{S}}$. S doit être (pour plus d'exactitude) la somme des masses du Soleil et de la planete attirée (3591). Clairaut a fait usage de cette expression dans la *Théorie de la Lune*, pag. 19 de l'édition de 1765.

3574. *La vîtesse de projection, telle que* PA, *nécessaire pour décrire un cercle* PB, *est en raison inverse de la racine du rayon* SP.

Démonstration. Que deux planetes P et T décrivent autour du Soleil S les arcs PE, TV (3547), et que SP soit le quadruple de ST, je dis que la vîtesse PE sera la moitié de la vîtesse TV. En effet, PC sera quadruple de TR ; mais la gravité en P étant 16 fois moindre qu'en T, il faut prendre PD 16 fois moindre que TR, ou 64 fois moindre que PC, pour avoir l'espace PE que la planete P pourra décrire, étant retenue par la force centrale du Soleil; alors PE sera un huitieme de PB, puisque les sinus verses sont comme les carrés des arcs (3494) ; donc PE sera la moitié de TV dans un même espace de temps, c'est-à-dire que la vîtesse d'une planete doit être en raison inverse de la racine de sa distance, pour que la force centrale, qui est en raison inverse du carré de la distance, puisse la retenir. En général, on a PE $=\frac{r}{t}$; mais $r^3=t^2$, ou $\frac{r^2}{t^2}=\frac{1}{r}$; donc $\frac{r}{t}=\frac{1}{\sqrt{r}}=$ PE. Voilà pourquoi Jupiter, qui a une orbite neuf fois plus grande que celle de la Terre, emploie 30 fois plus de temps à la parcourir, sa vîtesse absolue étant le tiers de celle de la Terre à une distance neuf fois plus grande. J'ai donné la valeur des vîtesses moyennes dans la table de l'article 1398.

3575. Si la vîtesse de projection qu'une planete a reçue primitivement en partant de son aphélie, perpendiculairement à sa distance PS, s'est trouvée plus petite que la vîtesse nécessaire pour décrire un arc PB, la force centrale étant trop grande a dû prendre le dessus, et la planete se rapprocher du Soleil : voilà pourquoi les planetes, en partant de leur aphélie, se rapprochent du Soleil. Mais pourquoi s'en éloignent-elles ensuite? c'est la question que l'on se fait toujours quand on étudie cette matiere pour la premiere fois : on verra (3584) qu'après avoir parcouru 180°, la planete doit s'éloigner du Soleil autant qu'elle s'en étoit rapprochée, parceque la force centrifuge devient plus grande que la force centripete à mesure que la planete se rapproche du Soleil. On a vu que la vîtesse périhélie est à la vîtesse

aphélie en raison inverse des distances (1228), comme l'exige la lo des aires proportionelles au temps; il s'ensuit que la force centrifuge augmente beaucoup plus que la force centripete : c'est ce que je vais démontrer. Mais il faut observer ici que l'écart de la tangente n'exprimera plus la force centripete, puisqu'il ne s'agit plus de cercles concentriques parcourus uniformément; il exprimera la force centrifuge, ou la quantité dont la planete tend à s'éloigner du Soleil.

3576. *La force centrifuge augmente en raison inverse du cube des distances, en supposant la vîtesse en raison inverse des distances.*

Démonstration. Supposons que SP soit double de ST; l'arc PB sera double de l'arc TV, la ligne PC double de TR, et la force centrifuge en P double de la force centrifuge en T. Mais si la vîtesse absolue en P, au lieu d'être double de la vîtesse en T, n'en est que la moitié, c'est-à-dire si PE est quatre fois moindre que PB, le sinus verse PD sera seize fois moindre que PC, puisqu'il est comme le carré de l'arc (3494); donc PD sera 8 fois moindre que TR, c'est-à-dire que la force centrifuge est en raison inverse des cubes des distances SP et ST, que nous avons supposées être comme 2 à 1.

En général, on voit que PB : TV : : SP : ST, à cause des arcs semblables; donc si TV : PE : : SP : ST (1228), on aura $\frac{PE \cdot SP}{ST} = \frac{PB \cdot ST}{SP}$ et $\frac{PB}{PE} = \frac{SP^2}{ST^2}$; mais $\frac{PC}{PD} = \frac{PB^2}{PE^2}$ (3494) $= \frac{SP^4}{ST^4}$, et $\frac{TR}{PC} = \frac{ST}{SP}$; donc $\frac{TR}{PD} = \frac{SP^3}{ST^3}$, ou TR : PD : : SP^3 : ST^3; donc l'effet de la force centrif. est en raison inverse du cube de la distance, quand la vîtesse est en raison inverse des distances. C'est le cas d'une planete, quand on la considere dans son aphélie et dans son périhélie.

3577. *Le nombre de secondes qu'un corps placé à la surface de la Terre emploieroit à tourner, avec la force que la Terre exerce sur les corps graves placés à sa surface, est égal à* $2\sqrt{\frac{r}{p}}$, *en supposant* p *égal à la longueur du pendule à secondes* (2711).

Démonstration. Soit TR l'effet de la force centrale dans une seconde, ou la quantité dont un corps tournant dans le cercle TV seroit rapproché du centre S en une seconde par l'attraction qui le retient dans son orbite; TR est aussi égal à l'espace que les corps parcourent en une seconde par la gravité naturelle $= \frac{pc^2}{2}$ (3515) : mais RV^2, égal au produit des deux segmens du diametre, $= \frac{2\,rpc^2}{2} = c^2 rp$; donc le sinus RV, ou l'arc TV qui lui est égal (car il n'en differe que d'un infiniment petit du troisieme ordre), sera $= c\sqrt{rp}$; c'est

la valeur de l'arc parcouru en une seconde. Pour trouver le temps qui répond à la circonférence entiere $2\,rc$, on fera cette proportion : TV ou $c\sqrt{rp}$ est à 1″ comme la circonférence entiere $2\,rc$ est à un nombre de secondes qui sera $\frac{2r}{\sqrt{rp}}$ ou $2''\sqrt{\frac{r}{p}}$, qui est la durée de la révolution. Nous en ferons usage (3642) pour trouver la distance de la Lune par le moyen du pendule.

3578. Si la force de projection qui anime les planetes étoit détruite, la force centrale les feroit tomber vers le Soleil ; et si on les suppose dans leurs moyennes distances, Mercure y arriveroit en 15^j et 13^h; Vénus en $39^j\,17^h$; la Terre en $64^j\,13^h\,54'$; Mars en 121^j; Jupiter en 766^j; Saturne en 1900^j; la comete de 1681 (3185) en 37126^j (a); la Lune tomberoit sur la Terre en $4^j\,20^h$; les satellites de Jupiter tomberoient sur leur planete en 7^h, 15^h, 30^h et 71^h; et ceux de Saturne en 8^h, 12^h, 19^h, 68^h, 337^h, respectivement ; une pierre tomberoit au centre de la Terre, si le passage étoit libre, en $21'\,9''$. La regle qui sert à trouver ces nombres consiste à dire : la racine carrée du cube de 2 est à 1, ou 2828 est à 1000, comme la demi-durée de la révolution sidérale d'une planete est au temps de sa chûte jusqu'au centre de l'attraction (*Frisi, de Gravitate,* pag. 100). Le logarithme 9,2474250, qui est le complément de $\frac{3}{2}$ du logarithme de 2, ajouté avec celui de la révolution, donne le logarithme du temps cherché.

3579. Quelquefois on demande combien il faudroit de temps à un boulet de canon pour aller jusqu'au Soleil : si l'on fait abstraction de la pesanteur et de l'accélération, et qu'on suppose 200 toises par seconde pour la vîtesse du boulet, on trouve 12 ans et 5 mois.

Du Mouvement elliptique des planetes.

3580. LA FORCE CENTRALE, en raison inverse du carré de la distance, ne peut avoir lieu dans des orbites planétaires, à moins qu'elles ne soient des sections coniques. Newton, dans le premier livre de ses Principes, *prop.* 11, 12 et 13, démontra que, si les planetes décrivoient des sections coniques, la force centrale dont elles étoient animées devoit être en raison inverse du carré de la distance ; mais J. Bernoulli démontra le premier que la proposition inverse est égalément vraie, et que la force centrale étant supposée en raison inverse du carré de la distance, l'orbite est nécessairement une section conique (*Mém. acad.* 1710 et 1711. ; *OEuvres de* J. Bernoulli, T. I, *pag.* 469).

(a) Et non pas 66 mille, comme le dit Whiston (*Astronomical Principles of religion*).

Ces deux sortes de démonstrations pour les forces centrales dans les sections coniques en général n'étant pas nécessaires pour le calcul des perturbations célestes, je les supprime, et je renvoie aux auteurs où l'on trouve l'une ou l'autre, tels que Newton, L. I, *prop.* 11; Herman, Côtes, Euler, Moivre (*Miscel. analyt.*); le P. Frisi, *de Gravitate universali corporum*, 1768, pag. 104; le P. Boscovich, *de Inaequalit. Jovis et Saturni, propos.* 1; François Zanotti, *de Viribus centralibus;* Grégory, *Astronomiae Elementa*, T. I, *p.* 66; la Caille, *Leçons d'astr.;* le P. Grégoire Fontana, *Memorie della societa italiana*, T. II. Je me contenterai d'en donner la démonstration pour la parabole et pour l'ellipse, qui servent au calcul des cometes et des planetes.

3581. La force centrale, dans une parabole, est en raison inverse du carré de la distance au foyer. Soit OD (FIG. 262) un arc de parabole infiniment petit (3541), décrit par une comete (3104), DG une portion du diametre qui passe par le point D, et qui est parallele à l'axe PR, OG l'ordonnée, et DG l'abscisse pour l'arc OD; OH, parallele à SD, exprime la quantité dont la comete s'écarte de la tangente DX en décrivant l'arc DO; ainsi la ligne OH est un infiniment petit du second ordre (3541), de même que DN, qui lui est égale et parallele, et DG, qui lui est aussi égale, puisque GD et DS font, avec la tangente DT, des angles égaux. Le parametre du diametre DG est quadruple de SD; ainsi l'on a OG^2 ou ON^2 (qui n'en differe que d'un infiniment petit du second ordre [a]), égal à $4\,SD \cdot DG = 4SD \times OH$. Tirant les perpendiculaires OE et SX, les triangles ONE, SDX sont semblables, et la perpendiculaire SX est moyenne proportionelle entre SP et SD; donc $ON : OE :: SD : SX :: SX : SP$; ainsi $ON^2 : OE^2 :: SD : SP :: 4SD : 4SP$; mais $ON^2 = 4SD \cdot OH$; donc $OE^2 = 4SP \cdot OH$. Ainsi $OH = \frac{OE^2}{4SP}$ ou $\frac{OE^2}{4SP} \cdot \frac{SD^2}{SD^2}$; or, en supposant que le temps soit le même, ou que l'aire soit constante, on aura $OE^2 \cdot SD^2$ constant; donc OH sera proportionel à $\frac{1}{SD^2}$, c'est-à-dire que l'effet de la force centrale est en raison inverse du carré de la distance.

3582. La force centrale dans l'ellipse est aussi en raison inverse du carré de la distance. Soit VL (FIG. 285) un arc d'ellipse infiniment petit, VN la tangente, CI parallele à VN, LQ perpendiculaire à VS; la portion VE du rayon vecteur VS égal à l'écart LN de la tangente est l'effet de la force centrale. A cause des triangles semblables VEX, VqC, l'on a $VE : VX :: Vq : VC$: mais $Vq = AC$ (3407); donc l'ab-

(a) Car la différence $GN = 2\ OH \cos. G = 2\ OH \sin. DSX = 2\ OH \sin. \frac{1}{2}$ anomalie vraie.

scisse

scisse VX du diametre VCp, qui répond à l'ordonnée LEX, est $\frac{VC \cdot LN}{AC}$. Par la propriété des diametres de l'ellipse (3388) $VX \cdot Xp : XL^2 :: VC^2 : CI^2$, ou $VX \cdot 2VC : LE^2 :: VC^2 : CI^2$; donc $LE^2 = \frac{2VC \cdot VX \cdot CI^2}{VC^2}$; et mettant pour VX sa valeur $\frac{VC \cdot LN}{AC}$, $LE^2 = \frac{2LN \cdot CI^2}{AC}$. Les triangles semblables LEQ, VYq donnent cette proportion, $LE^2 : LQ^2 :: Vq^2 : VY^2 :: AC^2 : VY^2$ (3407): mais $AC \cdot CG = CI \cdot VY$ (3394), ou $AC^2 : VY^2 :: CI^2 : CG^2$; donc $LE^2 : LQ^2 :: CI^2 : CG^2$, ou $AC \cdot \frac{p}{2}$ (3385); ainsi $LQ^2 = \frac{LE^2 \cdot AC \cdot p}{2CI^2}$; substituant pour LE^2 sa valeur $\frac{2LN \cdot CI^2}{AC}$, on a $LQ^2 = p \cdot LN$. L'effet de la force centrale exprimé par LN est donc proportionel à $\frac{LQ^2}{p}$; celui d'une force centrale f est aussi en général $f dt^2$ (3506); donc $LN = f dt^2$, ou $f = \frac{LN}{dt^2} = \frac{LN}{SV^2 \cdot LQ^2}$ (1228); et mettant pour LQ^2 sa valeur $p \cdot LN$, $f = \frac{1}{p \cdot SV^2}$; c'est-à-dire que la force centrale est en raison inverse du carré de la distance SV au foyer de l'ellipse.

3583. Expliquons actuellement, d'une maniere plus palpable, la cause de l'éloignement alternatif (3575). Il semble, dit-on, qu'une planete sans cesse attirée vers le Soleil, et qui s'en est approchée à un certain point, devroit s'en approcher sans cesse, puisque le Soleil ne cesse point de l'attirer; cependant les planetes descendues à leur périhélie, s'éloignent du Soleil et retournent à leur aphélie. Voici donc la cause de ce mouvement alternatif: une planete qui a été projetée de son aphélie, avec une vîtesse trop petite pour décrire un cercle à une si grande distance (3575), ou avec une force de projection trop petite par rapport à la force centrale, se rapproche du Soleil; mais, en se rapprochant, elle augmente en vîtesse, sans quoi les aires ne seroient plus proportionelles au temps. Supposons qu'elle est arrivée à 180° du point de départ, c'est-à-dire à son périhélie, et que sa distance au Soleil est le quart de sa distance aphélie; sa vîtesse est quadruple de la vîtesse aphélie, car la vîtesse augmente en raison inverse des distances (1228), et c'est cette augmentation de vîtesse qui fait éloigner la planete.

3584. En effet, lorsqu'elle sera arrivée à une distance quatre fois moindre, la force centrale ou l'attraction du Soleil sera seize fois plus grande (3546), parcequ'elle est en raison inverse du carré de la distance: mais la force centrifuge sera soixante-quatre fois plus grande (3576), parcequ'elle augmente, soit par le carré de la vîtesse, soit par la diminution de la distance; donc la force centrifuge est alors

quatre fois plus grande que la forcecentrale ; il n'est donc pas étonnant que la planete commence à s'écarter du Soleil.

3585. On croira peut-être que la planete devroit cesser de s'approcher du Soleil aussitôt que la force centrifuge se trouve égale à la force centripete ; mais il faut considérer que, dans cet instant, qui arrive lorsque la planete est vers sa moyenne distance au Soleil, ou vers le point M (FIG. 296), la direction MN de son mouvement est trop oblique au rayon vecteur MS, et fait un angle NMS trop petit pour qu'il puisse devenir tout de suite un angle droit ; il faut que la planete descende de plus en plus, et que la courbure de sa route se soit arrondie assez pour que le rayon vecteur SP soit perpendiculaire au mouvement de la planete ; c'est alors que l'excès de la force centrifuge sur la force centrale sera employé tout entier à écarter la planete du Soleil ; et cela n'arrive que dans le point P, qui est diamétralement opposé au point A. En partant du point P, la planete emploiera, pour perdre son excès de force centrifuge, autant de temps qu'il lui en a fallu pour l'acquérir ; voilà pourquoi la seconde partie POA de l'ellipse sera égale à la partie descendante AMNP, et décrite dans le même intervalle de temps. On peut voir des détails à ce sujet dans Newton, L. I, *proposition* 16.

3586. La théorie de l'attraction seroit facile à employer dans l'astronomie, si chaque planete, en tournant autour d'un centre, n'éprouvoit d'autre attraction que celle de la force centrale ; mais les autres attractions qui s'y joignent rendent les effets très multipliés : il est temps de nous livrer à ces recherches, les plus importantes et les plus difficiles de toute l'astronomie théorique.

Des Inégalités produites par les attractions mutuelles des corps célestes.

3587. Si chaque planete, en tournant autour d'un centre, n'éprouvoit d'autre force que celle qui la porte vers ce centre, elle décriroit un cercle ou une ellipse dont les aires seroient proportionelles aux temps (1233) ; mais chaque planete étant attirée par toutes les autres, dans des directions différentes, et avec des forces qui varient sans cesse, il en résulte des inégalités et des perturbations continuelles ; c'est le calcul de ces perturbations qui occupe depuis long-temps les géometres et les astronomes. Newton commença par celles de la Lune (1456) ; plusieurs autres géometres ont perfectionné cette théorie (1478). Euler donna le premier des calculs de cette espece pour les inégalités de Saturne, dans une piece qui remporta le prix de l'a-

cadémie en 1748 : celles des autres planetes ont été calculées successivement (3656, 3670).

Cette théorie des perturbations célestes, qui fait aujourd'hui une partie essentielle de l'astronomie, ne se trouve dans aucun livre élémentaire : je vais essayer d'en développer les principes d'une maniere qui puisse servir d'introduction à tous les ouvrages qu'on a écrits là-dessus ; j'aurai soin de ne rien supposer que je n'aie démontré. On trouvera des détails plus approfondis dans le livre de M. Cousin (*Introduction à l'étude de l'astronomie physique*, 1787, *in*-4°.)

3588. Si deux planetes, dont l'une tourne autour de l'autre, étoient attirées également et suivant des directions paralleles, par une troisieme, cette nouvelle attraction ne changeroit rien à leur systême, à leur mouvement, à leur situation relative ; ce seroit la même chose que si l'espace même, ou le plan dans lequel se fait le mouvement, avoit changé de position : mais ce qui avoit lieu auparavant dans l'espace ou dans le plan, continueroit d'avoir lieu quoiqu'on le transportât ; la planete, vue du centre de son mouvement, paroîtroit toujours décrire une ellipse ; ses longitudes vues de ce centre et ses rayons vecteurs seroient les mêmes.

Ainsi deux attractions égales et paralleles ne changent jamais rien dans un systême de corps ; ce n'est que la différence des attractions qui produit une inégalité ou une différence de mouvement : la Lune n'est troublée dans son mouvement autour de la Terre que parcequ'elle est attirée par le Soleil un peu plus ou un peu moins que la Terre : la mer n'est agitée deux fois le jour par la Lune que parceque la Lune attire les eaux plus qu'elle n'attire la Terre quand elle domine sur les eaux, et qu'ensuite elle attire ces mêmes eaux moins que la Terre, 12^h après (3771).

3589. Quand on veut calculer les troubles qu'une attraction étrangere apporte au mouvement d'une planete dans son orbite autour du Soleil, il faut savoir combien elle agit sur le Soleil et sur la planete troublée ; c'est la différence des actions qui est la force pertubatrice ; c'est cette différence dont on calcule les effets ; car si le Soleil et la planete étoient attirés également, nous n'aurions à tenir compte d'aucune différence, l'observation ne nous indiqueroit aucun dérangement.

3590. Cette considération étant bien méditée fera sentir que la pesanteur de la Lune sur la Terre, c'est-à-dire la force centrale qui retient la Lune dans son orbite, est diminuée dans les deux syzygies, soit quand la Lune est en conjonction, soit quand elle est en op-

position ; c'est une chose que les adversaires de l'attraction n'ont jamais comprise, et qui cependant influe beaucoup dans l'explication des phénomenes. Il en est de la Lune comme des eaux de la mer, qui s'élevent deux fois le jour vers notre zénit, une fois quand la Lune domine sur les eaux ou qu'elle est au zénit, et une fois quand elle est au nadir (3771) : les observations prouvent que la Lune tend à s'éloigner de la Terre également (ou à très peu près) dans les deux syzygies, et à s'en rapprocher dans les deux quadratures : nous le démontrerons par le calcul (3635) ; mais on le sentira aussi par le raisonnement qui suit. Quand la Lune est en conjonction, elle est plus près du Soleil que n'est la Terre de $\frac{1}{398}$ (1729); elle est donc plus attirée que la Terre de $\frac{1}{199}$ de la force du Soleil sur la Terre ; car la différence des carrés est double de celle des racines (3423) ; sa pesanteur vers la Terre est donc affloiblie de $\frac{1}{199}$: nous verrons à l'article 3635 une évaluation plus rigoureuse.

Quand la Lune est pleine ou en opposition, elle est attirée, il est vrai, du même côté, soit par le Soleil, soit par la Terre; mais il ne s'ensuit pas que sa pesanteur soit augmentée : en effet, si, dans ce cas, la Lune et la Terre étoient attirées par le Soleil, précisément avec la même force, il n'en résulteroit aucun changement dans la pesanteur de la Lune vers la Terre, ni dans son mouvement autour de la Terre, quoique la Lune fût toujours attirée du même côté par cette somme de deux forces ; mais la Terre est plus attirée que la Lune de $\frac{1}{199}$, donc la Terre tend à fuir la Lune autant que la Lune tendoit à s'éloigner de la Terre quand elle étoit nouvelle; leur liaison, leur union mutuelle, leur tendance réciproque, leur sympathie, leur attraction, est autant diminuée quand le Soleil éloigne la Terre de la Lune, que quand il éloigne la Lune de la Terre ; donc, en opposition comme en conjonction, la pesanteur est diminuée et la Lune tend à s'éloigner de la Terre.

3591. La force du Soleil sur une planete qui tourne autour de lui, que nous appellons $\frac{S}{r^2}$ (3532), n'est pas la seule qu'il faille considérer lorsqu'on veut avoir le mouvement d'une planete autour du Soleil, ou le mouvement tel qu'il seroit vu par un observateur situé au centre du Soleil. La planete T (FIG. 290) attire aussi le Soleil en sens contraire avec une force $\frac{T}{r^2}$; et si l'on veut supposer le Soleil fixe, il faut attribuer un nouveau mouvement vers le Soleil égal à celui que le Soleil a vers la planete, ou, ce qui revient au même, il faut supposer que le Soleil attire la planete avec une force $\frac{S+T}{r^2}$, c'est-à-

dire avec la somme des deux masses du Soleil et de la planete ; ce sera $\frac{1+T}{r^2}$, si l'on prend pour unité la masse du Soleil.

L'effet de cette attraction de la planete T sur le Soleil S est de faire décrire au Soleil une petite ellipse autour du centre de gravité commun du Soleil et de la planete (Newton. L. I. , *prop.* 67, L. III, *prop.* 13)[a] ; cette attraction produit une partie des petites inégalités du mouvement apparent du Soleil , qui se calculent en prenant la différence des attractions que chaque planete exerce sur le Soleil et sur la Terre. Suivant Newton , le Soleil doit être déplacé d'une petite quantité par les attractions planétaires ; mais la forme de calcul usitée dans l'astronomie exige qu'on suppose toujours le Soleil fixe , et qu'on transporte à chaque planete le mouvement qu'elle produit sur le Soleil ; alors la situation respective de la planete au Soleil est la même qu'en tenant compte du déplacement du Soleil.

3592. Cette considération apporte une modification à la loi de Képler (1226 , 3548) ; la force étant $\frac{1+T}{r^2}$ au lieu de $\frac{1}{r^2}$ (3548), on aura $\frac{PD}{TR} = \frac{1+T}{r^2} = \frac{r}{t^2}$, ou $\frac{1}{t^2} = \frac{1+T}{r^3}$; et comme le moyen mouvement est en raison inverse des temps de la révolution , si l'on appelle P la distance d'une planete au Soleil , M sa masse , N son mouvement moyen , et n celui de la Terre , on aura $N^2 = \frac{1+M}{P^3}$ et $n^2 = \frac{1+T}{r^3}$, ou $N^2 : n^2 :: \frac{1+M}{1+T} : P^3$, en faisant $r = 1$; donc $P = \left(\frac{n}{N}\right)^{\frac{2}{3}} \times \left(\frac{1+M}{1+T}\right)^{\frac{1}{3}}$; on tirera la racine cube de $\frac{1+M}{1+T}$, en ne prenant que les trois premiers termes (3421), et l'on aura $P = \left(\frac{n}{N}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot (1 + \frac{1}{3}M - \frac{1}{3}t)$; ainsi quand on a trouvé la distance de la planete par son moyen mouvement (1225), il faut y ajouter la fraction $\frac{1}{3}M - \frac{1}{3}T$, qui suppose pour unité la masse du Soleil.

3593. L'expression $\frac{S}{r^2}$ de la force attractive est celle qui a lieu quand l'action se fait directement , et toujours dans le sens du rayon vecteur ; mais les planetes sont attirées les unes par les autres obliquement et en tout sens, selon des directions qui changent perpétuellement , tandis qu'elles sont toujours attirées directement vers le centre autour duquel elles tournent ; ainsi , pour connoître l'effet des perturbations et des attractions célestes , il faut décomposer leur force absolue et directe (qui est la masse divisée par le

[a] Il n'est pas nécessaire , comme le croyoit Frisi (*De Gravitate*, pag. 113), que le Soleil ait reçu lui-même une impulsion autour du centre de gravité.

carré de la distance), et trouver son effet sur la direction même de la force centrale. J'ai dit, par exemple, que l'action de Jupiter sur la Terre étoit $\frac{1}{25000}$ de celle du Soleil sur la Terre, par une attraction directe (3534); mais ces deux forces qui agissent sur la Terre se contrarient, et ont souvent des directions différentes; la force de Jupiter, qui, dans l'attraction directe, est $\frac{1}{25000}$ de celle du Soleil, fera beaucoup moins d'effet quand elle agira de côté; par exemple, elle sera deux fois moindre quand elle agira sous un angle de 60°.

3594. Un corps sollicité suivant des directions AB, AC (fig. 295), qui font entre elles un angle BAC, par deux puissances qui soient entre elles comme les lignes AB, AC, décrira la diagonale AD du parallélogramme BACD, dans le même temps qu'il auroit employé à parcourir AB ou AC étant mu séparément par une des deux puissances (1232). Ainsi la force exprimée par la direction et par la longueur de la diagonale AD équivaut à deux forces AB, AC, qui auroient agi à la fois; et lors même qu'elle est unique dans le principe, elle peut également se prendre pour la réunion des deux autres, auxquelles elle est tout-à-fait équivalente; c'est-à-dire que la force AD peut se décomposer en deux autres suivant AC et AB.

La même ligne AD est aussi diagonale du parallélogramme AbDc, et la force AD résulteroit également de l'assemblage des deux forces Ab, Ac; donc, sur une ligne donnée AD, l'on peut faire des triangles quelconques ABD, AbD de grandeur ou de forme arbitraire; il sera toujours permis de substituer à la force AD deux forces qui aient pour expression les côtés d'un de ces triangles quelconques.

Ainsi la force AD, que nous nommerons F, décomposée suivant AB et AC, donnera deux forces proportionelles à ces deux lignes; et, parceque AC est égale à BD, une de ces deux forces sera égale à $F \cdot \frac{AB}{AD}$; car puisque les lignes AB, AC, AD sont proportionelles aux forces qu'elles expriment, la force suivant AB est à la force suivant AD, qui est F, comme la ligne AB est à la ligne AD; donc la force suivant $AB = F \cdot \frac{AB}{AD}$; de même il y aura une force suivant AC, qui sera $F \cdot \frac{AC}{AD}$, ou $F \cdot \frac{BD}{AB}$.

3595. Si le parallélogramme donné est rectangle en B (fig. 294), BD est le sinus de l'angle BAD, en prenant AD pour rayon ou pour unité; AB en est le cosinus; ainsi dans ce cas la force suivant $AB = F \cdot \cos. BAD$, et la force suivant AC ou $BD = F \cdot \sin. BAD$; ces deux forces AC, AB sont équivalentes à la force donnée AD, qu'il s'agissoit de décomposer.

Par le moyen de cette décomposition des forces attractives, on peut trouver les forces perturbatrices qui agissent sur une planete, rapportées à la direction même de son mouvement. Nous prendrons pour exemple la Terre, qui est attirée par l'action de Jupiter; nous chercherons ensuite quelle est l'inégalité qui en résulte dans le mouvement de la Terre.

3596 Soit AT (FIG. 290) l'orbite de la Terre qui est la planete troublée, DR celle de Jupiter ou de la planete troublante, et supposons-les dans un même plan pour simplifier nos calculs. Soit M la masse de la planete troublante ou de Jupiter situé en R; il attire la Terre T avec une force $\frac{M}{RT^2}$ (3533); nous ne mettons point ici la somme des masses de Jupiter et de la Terre, parceque nous négligerons totalement les troubles de Jupiter, qui sont trop petits pour influer sensiblement sur le dérangement de la Terre.

La force $\frac{M}{RT^2}$ doit se décomposer en deux autres dont l'une agisse de T en G parallèlement à SR, afin qu'on puisse en retrancher la force de Jupiter sur le Soleil (3589), et l'autre de T en S: la premiere est $M \cdot \frac{RS}{RT^3}$ (3594); elle tend à éloigner la planete du Soleil dans la direction de TG ou de SR qui lui est parallele; et pour cela nous lui donnons le signe négatif: la deuxieme force est $\frac{M \cdot TS}{RT^3}$, elle tend à augmenter la pesanteur de la Terre vers le Soleil, et nous la mettrons pour cette raison en +. Elle est dans la direction du rayon vecteur TS, auquel nous avons intention de rapporter le mouvement de la Terre; ainsi elle n'aura besoin d'aucune autre décomposition.

3597. Mais la force $\frac{M \cdot RS}{RT^3}$ ou $\frac{M \cdot TG}{RT^3}$ n'étant point dans la direction du rayon vecteur ni dans la direction du mouvement de la Terre, il faut la rapporter à ces deux directions. Il faut auparavant en soustraire la force sur le Soleil, parceque la force TG n'agit, pour troubler le mouvement de la Terre, qu'à raison de ce qu'elle est plus ou moins grande que celle qui agit en même temps sur le Soleil de S en R (3589): mais cette force sur le Soleil est $\frac{M}{SR^2}$ (3533), il faut donc la retrancher de la force TG qui est $\frac{M \cdot RS}{RT^3}$; et nous aurons $\frac{M \cdot RS}{RT^3} - \frac{M}{SR^2}$ pour la force perturbatrice suivant SR ou TG. Cette force doit être décomposée suivant TE et TB; pour cela on la multiplie par le cosinus et par le sinus de l'angle GTE ou RST (3595), c'est-à-dire de l'angle de commutation (1141) que nous appellons t.

La force suivant TE agira dans la direction de STE du rayon vecteur de la Terre, mais en sens contraire de la force centrale du Soleil; c'est pourquoi elle sera négative, la force centrale du Soleil étant supposée positive, parcequ'elle est toujours la plus grande. L'autre force agira de T en B, et tendra à diminuer la vîtesse de la Terre qui est supposée aller de A en T; c'est pourquoi elle sera aussi négative. La premiere est donc $-\left(\frac{M\cdot RS}{RT^3}-\frac{M}{RS^2}\right)\cdot \cos. t$ (3595), force dirigée vers le Soleil, et l'autre $-\left(\frac{M\cdot SR}{RT^3}-\frac{M}{SR^2}\right)\cdot \sin. t$; celle-ci est la force qui agit perpendiculairement au rayon vecteur, et que nous appellerons Π avec Clairaut. Le signe $-$ deviendroit $+$, si l'on cherchoit les inégalités de la planete R, parceque le point R est moins avancé suivant l'ordre des signes que le point T, les planetes les plus éloignées étant toujours les plus lentes.

3598. Quant à la force dirigée vers le Soleil, il faut se rappeller que nous en avons trouvé une partie $+\frac{M\cdot TS}{RT^3}$ (3596), à laquelle il faut ajouter celle qu'on vient de trouver, puisqu'elle est dans la même direction; et l'on aura enfin la force perturbatrice dirigée vers le centre du Soleil que nous nommons $\Phi=\frac{M\cdot TS}{RT^3}-\left(\frac{M\cdot SR}{RT^3}-\frac{M}{SR^2}\right)\times$ $\cos. t$; c'est une partie de la force centrale. Pour faire usage de ces forces, il faut connoître la valeur de M, c'est-à-dire la masse de Jupiter comparée à celle du Soleil: on a vu ci-devant sa valeur $=\frac{1}{1067}$ (3559).

3599. Ces forces Φ et Π sont exprimées en parties de la force centrale du Soleil S sur la Terre T; car quand on dit que la force de Jupiter est $\frac{M}{RT^2}$, l'on suppose que l'on a exprimé la masse M en parties de la masse du Soleil (3558), et la distance RT en parties de la distance moyenne ST du Soleil à la Terre; en sorte que l'on appelle 1 la force que le Soleil exerce sur la Terre en l'attirant, lorsqu'elle est dans sa distance moyenne: supposons que $M=\frac{1}{1000}$ et $RT=5$, on aura $\frac{M}{RT^2}=\frac{1}{25000}$ (3534); cela veut dire que la force de Jupiter sur la Terre est $\frac{1}{25000}$ de la force centrale que le Soleil exerce sur la Terre. Par le moyen du rapport qu'il y a entre ces deux forces de Jupiter et du Soleil, on trouvera le rapport des espaces qu'elles font parcourir, et conséquemment la quantité dont le mouvement de la Terre dans son orbite est dérangé.

3600. La valeur $\frac{M\cdot TS}{RT^3}$ nous fait voir que la force perturbatrice qui agit dans la direction ST du rayon vecteur, et qui modifie la force

centrale,

centrale, diminue en raison inverse du cube des distances, comme je l'ai supposé (3568). On verra bientôt que le second terme de la force Φ, combiné avec le premier, donne, quand il s'agit de la Terre, une force totale suivant ST, qui est aussi en raison inverse du cube des distances (3634) : voilà pourquoi nous avons supposé que la force de la Lune, pour élever les eaux de la mer, seroit plus petite si elle étoit à la distance du Soleil, et cela autant que le cube de la distance du Soleil est plus grand que le cube de la distance de la Lune, parceque la force qui souleve les eaux de la mer est une force décomposée dans la direction TS du rayon de la Terre.

3601. La force d'une planete sur une autre étant ainsi décomposée et exprimée d'une maniere générale, nous allons chercher quel effet il en résultera sur le mouvement de la planete troublée : c'est peu de savoir pour un certain moment que la force de Jupiter pour déranger le mouvement de la Terre est $\frac{1}{25000}$ de celle du Soleil qui retient la Terre dans son orbite ; il faut savoir combien cette force, après avoir agi pendant une infinité de momens, c'est-à-dire après un temps fini, aura produit d'effet sur le mouvement de la Terre, de combien elle aura augmenté ou diminué la vîtesse de la Terre dans son orbite, de combien elle aura changé le plan de cette orbite ; tout cela exprimé en minutes et en secondes suivant la forme de nos tables astronomiques ; c'est en quoi consiste la difficulté du problême des trois corps : on connoît aisément la force perturbatrice à chaque instant ; mais il faut chercher, 1°. son effet au même instant pour altérer l'orbite, 2°. la somme de ces effets répétés une multitude de fois ; c'est ce qui rend ici le calcul intégral absolument nécessaire : on connoît l'effet d'un moment, et il s'agit de connoître l'effet de trois mois, d'un an, d'une révolution entiere, ou d'un espace quelconque de temps, pendant lequel cet effet n'est point uniforme ni proportionel au temps.

3602. Nous commencerons par réduire en équations le problême des trois corps à la maniere de Clairaut. Soit P une planete (FIG. 297) qui tourne autour du Soleil S, PA le petit arc de son orbite qu'elle a décrit en un instant infiniment petit, et qui est supposé une ligne droite infiniment petite ; AB une ligne droite égale à AP, que la planete parcourroit dans l'instant suivant si elle étoit abandonnée à elle-même (1231) ; il faut trouver quel seroit le rayon SB et l'angle ASB dans ce cas-là ; comparant alors l'angle ASB avec celui que la planete parcourt effectivement, on aura l'effet des forces qui agissent pour augmenter ou diminuer l'angle de son mouvement. De même, en comparant la distance SB qui auroit lieu dans le cas du mouvement

libre et uniforme, avec celle qui convient au mouvement actuel de la planete, on aura l'effet des forces qui agissent pour augmenter ou diminuer la distance ou le rayon vecteur. Soit $SP = r$, l'angle $PSA = du$; ayant tiré PE perpendiculaire sur SA, AE sera la différence entre SP et [a] SA; ainsi $AE = dr$, $SA = r + dr$: on aura aussi l'arc $PE = r\,du$ (3498), c'est une fraction de la distance r, l'angle du étant toujours supposé une fraction des 57° qui font la valeur de l'arc égal au rayon, comme l'arc est une fraction du rayon; on tirera BH parallele à AS, AH perpendiculaire à BH, et l'on aura $AH = PE$ et $AE = BH$, puisque les triangles ABH et PAE sont parfaitement égaux; il faut chercher la valeur de GH, la retrancher de AH pour avoir AG, d'où l'on tirera la valeur de l'angle ASG ou ASB que l'on cherche.

3603. Il faut d'abord faire voir que l'angle ASB ne differe de l'angle ASP que d'un infiniment petit du second ordre; ayant prolongé SP en M, j'abaisse la perpendiculaire BM sur PM, et la perpendiculaire AO sur MB; dans les triangles semblables BAO, BPM, $BA = AP$, donc $BO = OM$: mais la ligne SAD fait avec la vraie perpendiculaire AO un angle $OAD = PSA$ infiniment petit du premier ordre; donc OD est un infiniment petit du 2e ordre (3490); donc BD ne differe de DM que d'un infiniment petit du second ordre. Il faut dire la même chose des angles PSA, ASB, dont les arcs BD et MD sont la mesure.

Les triangles EPS, BGH, sont semblables; car ils sont tous deux rectangles, et l'angle $GBH = ASB$ ne differe de l'angle ASP que d'un infiniment petit du second ordre, qui n'introduiroit dans la valeur de GH qu'une différence du troisieme (3491); on aura donc cette proportion, $SP : PE :: BH$ ou $AE : GH$, c'est-à-dire $r : r\,du :: dr : GH$; donc $GH = dr\,du$, ce qui est encore une partie ou une fraction du rayon r; donc $AG = AH - GH = r\,du - dr\,du$. L'angle ASB ou ASG est égal à l'arc AG divisé par le rayon AS (3497) $= \frac{AG}{AS} = \frac{r\,du - dr\,du}{r + dr}$; on fera la division actuelle en procédant comme dans la division ordinaire, et négligeant les quantités du troisieme ordre, on trouvera pour le quotient ou pour la valeur de l'angle ASB,

[a] Je suppose ici que l'arc PE décrit du centre S soit confondu avec la perpendiculaire sur SA, il n'en differe que d'un infiniment petit du troisieme ordre (3462), ou $\frac{1}{6}$ du cube de l'arc. Et quant à sa situation en E ou de la longueur AE, la différence n'est que du second ordre, et il n'en résulteroit sur GH et FG que nous cherchons, qu'une erreur du troisieme ordre.

$\delta u - \frac{2\delta r \delta u}{r}$; c'est l'angle que la planete P auroit parcouru dans le second instant en suivant librement la ligne droite PAB.

3604. Pour parvenir à trouver aussi le rayon vecteur SB, nous chercherons de même la valeur de FG, en disant, SE ou SP : PE :: AF ou PE : FG[a], c'est-à-dire $r : r\delta u :: r\delta u : FG$; donc $FG = r\delta u^2$; ainsi la distance $SB = SP + AE + FG + GB$ ou son égale BH[b], $= r + \delta r + r\delta u^2 + \delta r = r + 2\delta r + r\delta u^2$. Telle est donc la valeur de la distance SB de la planete au Soleil, qui auroit lieu si elle avoit parcouru AB = PA, librement et dans le même espace de temps qu'elle avoit mis à parcourir PA ; l'on auroit donc la distance $SB = r + 2\delta r + r\delta u^2$, et l'angle parcouru $ASB = \delta u - \frac{2\delta r \delta u}{r}$. Voyons combien ces quantités deviendront différentes par l'effet des forces perturbatrices qu'il faut considérer.

3605. Le mouvement d'une planete étant inégal en lui-même, et troublé de plus par les attractions étrangeres, cette planete, au lieu d'arriver en B, se trouvera en un point K ; l'expression de l'angle ASK, qu'elle parcourra réellement, est en général $\delta u + \delta\delta u$; car nous n'avons, quant à présent, aucune maniere d'exprimer l'inégalité d'un angle variable δu, ou son accroissement, c'est-à-dire la différentielle de δu, qu'en l'appellant $\delta\delta u$ (3430). Si de la valeur de l'angle $ASK = \delta u + \delta\delta u$ on ôte l'angle $ASB = \delta u - \frac{2\delta r \delta u}{r}$, on aura, pour la valeur de l'angle BSK, $\delta\delta u + \frac{2\delta r \delta u}{r}$: mais l'arc LK est égal à l'angle multiplié par le rayon (3498), c'est-à-dire par $SL = r$; donc $LK = r\delta\delta u + 2\delta r \delta u$; c'est l'espace parcouru perpendiculairement au rayon vecteur, en vertu de la force perturbatrice Π qui agit sur la planete (3597). Cet espace est une fraction du rayon r, puisque c'est r multipliée par une petite fraction de r, et par d'autres petites fractions δu ou $\delta\delta u$ qui, dans la multiplication, ne produisent que des fractions du rayon. A l'égard de la masse, qui multipliera tous les termes, elle est une fraction de la masse du Soleil.

3606. De même la vraie distance SK de la planete au Soleil doit être exprimée en général par $r + 2\delta r + \delta\delta r$ (car l'augmentation du rayon PS, en devenant SA, étoit δr, et en devenant SK, ce sera

[a] Je suppose SE = SP et AF = PE ; ils different d'un infiniment petit du second ordre, comme l'angle PSA differe de l'angle ASB ; mais il n'en résulteroit qu'un infiniment petit du troisieme sur la valeur de FG que nous cherchons.

[b] Je suppose BG = BH ou AE, puisqu'ils ne different que d'un infiniment petit du troisieme ordre.

encore $dr + ddr$) ; l'on ôtera ce vrai rayon vecteur SK ou SL du rayon SB, qui auroit lieu si la planete eût avancé uniformément sur PAB, c'est-à-dire $r + 2dr + rdu^2$; et l'on aura $BL = rdu^2 - ddr$, qui est encore une petite fraction de r ; c'est l'effet de la force perturbatrice Φ, qui agit de B en S, jointe à la force centrale du Soleil égale à $\frac{S}{r^2}$ (3591) ; car c'est le total de la force dirigée vers S, qui produit la quantité BL dont la planete est rapprochée du centre (1231).

3607. Toutes les fois qu'une force attractive agit sans interruption pendant un intant dt, les espaces qu'elle fait parcourir sont toujours comme les carrés des temps (3508) ; ainsi la force Π, multipliée par le carré du temps dt pendant lequel elle agit, est égale à l'espace LK qu'elle fait parcourir perpendiculairement au rayon vecteur ; donc $\Pi dt^2 = rddu + 2drdu$; c'est la premiere équation différentio-différentielle du problême des trois corps.

Il en est de même de la force dirigée au centre S, et qui fait parcourir BL dans le même temps dt ; l'on aura $\left(\frac{S}{r^2} + \Phi\right) dt^2 = rdu^2 - ddr$; c'est la seconde équation du problême. Par le moyen de ces deux équations générales, il s'agit de trouver le rayon vecteur de l'orbite troublée, et l'angle u de l'anomalie vraie pour un temps quelconque. Je vais expliquer la méthode par laquelle Clairaut a résolu ces deux équations (*Mém. acad.* 1748 ; *Théorie de la Lune*, 1765). Au lieu de dt, il emploie le mouvement moyen dx qui est proportionel au temps, ce qui revient au même ; car dt est une fraction du temps de la révolution (3496), et dx est une fraction pareille de 360°.

3608. On peut tirer de la seconde équation $\left(\frac{S}{r^2} + \Phi\right) dt^2 = rdu^2 - ddu$ une expression de la force centrifuge qui a lieu dans un cercle décrit uniformément ; car si r est constant, le terme ddr disparoîtra totalement, et mettant F au lieu de $\frac{S}{r^2} + \Phi$, on aura $F dt^2 = rdu^2$; donc $F = \frac{rdu^2}{dt^2}$, ou $\frac{rrdu^2}{rdt^2}$, c'est-à-dire $\frac{rrdu^2}{dt^2}$ qu'on divisera par r : mais $\frac{rrdu^2}{dt^2}$ est le carré de $\frac{rdu}{dt}$ ou du petit arc divisé par le temps, car alors PA et PE se réduisent au même ; c'est donc le carré de la vîtesse de la planete qui est représentée par l'arc PB (FIG. 291) ; donc $F = \frac{PB^2}{r}$; c'est l'expression de la force centrale ou de la force centrifuge ; car elles sont égales dans le mouvement circulaire. Cette expression est double de celle que donne la propriété du cercle (3538), parceque, dans le calcul différentiel, nous ve-

nons de supposer que PB est une ligne droite, au lieu que, dans la méthode synthétique, nous l'avions supposée circulaire, ce qui rendoit l'écart de la tangente moitié moindre : cette différence a été la source de quelques méprises dont j'ai parlé (3539).

3609. Je passe à la résolution des deux équations ; la premiere est $\Pi\, dx^2 = r\, d\, du + 2\, dr\, du$ (3607). En multipliant par $\frac{r}{dx}$, l'on en tire $\frac{rr\, d\, du + 2r\, dr\, du}{dx} = r\Pi\, dx$, et prenant l'intégrale (3438), $\frac{rr\, du}{dx} = f + \int \Pi r\, dx$, où dx est supposé constant, et f une constante ajoutée pour l'intégration (3444). Multipliant par $\Pi\, r\, dx$, on a $\Pi r^3\, du = f\Pi r\, dx + \Pi r\, dx \int \Pi r\, dx$, et prenant l'intégrale, $\int \Pi\, r^3\, du = f\int \Pi\, r\, dx + \frac{1}{2}(\int \Pi\, r\, dx)^2$ (3442) : car différentiant $\frac{1}{2}(\int \Pi r\, dx)^2$, on a $2 \cdot \frac{1}{2} \int \Pi r\, dx \cdot \Pi\, r\, d\, dx$ (3442) ; on n'ajoute pas de constante, parcequ'on va redifférentier. On résoudra cette équation du second degré en multipliant tout par 2, en ajoutant de chaque côté f^2 ; et tirant la racine des deux membres, il viendra $f + \int \Pi r\, dx = \sqrt{(f^2 + 2\int \Pi r^3\, du)}$; et prenant la différentielle (3443), on a $\Pi r\, dx = \frac{\Pi r^3\, du}{\sqrt{(f^2 + 2\int \Pi r^3\, du)}}$, $dx = \frac{rr\, du}{f\sqrt{(1 + 2\rho)}}$, en faisant $\rho = \frac{\int \Pi r^3\, du}{f^2}$; c'est l'élément du temps ou de la longitude moyenne, qui sera développé (3620) après qu'on aura trouvé le rapport des deux autres inconnues r et u.

3610. Passons à la seconde équation (3607) $r\, du^2 - d\, dr = \left(\frac{S}{rr} + \Phi\right) dx^2$, ou $\frac{r\, du^2}{dx^2} - \frac{d\, dr}{dx^2} = \frac{S}{rr} + \Phi$, qu'il faut intégrer pour avoir la valeur de r. On considérera d'abord que dans l'équation il n'y a que le second terme $\frac{d\, dr}{dx^2}$ qui contienne une différentielle du second ordre, et ce terme est la même chose que $d\left(\frac{dr}{dx}\right)$, divisé par dx, en supposant dx constant ; mais, pour rendre l'équation générale, et pour avoir la liberté de supposer constante une des autres inconnues, comme du, ce qui sera plus commode dans la suite du calcul, il faut exprimer cette équation d'une maniere qui ne suppose point que dx soit constant, et pour cela il suffit d'écrire $\frac{d\left(\frac{dr}{dx}\right)}{dx}$ (3455) ; on aura donc pour la seconde équation $\frac{r\, du^2}{dx^2} - \frac{d\left(\frac{dr}{dx}\right)}{dx} = \frac{S}{rr} + \Phi$, dans laquelle il faut d'abord substituer la valeur de $\frac{r\, du^2}{dx^2}$:

on prendra celle de $\partial x = \frac{r^2 \partial u}{f\sqrt{(1+2\rho)}}$ (3609), $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{f\sqrt{(1+2\rho)}}{rr}$; $\frac{\partial u^2}{\partial x^2} = \frac{f^2}{r^4}(1+2\rho)$; $\frac{r\partial u^2}{\partial x^2} = \frac{f^2}{r^3}(1+2\rho)$; c'est la valeur du premier terme; nous l'emploierons bientôt.

3611. Il faut chercher celle du second terme $\frac{\partial\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)}{\partial x}$; au moyen de la valeur de $\frac{\partial u}{\partial x}$ nous aurons celle de $\frac{\partial r}{\partial x}$, en multipliant $\frac{f\sqrt{(1+2\rho)}}{rr}$ par $\frac{\partial r}{\partial u}$, c'est-à-dire que $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{f\partial r}{rr\partial u} \cdot \sqrt{(1+2\rho)}$. C'est sa différentielle $\partial\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)$ qu'il faudra diviser par ∂x; or la différentielle de $\frac{f\partial r}{rr\partial u} \cdot \sqrt{(1+2\rho)}$ (3441) est $\frac{f\partial\partial r}{rr\partial u}\sqrt{(1+2\rho)} + \frac{f\partial r\partial\rho}{rr\partial u\sqrt{(1+2\rho)}} - \frac{2f\partial r^2}{r^3\partial u}\sqrt{(1+2\rho)}$, en supposant ∂u constant; car en différentiant une différentielle premiere, on peut toujours, pour faciliter le calcul, supposer une des inconnues constante; divisant cette valeur de $\partial\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)$ par celle de ∂x ou $\frac{r^2\partial u}{f\sqrt{(1+2\rho)}}$, on aura les trois termes suivans; $\frac{f^2\partial\partial r}{r^4\partial u^2}(1+2\rho) + \frac{f^2\partial r\partial\rho}{r^4\partial u^2} - \frac{2f^2\partial r^2}{r^5\partial u^2}(1+2\rho)$ pour la valeur entiere de $\frac{\partial\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)}{\partial x}$, second terme de l'équation du problême des trois corps ou de $\frac{r\partial u^2}{\partial x^2} - \frac{\partial\partial r}{\partial x^2} = \frac{S}{rr} + \Phi$.

3612. Si l'on ôte cette valeur de celle du premier terme $\frac{r\partial u^2}{\partial x^2}$, c'est-à-dire $\frac{f^2}{r^3}(1+2\rho)$, on aura la valeur de $\frac{S}{rr} + \Phi = \frac{f^2}{r^3}(1+2\rho) - \frac{f^2\partial\partial r}{r^4\partial u^2}(1+2\rho) - \frac{f^2\partial r\partial\rho}{r^4\partial u^2} + \frac{2f^2\partial r^2}{r^5\partial u^2}(1+2\rho)$; c'est la seconde équation du problême mise sous une nouvelle forme.

Mais $f^2\partial\rho = \Pi r^3\partial u$ (3609); d'où il suit que $-\frac{f^2\partial r\partial\rho}{r^4\partial u^2} = -\frac{\Pi r^3\partial u\partial r}{r^4\partial u^2} = -\frac{\Pi\partial r}{r\partial u}$; donc $\frac{S}{rr} + \Phi + \frac{\Pi\partial r}{r\partial u} = \frac{f^2}{r^3}(1+2\rho) - \frac{f^2\partial\partial r}{r^4\partial u^4} \times (1+2\rho) + \frac{2f^2\partial r^2}{r^5\partial u^2}(1+2\rho)$; divisant par $1+2\rho$, et multipliant par $\frac{rr}{S}$, on aura $\frac{1 + \frac{\Phi rr}{S} + \frac{\Pi r\partial r}{S\partial u}}{1+2\rho} = \frac{f^2}{Sr} - \frac{f^2\partial\partial r}{Sr^2\partial u^2} + \frac{2f^2\partial r^2}{Sr^3\partial u^2} = \frac{\frac{f^2}{Sr}\partial u^2 - \frac{f^2}{Sr^2}\partial\partial r + \frac{2f^2\partial r^2}{Sr^3}}{\partial u^2}$.

3613. Pour simplifier le calcul, on supposera le premier membre

$\frac{1+\frac{\Phi rr}{S}+\frac{\Pi r dr}{S du}}{1+2\rho}=1+\Omega=\frac{\frac{f^2}{Sr}du^2-\frac{f^2}{Sr^2}ddr+\frac{2f^2dr^2}{Sr^3}}{du^2}$, ou, ce qui revient au même, $\Omega=\frac{\frac{\Phi rr}{S}+\frac{\Pi r dr}{S du}-2\rho}{1+2\rho}$: mais $\frac{f^2 ddr}{Sr^2}-\frac{2f^2dr^2}{Sr^3}$ est la différentielle de $\frac{f^2dr}{Srr}$ (3431); donc $1+\Omega=\frac{\frac{f^2}{Sr}du^2-d\left(\frac{f^2dr}{Sr^2}\right)}{du^2}$, ou $\frac{f^2}{Sr}-\frac{d\left(\frac{f^2dr}{Sr^2}\right)}{du^2}$. Faisons le premier terme $\frac{f^2}{Sr}=1-s$, on aura $ds=\frac{f^2dr}{Sr^2}$ (3432); $dds=d\left(\frac{f^2dr}{Sr^2}\right)$, qui est la valeur du dernier terme; donc $1+\Omega=1-s-\frac{dds}{du^2}$ et $s+\frac{dds}{du^2}+\Omega=0$. C'est l'équation qu'il s'agit d'intégrer, mise sous la forme la plus simple, à laquelle se réduit principalement la question du problême des trois corps, dans tous les auteurs qui l'ont appliquée à la théorie de la Lune (Clairaut, *pag.* 5; d'Alembert, *pag.* 16; Euler, *pag.* 21; Simpson, *pag.* 146).

3614. On verra que Ω se réduit à des termes tels que a cos. pu, c'est-à-dire qui ne renferment que des cos. de multiples de u (3623). Nous allons intégrer cette équation, en supposant $s+\frac{dds}{du^2}+a\cos.pu=0$, ce qui sera peut-être moins élégant, mais plus facile à entendre que l'intégration générale de Clairaut. On multipliera par du cos. u, et l'on aura $s\,du\cdot\cos.u+\frac{dds\cos.u}{du}+a\,du\cdot\cos.pu\cdot\cos.u=0$; donc (3815) $s\,du\cdot\cos.u+\frac{dds\cdot\cos.u}{du}+\frac{1}{2}a\,du\cdot\cos.(p+1)u+\frac{1}{2}a\,du\cdot\cos.(p-1)u=0$. L'intégrale (3451) est $s\cdot\sin.u+\frac{ds}{du}\cdot\cos.u+\frac{a}{2(p+1)}\sin.(p+1)u+\frac{a}{2(p-1)}\sin.(p-1)u=g$; la constante g est celle qu'on doit toujours suppléer dans toute sorte d'intégration (3444).

3615. Au lieu du sinus de la somme des angles u et pu, mettons sa valeur (3809) $\cdot\sin pu\cdot\cos.u+\sin.u\cdot\cos.pu$; et, au lieu du sinus de la différence, mettons sa valeur (3811) $\cdot\sin.pu\cdot\cos.u-\sin.u$ cos. pu, et nous aurons $s\sin.u+\frac{ds}{du}\cdot\cos.u+\frac{a}{2(p+1)}\sin.pu\cdot\cos.u+\frac{a}{2(p+1)}\cdot\sin.u\cdot\cos.pu+\frac{a}{2(p-1)}\cdot\sin.pu\cdot\cos.u-\frac{a}{2(p-1)}\sin.u\cdot\cos.pu=g$. Mais $\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p-1}=\frac{p-1+p+1}{pp-1}=\frac{2p}{pp-1}$, et $\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p-1}=\frac{p-1-p-1}{pp-1}=\frac{-2}{pp-1}$; donc on aura $s\cdot\sin.u+\frac{ds}{du}\cos.u+\frac{ap}{pp-1}\cdot$

sin. pu · cos. $u - \frac{a}{pp-1}$ sin. u · cos. $pu - g = 0$; multipliant par $\frac{\partial u}{\text{cos. } u^2}$, l'équation devient $\frac{s\,\partial u \cdot \text{sin. } u}{\text{cos. } u^2} + \frac{\partial s}{\text{cos. } u} + \frac{ap\,\partial u \cdot \text{sin. } pu}{(pp-1)\,\text{cos. } u} - \frac{a\,\partial u \cdot \text{cos. } pu \cdot \text{sin. } u}{(pp-1)\,\text{cos. } u^2}$ $- \frac{g\,\partial u}{\text{cos. } u^2} = 0$.

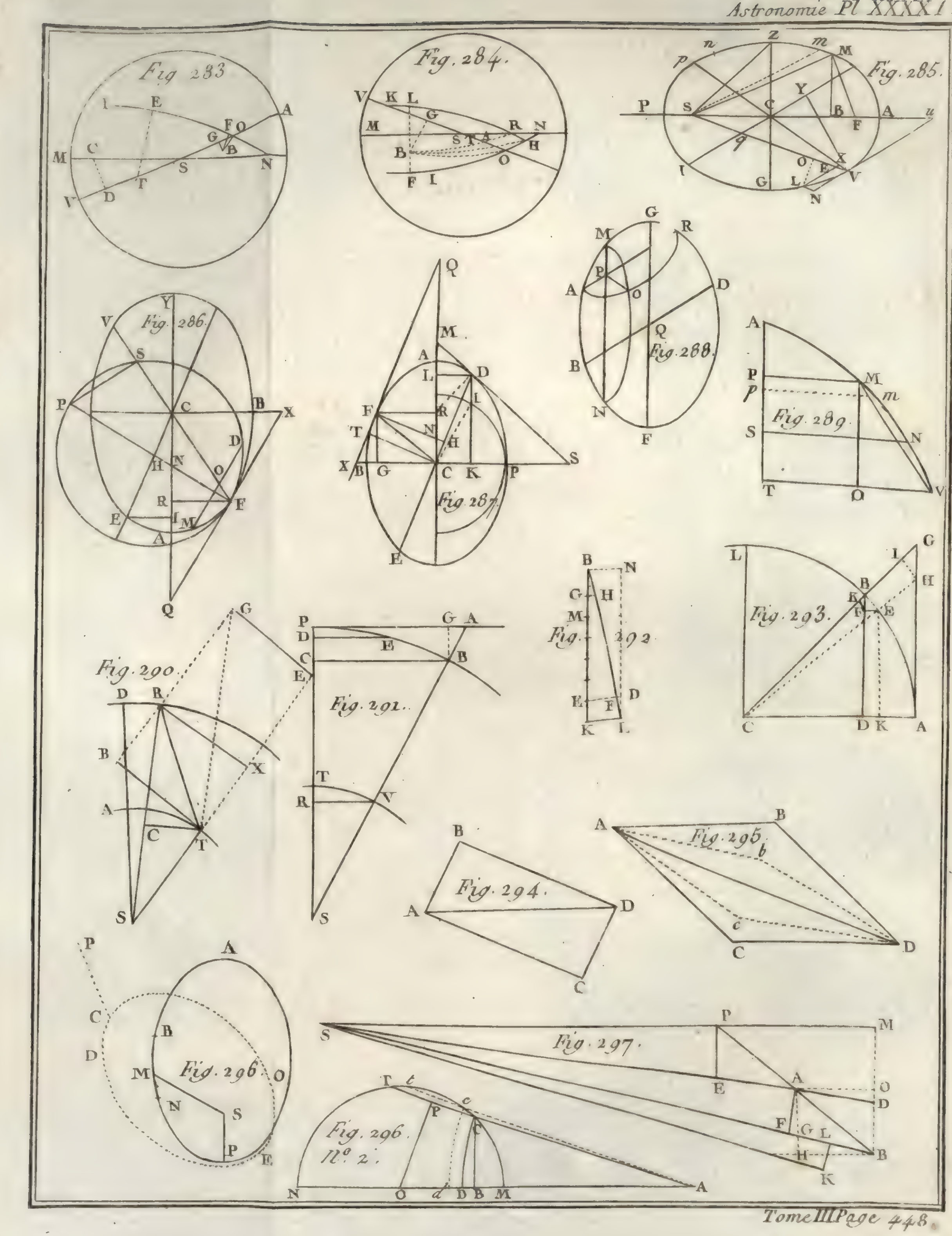
3616. Les deux premiers termes $\frac{s\,\partial u \text{ sin. } u}{\text{cos. } u^2} + \frac{\partial s}{\text{cos. } u}$ ont pour intégrale $\frac{s}{\text{cos. } u}$ (3454). Les deux termes suivans ont pour intégrale $\frac{-a \text{ cos. } pu}{(pp-1)\text{ cos. } u}$ (3431); mais il faut y ajouter $\frac{a}{pp-1}$ (3445). Le dernier terme $\frac{g\,\partial u}{\text{cos. } u^2}$ a pour intégrale g · tang. u (3452), ou $\frac{g \text{ sin. } u}{\text{cos. } u}$; donc l'intégrale entiere est $\frac{s}{\text{cos. } u} - \frac{a \cdot \text{cos. } pu}{(pp-1)\text{ cos. } u} + \frac{a}{pp-1} - \frac{g \cdot \text{sin. } u}{\text{cos. } u} = h$; c'est encore une constante qu'il faut ajouter pour l'intégration (3444). Multipliant par cos. u, l'on aura $s - \frac{a}{pp-1}$ · cos. $pu + \frac{a}{pp-1}$ · cos. $u - g$ · sin. $u = h$ · cos. u ; et mettant pour s sa valeur $1 - \frac{f^2}{Sr}$ (3613), l'on aura enfin cette équation : $\frac{f^2}{Sr} = 1 - g$ · sin. $u - h$ · cos. $u + \frac{a}{pp-1}$ × cos. $u - \frac{a}{pp-1}$ × cos. pu, que j'appellerai l'équation de l'orbite troublée.

3617. Les trois termes $1 - g$ · sin. $u - h$ · cos. u sont les mêmes que dans l'équation d'une ellipse ordinaire (3414) dont $\frac{f^2}{S}$ seroit le parametre; les deux derniers termes sont le changement que les forces perturbatrices causent dans l'équation de l'orbite, ou l'effet des forces Π et Φ. C'est un des avantages de la solution de Clairaut, d'avoir ainsi, dans une même équation, par des termes séparés, l'expression d'une orbite elliptique, et celle d'une orbite troublée.

3618. En supposant $\Omega = a$ cos. $pu + b$ cos. mu, on trouveroit, pour la correction de $\frac{p}{r}$, les mêmes termes provenans de a cos. pu, et plus les deux suivans $\frac{b}{(m^2-1)}$ · cos. $u - \frac{b}{m^2-1}$ cos. mu, provenans de b cos. mu; d'où il suit que si Ω est exprimé par une suite de termes A · cos. mu + B · cos. nu + C · cos. qu, etc. (3623), on aura, pour l'équation générale, $\frac{p}{r} = 1 - g$ · sin. $u - \left(h - \frac{A}{m^2-1} - \frac{B}{n^2-1} - \frac{C}{q^2-1}, \text{etc.}\right)$ cos. $u - \frac{A \cdot \text{cos. } mu}{m^2-1} - \frac{B \cdot \text{cos. } nu}{n^2-1} - \frac{C \cdot \text{cos. } qu}{q^2-1}$, c'est-à-dire qu'il y aura autant de termes cos. u qu'il y aura eu de termes dans Ω, et en outre autant de termes cos. mu, cos. nu, cos. qu, etc.

3619. A l'égard des termes qui multiplient cos. u, et qui se joignent au terme h · cos. u, que renferme l'équation d'une ellipse ordinaire

(3414),


Fig. 283
Fig. 284.
Fig. 285.
Fig. 286.
Fig. 287.
Fig. 288.
Fig. 289.
Fig. 290.
Fig. 291.
Fig. 292
Fig. 293.
Fig. 294.
Fig. 295.
Fig. 296.
Fig. 296. No. 2.
Fig. 297.

(3414), ils affecteront bien l'ellipse que décrit la planete, mais ils l'affecteront constamment, puisqu'ils ne dépendent pas de la situation de la planete troublante; et, comme cette ellipse est déterminée par observation, et qu'il nous importe peu de savoir ce que l'excentricité eût été dans le cas où les planetes troublantes n'auroient pas existé, nous n'aurons aucune attention à faire à ces termes cos. u, en calculant les inégalités périodiques; nous nous bornerons aux termes mu, nu, qui troublent cette orbite, et l'empêchent d'être une ellipse immobile (3580).

3620. Quand on on a trouvé la valeur de $\frac{p}{r}$ (3616), on peut chercher l'élément du temps $\partial x = \frac{rr\partial u}{f\sqrt{1+2\rho}}$ (3609), qui ne contient que des fonctions de r et de u. Le parametre de l'orbite troublée, que je suppose donné par observation, et égal à p, étoit appellé $\frac{f^2}{S}$ (3617); donc $f^2 = pS$, et $\partial x = \frac{rr\partial u}{\sqrt{f^2+2f^2\rho}} = \frac{rr\partial u}{\sqrt{pS+2pS\rho}}$; mais je suppose S $=1$, parceque toutes les masses sont exprimées en parties de S, qui est la masse centrale, c'est-à-dire la masse du Soleil, quand il s'agit des inégalités des planetes principales, et celle de la Terre quand il s'agit des inégalités de la Lune. Je suppose aussi $p=1$, parceque l'orbite est presque concentrique, c'est-à-dire que le parametre ne differe du grand axe que d'une quantité beaucoup plus petite que l'excentricité; donc $\partial x = \frac{rr\partial u}{\sqrt{1+2\rho}} = rr\partial u\,(1+2\rho)^{-\frac{1}{2}} = rr\partial u\,(1-\rho)$ en négligeant les termes ultérieurs de la série (3420).

3621. Par la propriété de l'ellipse, on a $\frac{p}{r} = 1 - e\cdot\cos. mu$ (3415), ou $\frac{1}{r} = 1 - e\cdot\cos. mu + Z$, appellant Z la correction de $\frac{1}{r}$, que nous trouvons par le moyen des forces perturbatrices (3616, 3654): il faut en conclure la valeur de rr; pour cela nous ferons les deux termes $1 - e\cdot\cos. mu = a$; et élevant $a+Z$ à la puissance -2, nous aurons $r^2 = a^{-2} - 2a^{-3}Z$: mais $a^{-2} = 1 + 2e\cdot\cos. mu$ et $a^{-3} = 1 + 3e \times \cos. mu$, en négligeant les termes ultérieurs de la série, qui renfermeroient e^2; donc $r^2 = 1 + 2e\cdot\cos. mu - 2Z - 6eZ\cdot\cos. mu$; substituant cette valeur de rr dans l'expression $\partial x = rr\partial u\,(1-\rho)$, et négligeant les termes où se trouve le produit des deux petites quantités Z et ρ, on aura $\partial x = (1 + 2e\cdot\cos. mu - 2Z - 6eZ\cdot\cos. mu - \rho - 2e\rho\cos. mu)\,\partial u$; donc les termes variables de cette expression de ∂x sont $-(2Z+\rho)\,\partial u - 2e\,(3Z+\rho)\cdot\cos. mu\,\partial u = \partial x$; c'est la correction de l'élément du temps ou de la longitude moyenne,

pour le cas même où l'on fera entrer dans le calcul l'excentricité de la planete troublée.

3622. Toutes les quantités que l'on trouve par ces calculs sont de petites fractions du rayon de l'orbite que nous avons pris pour unité; les forces Φ et Π sont des fractions de la force du Soleil à la distance 1, ou à la distance moyenne du Soleil à la planete troublée, quand il s'agit d'une planete principale telle que Jupiter; sa masse est une fraction de la masse du Soleil, et sa distance à la planete troublée une fraction de la distance de cette planete au Soleil; ainsi la force qui résulte de cette masse, divisée par le carré de la distance, est aussi une fraction de la force du Soleil. C'est en parties du rayon qu'on a l'espace parcouru en vertu de ces forces; savoir $r\,d\,d\,u + 2\,d\,r\,d\,u$ pour la force Π, et $r\,d\,u^2 - d\,d\,r$ pour la force $\frac{S}{rr} + \Phi$ (3607) : ces termes renferment tous r ou $d\,d\,r$; donc ces espaces ne nous viennent qu'en parties du rayon r. Il en est de même de $\int \Pi\, r^3\, d\,u = \rho$, qui est égal à r^3 multiplié par une fraction de la force Π; ρ est donc une fraction de r^3, c'est-à-dire de la distance. Toutes les parties de Ω multiplient r, et sont des fractions de r; ainsi Z, qui est une quantité composée de Ω, est donc aussi une fraction de la distance r; c'est pourquoi on multipliera le dernier résultat par deux cens mille, pour avoir le nombre de secondes qu'il contiendra (3499, 3628, 3655).

3623. Nous avons l'équation de l'orbite troublée en supposant $\Omega = a$ cos. pu (3614): il s'agit actuellement de démontrer que Ω doit s'exprimer en effet par une suite de termes, comme a cos. pu, ou b cos. mu. Pour cela il faut évaluer les forces Φ et Π, dont Ω est composé. La force Φ est égale à la masse de la planete troublante, multipliée par $\frac{TS}{RT^3} - \left(\frac{RS}{RT^3} - \frac{1}{SR^2}\right)$ cos. t (3598) : cette force est très variable, car elle dépend de quatre inconnues; 1°. de la distance TS (FIG. 290), ou du rayon vecteur de la planete troublée; 2°. du rayon vecteur RS de la planete troublante; 3°. de la distance RT qu'il y a entre les deux planetes; 4°. de l'angle de commutation, ou RST, formé par les deux rayons vecteurs. Il faudra, pour simplifier cette expression, trouver le moyen d'exprimer toutes ces variables par la seule anomalie u de la planete troublée, c'est-à-dire qu'il faudra chercher le rapport (du moins par approximation) entre u et les trois autres variables qui entrent dans l'expression de la force Φ. Il en est de même de la force Π, pour laquelle il faudra les mêmes réductions.

3624. Pour donner un exemple de ces sortes d'approximations, je choisirai d'abord une des inégalités que le Soleil cause dans le mouvement de la Lune, et ensuite une de celles que Jupiter cause dans

le mouvement de la Terre, ou, ce qui revient au même, dans le lieu apparent du Soleil. Mon objet n'est que de rendre les principes évidens, et de faire entrer le lecteur dans l'esprit des méthodes : ainsi je n'en ferai que de courtes applications; mais elles seront suffisantes pour qu'un lecteur appliqué les puisse étendre plus loin, après qu'il aura suivi et calculé les deux exemples que je vais détailler.

3625. Les inégalités de la lune sont si considérables et si multipliées que, pour les déterminer exactement, il faudroit employer une multitude énorme de termes : il est donc impossible d'entrer ici dans ce détail; mais il faut au moins donner une idée des difficultés que ce problême renferme : j'y ajouterai le calcul de la *variation* (3628). Newton et plusieurs auteurs ont parlé de cette inégalité (Grégory, *Astronomiae Elementa;* la Caille, art. 1042); mais aucun n'a fait voir la maniere de la calculer en nombres par le principe de l'attraction.

Le centre S représentera la Terre; AT l'orbite de la Lune autour de la Terre, qui est supposée fixe en S; DR l'orbite apparente que le Soleil semble décrire en un an autour de la Terre : nous supposons ces deux orbites concentriques, et dans le même plan, pour simplifier le calcul. La force $\Pi = -\left(\frac{M \cdot SR}{RT^3} - \frac{M}{SR^2}\right)$ sin. t (3597) peut se réduire à une forme beaucoup plus simple, à cause de la grande distance de la Terre au Soleil; car, ayant abaissé la perpendiculaire TC sur le rayon qui va de la Terre au Soleil, on a RT sensiblement égal à RC; donc $RT = SR - SC = SR - ST \cdot \cos. t$; donc $\frac{1}{RT^3} = (SR - ST \cdot \cos. t)^{-3} = \frac{1}{SR^3} + \frac{3 ST \times \cos. t}{SR^4}$ (3421); donc $\frac{M \cdot SR}{RT^3} = \frac{M}{SR^2} + \frac{3 M \cdot ST}{SR^3} \cdot \cos. t$, et $\frac{M \cdot SR}{RT^3} - \frac{M}{SR^2} = \frac{3 M \cdot ST}{SR^3} \cos. t$: nous ferons usage de cette valeur (3634, 3691, 3696, 3773) : donc $\Pi = -\frac{3 M \cdot ST}{SR^3} \cdot \cos. t \cdot \sin. t = -\frac{3 M \cdot ST}{2 SR^3} \cdot \sin. 2t$ (3817). Nous négligerons ici la force Φ, pour abréger; d'ailleurs, en supposant l'orbite de la Lune circulaire, cette force affecte moins le mouvement de la Lune dans son orbite que la force Π, qui est perpendiculaire au rayon vecteur, et dont tout l'effet est employé à altérer la vîtesse de la Lune dans son orbite, comme nous l'expliquerons (3639).

3626. Nommons f la distance du Soleil à la Terre, en prenant pour unité celle de la Lune à la Terre, en sorte que f soit égale à 400 environ; soit M la masse du Soleil; en prenant la somme des masses de la Terre et de la Lune pour unité, on aura la force $\Pi = -\frac{3M}{2f^3}$ sin. $2t$. Il faut en conclure la valeur de ρ, qui entre dans Ω

(3613), et qui est $\int \frac{\Pi r^3 \partial u}{f^2}$ (3609); mais alors $\frac{f^2}{S}$ étoit le parametre (3617): ainsi appellant p le parametre de l'orbite, qu'on tire toujours de l'observation, l'on aura $\rho = \int \frac{\Pi r^3 \partial u}{p S}$; or, puisque l'orbite est circulaire, on a $p=1$; nous avons la masse S de la Terre pour unité des masses, puisque M sera exprimée en parties de la masse de la Terre; donc $pS=1$, et $\rho = \int \Pi r^3 \partial u$; mais r est aussi égal à 1; donc $\rho = \int \Pi \partial u = -\frac{3M}{2f^3} \int \cdot \sin. 2t \partial u$.

Supposons que le mouvement de la Lune soit au mouvement du Soleil comme 1 est à $1-n$, en sorte que le mouvement de la Lune étant u, la différence des mouvemens moyens du Soleil et de la Lune, ou l'angle de commutation t, soit nu ($n=0,9252$); nous mettrons $2nu$ à la place de $2t$, et nous aurons $\rho = -\frac{3M}{2f^3} \int \cdot \sin. 2nu \partial u = +\frac{3M \times \cos. 2nu}{4nf^3}$ (3448).

Dans la valeur de Ω (3613), ne prenons que le terme le plus fort de tous, qui est -2ρ (3653), et nous aurons $\Omega = -\frac{3M}{2nf^3} \cdot \cos. 2nu$; donc la correction qui en résultera sur la valeur de $\frac{p}{r}$ (3618), ou sur l'équation de l'orbite, sera $\frac{-3M}{2nf^3(1-4nn)} \times \cos. 2nu$.

3627. Quand on a l'effet de l'attraction sur la valeur de $\frac{p}{r}$, on doit chercher son effet sur la valeur de ∂x, qui est l'expression du temps ou de la longitude moyenne; or nommant Z le terme que nous venons de trouver dans l'équation de l'orbite, le terme qui en résulte sur la valeur de x est $-\int(2Z+\rho)\partial u$ (3621); c'est la correction de la valeur de la longitude moyenne, ou de l'expression du temps; il faudra donc intégrer $-\left(\frac{-6M}{2nf^3(1-4nn)} + \frac{3M}{4nf^3}\right) \cdot \cos. 2nu \partial u$ (3451), et l'on aura $-\frac{3M}{2n^2f^3}\left(\frac{-1}{(1-4nn)} + \frac{1}{4}\right) \times \sin. 2nu$, pour une des équations, ou pour un des termes de l'expression de la longitude moyenne en longitude vraie. Elle changera de signe quand on exprimera la longitude vraie en longitude moyenne; car en général si l'on a $x=u-\alpha$, on aura $u=x+\alpha$, α étant le petit terme que nous venons de trouver. Nous négligerons ici les autres termes qui renferment α^2 (3428).

3628. Pour exprimer cette valeur en secondes, on emploiera les nombres suivans : 1°. la distance du Soleil est à celle de la Lune comme 57′ 0″ est à 8″6 (1698, 1725); donc $\frac{1}{f^3} = \frac{1}{6289000000}$: 2°. la masse M du Soleil est 351886 (3559); mais le produit de ces deux quantités, ou $\frac{M}{f^3}$, revient à t^2 (3561) $=\frac{1}{179}$: 3°. le mouvement diurne

de la Lune est 13° 10′ 35″, 0, celui du Soleil 59′ 8″, 3; la différence est 12° 11′ 26″, 7; divisant cette différence par le mouvement de la Lune 13° 10′ 35″ que nous prenons pour unité, ou divisant la différence des révolutions par celle du Soleil seul, nous aurons $n =$ 0,9251985; donc $1 - 4nn = -2,424$; $\frac{-1}{1-4nn} = 0,41256$: ce terme devient positif à cause du signe moins au dénominateur, et $-\frac{1}{1-4nn} + \frac{1}{4} = 0,66256$: on multipliera donc cette quantité par $\frac{M}{f^3} = t^2$; on la multipliera aussi par $\frac{3}{2n^2} = 1,75235$, et de plus par 57° pour l'avoir en secondes (3499), en ajoutant le logar. 5,3144251, et l'on aura $+ 22' \, 20'' \cdot \sin. 2t$ pour l'équation cherchée: elle differe beaucoup de celle que donnent les observations (1445), et qui est de 35′ 41″; mais il ne faut regarder le résultat précédent que comme une partie de la variation entiere, puisque j'ai négligé la force Φ, et que je n'ai pris qu'un seul des termes qui forment la valeur de Ω.

3629. Il y a d'ailleurs quatre considérations importantes qu'on est obligé de faire entrer dans les calculs rigoureux de la Lune, et dont je n'ai pas fait mention. La premiere est celle de l'inclinaison de l'orbite lunaire que j'ai négligée, puisque j'ai supposé le Soleil et la Lune dans le même plan: les forces Φ et Π (3597) renferment l'angle t dont les côtés sont dans des plans différens, l'un dans l'écliptique, l'autre dans l'orbite de la Lune; et il faudroit pouvoir employer la différence entre la longitude vraie de la Lune dans son orbite et la longitude vraie du Soleil dans la sienne; mais lorsqu'on considere l'inclinaison comme Clairaut dans sa Théorie de la Lune, il faut réduire le lieu du Soleil au plan de l'orbite de la Lune par une perpendiculaire; nommant f' la distance du Soleil à la Terre réduite au plan de l'orbite lunaire, et t' l'élongation de la Lune dans ce même plan, l'on aura, dans l'expression des forces, $\frac{f'}{f} \cdot \cos. t'$ au lieu de $\cos. t$. A la place de ces deux nouvelles quantités $\frac{f'}{f}$ et $\cos. t'$, on mettra leurs valeurs en cosinus de l'inclinaison des deux orbites et de l'hypoténuse ou de la distance de la Lune à son nœud, et l'on aura l'expression des forces, avec le véritable angle t et la vraie distance f du Soleil à la Terre; mais la plupart des termes seront multipliés ou par le cosinus de l'inclinaison ou par une fonction de ce cosinus.

3630. La seconde chose que nous avons négligée est la parallaxe du Soleil; en effet, nous avons supposé RT = RC (FIG. 290),

comme si le Soleil étoit à une distance infinie, et que sa parallaxe fût absolument nulle, de même que l'angle SRT. Dans les calculs rigoureux de la théorie lunaire, on ne fait point cette supposition, et l'on réduit en série la valeur de $\frac{1}{RT^3}$, en prenant plusieurs termes de la série (3425), et mettant encore à la place du vrai angle RST formé par les rayons vecteurs du Soleil et de la Lune, et dont le plan est incliné à l'écliptique, sa valeur composée seulement de l'angle t, supposé la différence entre le vrai lieu de la Lune dans son orbite et celui du Soleil dans la sienne.

3631. Les inégalités qui résultent de cette considération doivent être plus sensibles à mesure que la parallaxe du Soleil sera plus considérable; ainsi ces équations, calculées et comparées avec celles que donne l'observation, doivent servir à connoître la parallaxe du Soleil. Machin jugea, par le mouvement du nœud de la Lune, que la parallaxe du Soleil étoit de 8″ (*The laws of the Moon's motion according to gravity, pag.* 22). Mayer, qui s'étoit occupé de pareilles recherches, m'écrivoit, en 1755, que la parallaxe du Soleil ne surpassoit pas 7″,9, et qu'il s'en étoit assuré à un tiers de seconde près, par le moyen de la théorie de la Lune. Stewart, professeur de mathématiques dans l'université d'Edimbourg, a publié aussi un ouvrage dans lequel il recherche la parallaxe du Soleil par le moyen de la force que le Soleil exerce sur la Lune, et il la trouve de 6″,9 (*The distance of the Sun from the Earth determined by the theory of gravity, by Dr. Mathew Stewart, in-8°., 1763, pag.* 67). Ce petit ouvrage est un supplément à un excellent recueil du même auteur qui avoit paru quelques années auparavant (*Tracts physical and mathematical*). Mais il faut voir, sur la parallaxe du Soleil, les déterminations astronomiques rapportées ci-devant (1725, 2151), par lesquelles on voit que cette parallaxe est d'environ 8″,6.

3632. La troisieme considération qu'il faut faire entrer dans la théorie de la Lune est l'excentricité du Soleil, qui produit, dans ses distances par rapport à la Lune et à la Terre, des différences considérables, et par conséquent de nouvelles inégalités dans le mouvement de la Lune; cette excentricité exige qu'au lieu de la distance moyenne f, on mette le rayon vecteur du Soleil exprimé par son anomalie (3415, 3487).

3633. Il y a une quatrieme considération que nous avons négligée (3627), et qu'on doit employer dans les calculs rigoureux de la Lune: lorsqu'on a l'expression du temps ou de la longitude moyenne x, par le moyen de la longitude vraie u, par exemple,

$x = u + \alpha \cdot \sin. mu$, ou $u = x - \alpha \cdot \sin. mu$; le dernier terme étant une des équations produites par l'attraction, on ne peut supposer $u = x - \alpha \sin. mx$, c'est-à-dire supposer $x = u$ dans le dernier terme, que quand ce dernier terme est fort petit; mais si ce terme étoit assez sensible, comme il arrive dans les trois grandes équations de la Lune, pour que son carré fût encore de plusieurs secondes (il vaut près de deux minutes dans l'évection de la Lune), il faudroit alors employer le problême dont j'ai rapporté la solution (3438).

3634. Après avoir examiné l'effet de la force Π perpendiculaire au rayon vecteur (3626), je dirai quelque chose de l'autre force Φ par laquelle le Soleil modifie ou affecte la pesanteur de la Lune, et qui est égale à $\frac{Mr}{RT^3} - \left(\frac{Mf}{RT^3} - \frac{M}{f^2}\right) \cdot \cos. t$ (3598): mais $\frac{1}{RT^3} = \frac{1}{f^3} + \frac{3 r \cos. t}{f^4}$ (3625); donc $-\left(\frac{Mf}{RT^3} - \frac{M}{f^2}\right) \cos. t = -\left(\frac{M}{f^2} + \frac{3 M r f \cos. t}{f^4} - \frac{M}{f^2}\right) \cos. t = -\frac{3 r M \cos. t^2}{f^3}$; c'est le second terme de Φ. A la place du premier terme $\frac{Mr}{RT^3}$ on peut mettre $\frac{Mr}{f^3}$, parceque les autres termes, qui se trouveroient en mettant pour RT sa valeur $f - r \cos. t$, seroient beaucoup plus petits; donc la force totale $\Phi = \frac{Mr}{f^3} - \frac{3 r M \cos. t^2}{f^3}$; ou, parceque $r = 1$, et $\cos. t^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos. 2t$ (3820), $\Phi = -\frac{M}{2f^3} - \frac{3M}{2f^3} \cos. 2t$. La constante $\frac{M}{2f^3} = \frac{1}{358}$, puisque $\frac{M}{f^3} = \frac{1}{179}$ (3628); ainsi le Soleil diminue en général de $\frac{1}{358}$ la tendance de la Lune vers la Terre.

3635. Dans les syzygies, on a $2t = 0$ et $\cos. 2t = 1$: ainsi la force Φ devient $-\frac{2M}{f^3}$; car $-\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2$; c'est la quantité dont l'action du Soleil diminue la pesanteur de la Lune vers la Terre dans les conjonctions et les oppositions, elle est égale à $\frac{1}{90}$.

Dans la quadrature on a $2t = 180°$ ou $540°$; alors $\cos. 2t = -1$ (3795); et la force Φ devient $+\frac{M}{f^3}\left(\text{car } -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1\right)$; c'est la quantité dont le Soleil augmente la force centrale de la Lune dans les deux quadratures. Cette augmentation n'est que de $\frac{1}{179}$, ou la moitié de la diminution qui a lieu dans les syzygies, la distance étant supposée la même, puisque celle-ci est $-\frac{2M}{f^3} = \frac{1}{90}$.

3636. La force perturbatrice Φ dépend de la ligne r, ou de la distance de la Lune à la Terre; elle est d'autant plus grande que la Lune est plus éloignée de la Terre; cette force est donc plus grande dans l'apogée que dans le périgée. Pour que cette force devienne nulle, il faut

que les deux termes $\frac{M}{2f^3}$ et $\frac{3M}{2f^3}$ cos. 2 t se détruisent, ou que cos. 2 t soit égal à $-\frac{1}{3}$, c'est-à-dire que l'angle t soit de 54° 44′ ; car alors 2 t = 109° 28′ dont le cosinus est négatif (3795), et égal à un tiers du rayon ou 0,333. De là il suit que, par l'attraction du Soleil, la force centrale de la Lune vers la Terre est diminuée plus long-temps qu'elle n'est augmentée. On vient de voir que la quantité de la diminution est aussi plus forte que celle de l'augmentation ; ainsi, en total, on peut dire que la force du Soleil diminue la pesanteur de la Lune ou l'attraction que la Terre exerce sur la Lune (3634).

3637. Comme on aime à entrevoir sans calcul les raisons générales des résultats singuliers que le calcul démontre, je vais tâcher de donner une idée de la maniere dont le Soleil produit les trois principales inégalités de la Lune, l'évection, la variation, et l'équation annuelle.

L'ÉVECTION est la plus grande inégalité que le Soleil produise dans la Lune (1433); elle équivaut, ainsi que l'avoient supposé Newton et Halley, à un changement d'excentricité dans l'orbite lunaire joint à un mouvement de l'apogée (1435). Lorsque le Soleil répond à l'apogée ou au périgée de la Lune, ou lorsque la ligne des apsides de la Lune concourt avec la ligne des syzygies, la force centrale de la Terre sur la Lune, qui est la plus foible dans la syzygie apogée, reçoit la plus grande diminution (3636), et la force centrale, qui est la plus forte dans la syzygie périgée, y reçoit la moindre diminution; donc la différence entre la force centrale périgée et la force centrale apogée sera alors la plus grande ; donc la différence des distances augmentera, c'est-à-dire que l'excentricité sera plus grande : aussi l'observation prouve qu'alors la plus grande équation de la Lune est de 7° 40′, tandis qu'elle n'étoit pas de 5° lorsque la ligne des quadratures concouroit avec celle des apsides.

3638. Le mouvement de l'apogée vient de ce que la force centrale est diminuée (3872): il doit donc être le plus grand quand la ligne des syzygies concourt avec la ligne des apsides, ou lorsque le Soleil répond à l'apogée ou au périgée de la Lune; quand l'apogée est dans les quadratures, son mouvement est au contraire le plus lent, parceque la diminution générale de la force centrale (3634) est modifiée par une agmentation (3635). Quand le Soleil est à 45° des apsides, le mouvement vrai de l'apogée est égal au mouvement moyen ; mais son vrai lieu est alors le plus différent du lieu moyen, et l'équation est la plus forte, parcequ'elle est le résultat de tous les degrés de vîtesse que l'apogée a reçus jusque-là [a].

[a] Il faut bien se souvenir que l'effet de ces sortes d'accélérations ne com-

3639.

3639. La VARIATION est l'inégalité de la Lune, qui, sur une orbite supposée circulaire, a lieu dans les octans, à cause de la force tangentielle qui tend à accélérer ou retarder son mouvement. Soit C (FIG. 315) le centre de la Terre, O le centre du Soleil, et DHA l'orbite de la Lune ; lorsque, avant la conjonction, la Lune est en H, elle est plus attirée que la Terre, et elle est attirée dans la direction HO ; alors sa vîtesse s'accélere jusqu'à ce qu'elle soit en A dans sa conjonction, où la vîtesse de la Lune sur son orbite est la plus grande, eu égard à l'attraction du Soleil. Lorsqu'elle est vers P, 45° après la conjonction, sa longitude vraie est la plus avancée d'une quantité, appellée *variation*, qui est de 36′ additives (1445). Il est vrai que la vîtesse de la Lune cesse d'accélérer et commence à retarder dès que la Lune a passé le point A, parceque le Soleil ayant attiré la Lune plus qu'il n'attiroit la Terre pendant qu'elle alloit de H en A, a augmenté sa vîtesse de plus en plus jusqu'en A où il cesse d'augmenter cette vîtesse ; mais c'est en A que cette vîtesse s'est trouvée la plus grande, puisqu'elle n'a pas cessé d'être accélérée jusque-là. Depuis ce point A, le Soleil la tirant vers O tend à diminuer sa vîtesse ; mais l'excès de la vîtesse acquise sur la vîtesse moyenne dure jusque dans l'octant P, 45° après la conjonction, où la vîtesse vraie est égale à la moyenne ; c'est pourquoi l'équation de la variation (*p. 67 des tab.*) est additive, la plus grande qu'elle puisse être à 45° de la conjonction où la vîtesse est la plus forte [*]. Cette idée de la variation lunaire n'est qu'un apperçu incomplet, puisqu'il faut recourir au calcul (3625) pour voir que la force tangentielle étant proportionelle au sinus $2t$, elle tend à retarder la Lune en P et en K, à l'accélérer en F et en H, et que la force qui tend à accélérer en H n'a véritablement produit tout son effet que quand elle est arrivée en P ; comme la vîtesse, devenue la plus grande au périgée de l'orbite, ne produit cependant le plus grand avancement de la Lune que 90° plus loin.

3640. L'ÉQUATION ANNUELLE de la Lune, qui va jusqu'à 11′ (1452) (*p. 54 des tab.*), vient de ce que le Soleil, quand il est périgée, agit plus sur la Lune que quand il est apogée ; et comme son effet le

mence à avoir lieu réellement et dans l'observation, que quand la cause est la plus forte ; et il est le plus grand quand la cause cesse d'agir : c'est ainsi que, dans le mouvement elliptique des planetes, le vrai lieu est le plus avancé au temps où l'accélération finit, et où commence le retardement (1258), c'est-à-dire à 9 signes d'anomalie. J'ai vu donner des idées fausses des inégaliés de la Lune pour avoir perdu de vue cette considération.

[*] Comme nous l'avons expliqué dans la note précédente (3638).

plus considérable, pendant une révolution entiere de la Lune, est de diminuer la force centrale de la Lune vers la Terre (3636), cette force est la plus diminuée quand le Soleil est périgée : alors le diametre de l'orbite lunaire devient plus grand ; car la Lune, étant moins attirée vers la Terre, s'en éloigne nécessairement : son orbite, devenue plus grande, rend la durée de la révolution plus longue ; car les carrés des temps des révolutions sont toujours comme les cubes des diametres des orbites : le mouvement de la Lune est donc le plus ralenti dans le périgée du Soleil, et l'équation annuelle commence alors à être soustractive, par la raison expliquée dans la note (3638).

Methode pour calculer la distance de la Lune par la longueur du pendule.

3641. Les distances au Soleil, de toutes les planetes qui tournent autour de lui, se déterminent par le moyen d'une seule de ces distances, avec la durée de leurs révolutions, à cause de la loi de Képler (1224), que les carrés des temps sont comme les cubes des distances. Il en est à-peu-près de même de la distance de la Lune à la Terre par rapport à celle des corps qui sont à la surface de notre globe ; on connoît la gravité de ceux-ci, avec leur distance au centre ; on connoît un des effets de la gravité de la Lune vers la Terre, c'est la durée de sa révolution ; on peut donc conclure la distance. Nous avons déja donné une méthode fort simple pour la trouver (3550) : nous allons y ajouter quelques considérations de plus.

3642. La force avec laquelle les corps sont attirés vers la Terre à la surface du globe est indiquée par l'espace qu'ils parcourent dans une seconde (3516, 3545), ou par la longueur du pendule : on en conclut aisément le temps qu'ils emploieroient à faire une révolution dans un cercle de même grandeur que l'équateur (3577). La durée de cette révolution étant connue, avec la distance et la force centrale qui y répond, il suffit de connoître la révolution de la Lune, pour trouver sa distance et la force centrale qui l'y retient.

L'attraction étant supposée $= 1$ à la surface de la Terre, elle sera $\frac{1}{g^2}$ à une distance g; la Lune attirant aussi la Terre avec une force proportionelle à sa masse, que nous appellons m, il faut supposer la Terre en repos, et transporter à la Lune seule l'effet des deux mouvemens (3591) ; nous prendrons donc pour la force de

la Terre sur la Lune $\frac{1+m}{g^2}$. L'action du Soleil diminue la pesanteur de la Lune sur la Terse de $\frac{1}{358}$ environ (3634) : il ne reste donc que $\frac{357}{358}$ de la force précédente, qui agisse effectivement sur la Lune; donc, appellant ce nombre $\frac{1}{\gamma}$, on aura la force de la Terre sur la Lune $\frac{1+m}{\gamma g^2}$. Si un corps tournoit dans l'équateur, nous avons vu que la durée de sa révolution en secondes seroit $2'' \sqrt{\frac{r}{p}}$ (3577) ; la force centrifuge retranche $\frac{1}{289}$ de la force centrale de la Terre (3543) ; ainsi la force attractive de la Terre étant supposée $=1$, celle qui agit actuellement, et qui détermine la longueur du pendule à secondes, observée, n'est que $\frac{288}{289}$ de la masse réelle de la Terre qui cause la gravité de la Lune vers la Terre, laquelle n'est point diminuée par la force centrifuge : nous supposerons ce nombre $=\frac{1}{\beta}$. Les forces centrales des corps qui tournent dans des orbites circulaires sont comme les rayons de leurs orbites divisés par les carrés des temps périodiques; c'est $\frac{r}{t^2}$ (3546), ou en raison inverse des carrés des temps divisés par les rayons; donc appellant t le temps périodique de la Lune, on aura cette proportion, $\frac{1}{\beta} : \frac{1+m}{\gamma g^2} :: \frac{t^2}{g} : \frac{4''r}{pr}$; donc $g^3 = \frac{t^2 \beta p}{4\gamma}(1+m)$, et la distance cherchée de la Lune, exprimée en multiples de p, sera la racine cube de $\frac{t^2 \beta p}{4\gamma}(1+m)$.

3643. Pour réduire cette expression en nombres, je suppose la masse de la Lune $\frac{1}{66}$ (1702, 3570), ou $1+m=1{,}01515$, $t=27^j\,7^h\,43'\,11'',5$; le logar. de β, 0,001505, celui de γ, 0,001215 ; le pendule simple $p=36^p\,7^{li},21$ (2712)[a], étant divisé par 864 pour être exprimé en toises, et par 3269511 pour être exprimé en rayons moyens de la Terre (2701), a pour logarithme 3,19119 : avec ces données, je trouve le logar. de la distance $g=1{,}78066$, dont le complément arithmétique est le logarithme du sinus de la parallaxe *56′ 58″*, qui convient au rayon moyen ; c'est, à deux secondes près, ce que j'ai trouvé par mes observations (1700). Cependant il faut voir dans d'Alembert (*Recherches*, pag. 168, 256) les objections que l'on peut faire contre cette maniere de trouver la parallaxe de la Lune par le moyen du pendule, à raison de la

[a] On pourroit se tromper d'un huitieme de ligne sur cette longueur du pendule, sans qu'il en résultât plus d'une seconde d'erreur sur la parallaxe de la Lune ; ainsi, quoique le pendule n'ait que 3 pieds, il donne très bien une distance qui est cependant de 86 mille lieues.

masse de la Lune, qui n'est pas bien connue, de l'inclinaison de son orbite, de la figure elliptique et variable de l'orbite, des inégalités des forces perturbatrices, de celle des rayons de la Terre, dont il faudroit tenir compte, et de l'hétérogénéité de la Terre (*V.* aussi Murdoch, *Philos. Trans.*, 1764). Pour avoir égard à l'aplatissement de la Terre dans cette recherche, il faudroit ôter de $1+m$ le petit terme $\frac{3}{5}\delta$ (3762). Voyez Mayer *Comment. Gotting. T. II, pag.* 163.

Calcul des inégalités que la Terre éprouve par l'attraction de Jupiter.

3644. Après avoir donné une légere idée des inégalités de la Lune et de la maniere de les calculer, je vais donner avec plus de détail le calcul des inégalités que la Terre éprouve par l'attraction de Jupiter, parcequ'il reste encore bien des recherches à faire sur les inégalités des planetes, et que ceci pourra servir d'exemple à ceux qui voudroient s'exercer dans de pareils calculs.

La premiere opération consiste à exprimer les forces Φ et Π (3597) par le moyen des rayons vecteurs de Jupiter et de la Terre, et de l'angle de commutation. On doit commencer par faire disparoître l'expression des forces de la distance RT (FIG. 290) entre les deux planetes. Nommons r le côté ST, f le côté SR, et s le côté RT, dont nous cherchons la valeur; on aura (3426) $\frac{1}{s^3}=\frac{1}{f^3}+\frac{9r^2}{4f^5}+\frac{225r^4}{64f^7}+\left(\frac{3r}{f^4}+\frac{45r^3}{8f^6}\right)\cos. t+\left(\frac{15r^2}{4f^5}+\frac{105r^4}{16f^7}\right)\cdot\cos. 2t+\frac{35r^3}{8f^6}\cos. 3t+\frac{315r^4}{64f^7}\cdot\cos. 4t$, qu'on pourroit mettre sous cette forme générale $A+B\cos. t+C\cdot\cos. 2t$, etc. Cette quantité, multipliée par r, donnera la premiere partie $\frac{r}{s^3}$ de la force Φ (3598); on ôtera $\frac{1}{f^3}$ de $\frac{f}{s^3}$; multipliant par cos. t, l'on aura la seconde partie de Φ; et multipliant par sin. t, l'on aura la force Π (3597). Je vais mettre ici le commencement du calcul. Dans l'application suivante de ces formules (3650), on aura $r=1$, et $f=5{,}2$; ainsi $\frac{1}{f^8}$ est 140 fois plus petit que $\frac{1}{f^5}$, et nous pouvons négliger les termes qui seront plus petits que $\frac{1}{f^6}$: on verra ci-après ce qu'il faut faire en d'autres cas (3659). Nous n'emploierons point, dans les formules suivantes, la masse de Jupiter qui multiplie tous les termes; il suffira de multiplier le dernier résultat; le calcul sera plus simple (3655).

3645. La seconde partie de $\Phi = \left(\frac{f}{s^3} - \frac{1}{f^2}\right) \cdot \cos. t = \left(\frac{9rr}{4f^4} + \frac{225r^4}{64f^6}\right)\cos. t + \left(\frac{3r}{f^3} + \frac{45r^3}{8f^5}\right) \cdot \cos. t^2 + \left(\frac{15r^2}{4f^4} + \frac{105r^4}{16f^6}\right)\cos. 2t \cdot \cos. t + \frac{35r^3}{8f^5} \cdot \cos. 3t \cdot \cos. t + \frac{315r^4}{64f^6} \cdot \cos. 4t \cdot \cos. t$; et substituant pour $\cos. t^2$ sa valeur $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos. 2t$ (3820), pour $\cos. 2t \cdot \cos. t$ sa valeur (3815) $= \frac{1}{2}\cos. t + \frac{1}{2}\cos. 3t$, etc., l'on aura $\left(\frac{f}{s^3} - \frac{1}{f^2}\right) \cdot \cos. t = \frac{3r}{2f^3} + \frac{45r^3}{16f^5} + \left(\frac{3r}{2f^3} + \frac{5r^3}{f^5}\right)\cos. 2t + \left(\frac{33r^2}{8f^4} + \frac{435r^4}{64f^6}\right) \cdot \cos. t + \left(\frac{15r^2}{8f^4} + \frac{735r^4}{128f^6}\right)\cos. 3t + \frac{35r^3}{16f^5}\cos. 4t + \frac{315r^4}{128f^6}\cos. 5t$. Pour avoir l'expression entiere de la force Φ, il faut retrancher cette valeur de celle de $\frac{r}{s^3}$, qui est la premiere partie de Φ, ou de $\frac{r}{f^3} + \frac{9r^3}{4f^5} + \frac{225r^5}{64f^7} + \left(\frac{3r^2}{f^4} + \frac{45r^4}{8f^6}\right)\cos. t + \left(\frac{15r^3}{4f^5} + \frac{105r^5}{16f^7}\right)\cos. 2t$, etc.; l'on aura la force Φ toute entiere $= -\frac{r}{2f^3} - \frac{9r^3}{16f^5} + \frac{225r^5}{64f^7} - \left(\frac{9r^2}{8f^4} + \frac{75r^4}{64f^6}\right)\cos. t - \left(\frac{3r}{2f^3} + \frac{5r^3}{4f^5} - \frac{105r^5}{16f^7}\right)\cos. 2t - \left(\frac{15r^2}{8f^4} + \frac{175r^4}{128f^6}\right) \cdot \cos. 3t - \left(\frac{35r^3}{16f^5} - \frac{315r^5}{64f^7}\right)\cos. 4t - \frac{315r^4}{128f^6}\cos. 5t$.

3646. Pour trouver, par une opération semblable, la force Π perpendiculaire au rayon vecteur (3597), qui est $-\left(\frac{f}{s^3} + \frac{1}{f^2}\right)\sin. t$, il faut multiplier par $\sin. t$ la valeur trouvée pour $\frac{f}{s^3} - \frac{1}{f^2}$, qu'on a multipliée par $\cos. t$ (3645), et changer les signes; l'on aura $-\left(\frac{9rr}{4f^4} + \frac{225r^4}{64f^6}\right) \cdot \sin. t - \left(\frac{3r}{f^3} + \frac{45r^3}{8f^5}\right) \cdot \cos. t \cdot \sin. t - \left(\frac{15r^2}{4f^4} + \frac{105r^4}{16f^6}\right)\cos. 2t \cdot \sin. t, - \frac{35r^3}{8f^5} \cdot \cos. 3t \cdot \sin. t, - \frac{315r^4}{64f^6}\cos. 4t \cdot \sin. t$. On développera ces produits en employant les formules telles que $\cos. t \cdot \sin. t = \frac{1}{2}\sin. 2t$ (3817), etc., et l'on aura $-\left(\frac{9rr}{4f^4} + \frac{225r^4}{64f^6}\right) \cdot \sin. t + \left(\frac{15r^2}{8f^4} + \frac{105r^4}{32f^6}\right)\sin. t - \left(\frac{3r}{2f^3} + \frac{45r^3}{16f^5}\right)\sin. 2t + \frac{35r^3}{16f^5}\sin. 2t - \left(\frac{15r^2}{8f^4} + \frac{105r^4}{32f^6}\right)\sin. 3t + \frac{315r^4}{128f^6}\sin. 3t - \frac{35r^3}{16f^5}\sin. 4t - \frac{315r^4}{128f^6} \times \sin. 5t$. Pour réduire les différens termes de cette quantité, on observera que $-\frac{9}{4} + \frac{15}{8} = -\frac{3}{8}$; $-\frac{225}{64} + \frac{105}{32} = -\frac{15}{64}$; $-\frac{45}{16} + \frac{35}{16} = -\frac{5}{8}$; $-\frac{105}{32} + \frac{315}{128} = -\frac{420}{128} + \frac{315}{128} = -\frac{105}{128}$. Ainsi l'on trou-

[Handwritten marginal notes: * $(+\frac{315r^5}{256f^7})$ cf. Klügel comment. P. I. p. 9. § 4. — $\frac{315}{256} = \frac{3.105}{16.16}$ — ** leg.: $(+\frac{189.r^5}{128.f^7})$ cf. Klügel]

vera enfin $\Pi = -\left(\frac{3r^2}{8f^4} + \frac{15r^4}{64f^6}\right) \sin. t - \left(\frac{3r}{2f^3} + \frac{5r^3}{8f^5}\right) \sin. 2t - \left(\frac{15r^2}{8f^4} + \frac{105r^4}{128f^6}\right) \sin. 3t - \frac{35r^3}{16f^5} \sin. 4t - \frac{315r^4}{128f^6} \sin. 5t$; expression de la force perturbatrice perpendiculaire au rayon vecteur (3579), qu'il faut aussi multiplier par la masse de Jupiter (3559) : mais nous attendrons la fin de l'opération (3655).

3647. Connoissant l'expression ou la mesure des forces perturbatrices, la question se réduit à trouver l'effet qu'elles doivent produire en un temps donné ; par exemple, en trois mois, ou plus généralement pendant le temps qu'il faut à la planete pour parcourir un arc quelconque. Or l'on a déja vu que c'est ici le plus difficile de la question (3601) ; la mesure des forces Φ et Π, pour un moment donné, n'étoit qu'une opération de l'algebre ordinaire ; mais ce qui doit résulter de ces forces, après qu'elles auront agi sans interruption et d'une maniere variable pendant un temps fini, exige le calcul infinitésimal, le seul par le moyen duquel on puisse, d'un effet momentané et infiniment petit, déduire l'effet total.

3648. L'action de Jupiter sur la Terre, en un moment infiniment petit, la fera sortir de son orbite d'une quantité infiniment petite ; mais cette quantité infiniment petite, exprimée d'une maniere générale par son rapport avec l'élément du temps, nous fera trouver, par le moyen du calcul intégral, le déplacement total qui en devra résulter pour un temps fini ; comme nous trouvons la longueur entiere d'une courbe par rapport à son ordonnée, au moyen d'une particule infiniment petite, pourvu que celle-ci soit exprimée d'une maniere générale par l'équation de la courbe : c'est toujours le rapport de deux quantités finies que l'on déduit du rapport de deux quantités infiniment petites (3439).

3649. Les forces perturbatrices Φ et Π étant connues, on en déduira la valeur de Ω, qui doit nous donner celle du rayon vecteur, ou plutôt de $\frac{l'}{r}$ (3618), et ensuite la correction du temps (3609), ou la petite partie de la valeur de la longitude moyenne qui dépend des forces perturbatrices. Les premiers termes de la valeur de Φ, qui sont $-\frac{r}{2f^3} - \frac{9r^3}{16f^5} + \frac{225r^5}{64f^7}$ (3645), ne seront ici d'aucune utilité ; ils nous apprennent seulement que la force centrale de la Terre vers le Soleil est augmentée constamment de cette quantité par l'action de Jupiter, du moins tant qu'on suppose que r et f sont des quantités constantes, comme nous nous proposons de le faire ici. Mais on n'a besoin, dans l'astronomie, que des termes qui sont variables, et qui

produisent des irrégularités dans les mouvemens apparens ; tels sont les termes multipliés par sin. t; car l'angle t et son sinus changent perpétuellement.

3650. Supposons que la distance moyenne de la planete troublée, c'est-à-dire de la Terre au Soleil, est égale à l'unité, alors $f=5,2028$ (1222); donc $\frac{1}{f^4}=\frac{1}{733}$ ou 0,0013648 ; donc $\frac{3}{8f^4}=0,00051060$. De même $\frac{15}{64f^6}=0,000011817$; donc la partie de la force Π, qui est $-\left(\frac{3r^2}{8f^4}+\frac{15r^4}{64f^6}\right)$ sin. t (3646), équivaut à 0,0005224 sin. t, et le premier terme de $\Phi=-\left(\frac{9r^2}{8f^4}+\frac{75r^4}{64f^6}\right)$ cos. t sera $-$ 0,001594 · cos. t. Nous examinerons ces premiers termes, qui produisent la plus grande équation, et nous chercherons ce qui en résulte dans le mouvement de la Terre ; le calcul sera semblable pour tous les autres termes $2t$, $3t$, etc.

3651. Ayant trouvé en nombres la valeur de Π, il faut en conclure celle de ρ (3609). On avoit supposé $\rho=\int\frac{\Pi r^3 \partial u}{f^2}$; mais $\frac{f^2}{S}$ étoit alors le parametre de l'orbite (3617); donc employant le parametre p, tel que le donne l'observation, on aura $\rho=\int\frac{\Pi r^3 \partial u}{pS}$: mais si nous supposons l'orbite de la Terre circulaire et concentrique, on aura $r=1$, et $p=1$; donc $\rho=\int\frac{\Pi\,\partial u}{S}$. Je n'aurai pas égard à S, qui est la masse du Soleil plus celle de la Terre, parceque je la suppose égale à l'unité, la masse attractive de Jupiter étant exprimée en parties de cette masse du Soleil; on aura donc $\rho=\int\Pi\,\partial u=-\int 0{,}0005224\cdot\text{sin.}\,t\,\partial u$. Il faut trouver la valeur de cette intégrale, qui aura le signe $-$ comme la force Π.

3652. Pour cela on doit exprimer t par le moyen de l'angle u; nous supposerons les orbites concentriques; nous appellerons le mouvement de la Terre 1, celui de Jupiter $1-n$ (3626), en sorte que 1 soit à $1-n$ comme la durée de la révolution de Jupiter, par rapport aux étoiles, est à la durée de la révolution de la Terre (1162), ou comme 0,08430 est à 1 [a]: la différence n de ces deux mouvemens, ou 0,9157, est la valeur de l'angle de commutation t, ou la différence des longitudes de la Terre et de Jupiter; car, en partant du point B, où ces deux longitudes étoient les mêmes, et supposant l'angle du mouvement de la Terre depuis ce temps-là $=1$, celui de Jupiter est $1-n$, et la différence n; mais si le mouvement de la Terre est u, ce-

[a] C'est le mouvement le plus petit que l'on retranche, afin que t aille en croissant.

lui de Jupiter sera $(1-n)u$, et l'angle t de commutation sera nu, n étant $=0,9157$.

Ainsi la valeur de $\rho = -\int 0,0005224$ sinus $t\,\partial u$ revient à $-\int 0,005224 \cdot \sin. nu\,\partial u$, dont l'intégrale sera (3448) $+\frac{0,0005224}{0,9157}\cos. nu$, ou $+0,00057051 \cos. nu$; c'est la valeur de ρ; l'on en déduira -2ρ.

3653. La valeur totale de Ω est $\dfrac{\frac{\Phi rr}{S}+\frac{\Pi r\partial r}{S\partial u}-2\rho}{1+2\rho}$ (3613) ; mais cette valeur de Ω doit d'abord se réduire à $\frac{\Phi rr}{S}+\frac{\Pi r\partial r}{S\partial u}-2\rho$, parceque le dénominateur $1+2\rho$ étant très peu différent de 1, la petite fraction 2ρ n'ajouteroit à la valeur de Ω, qui est déja très petite, qu'une quantité beaucoup moindre: la théorie de la Lune est la seule où l'on soit obligé d'avoir égard à ce dénominateur $1+2\rho$.

Il y a encore dans Ω un terme à négliger; car ayant supposé que le rayon r étoit constant, ∂r est absolument nul, et le terme $\frac{\Pi r\partial r}{S\partial u}$ devient $=0$ (3658). La valeur de Ω est donc $\frac{\Phi rr}{S}-2\rho$; et parceque nous avons pris la distance r de la Terre et la masse S du Soleil pour unité, l'on aura enfin $\Omega=\Phi-2\rho$. Ainsi Ω se réduit à $\Phi-2\rho$; or $\Phi = -0,001594 \cdot \cos. t$, ou $0,001594 \cdot \cos. nu$, et $-2\rho = -0,001141 \cdot \cos. nu$; donc $\Phi-2\rho = -0,002735 \cdot \cos. nu = \Omega$.

3654. Quand on a la valeur de Ω exprimée en cosinus d'un angle tel que nu, il suffit de la diviser par $nn-1$ (3618), et de changer les signes, ou, ce qui revient au même, de la diviser par $1-nn$, sans changer les signes, pour avoir la valeur qui en résulte dans l'équation de l'orbite $\frac{p}{r}=1-e\cdot\cos. mu$; et elle devient $\frac{p}{r}=1-e\cdot\cos. mu+\frac{\Omega}{1-nn}$; or $n=0,91569$, $nn=0,8385$; donc $1-nn=0,1615$: divisant donc $\Phi-2\rho=-0,002735\cdot\cos. nu$ par $0,1615$, la correction de $\frac{p}{r}$ sera $-0,01695\cdot\cos. nu$; c'est ce que nous avons appellé Z (3621). On remarquera ici que quand n approche beaucoup de l'unité, la quantité $1-nn$ est fort petite, et que les termes de la valeur de Ω en produisent de plus cousidérables dans la valeur de Z; au contraire, quand n est considérable, la valeur de Ω diminue en formant la valeur de Z: voilà pourquoi nous avons négligé les termes sin. $6t$, sin. $7t$ (3645), qui auroient donné nn de 36 et de 49.

3655. Le premier terme variable de l'élément du temps (3621), ou de la longitude moyenne, est $-(2Z+\rho)\,\partial u$. Le second, qui est $-2e(3Z+\rho)\cos. mu\,\partial u$, disparoît quand on suppose l'orbite circulaire,

culaire, puisqu'il renferme l'excentricité e; ainsi, pour trouver la longitude moyenne, nous n'emploierons que le terme $-(2Z+\rho)\,du = dx$. Nous avons trouvé $Z = -0{,}01695 \cdot \cos.\, nu$ (3654) et $\rho = 0{,}0005705 \cdot \cos.\, nu$ (3652); donc $-(2Z+\rho)\,du = +0{,}03333 \times \cos.\, nu\, du = dx$. Pour en avoir l'intégrale, il faut changer le cosinus en sinus, et diviser par n (3449), dont la valeur est 0,9157; l'on aura donc $0{,}03640 \cdot \sin.\, nu$ pour la valeur de x, c'est-à-dire du terme variable de la longitude moyenne; ainsi l'on aura cette longitude $x = u + 0{,}03640 \cdot \sin.\, nu$; donc la longitude vraie $u = x - 0{,}03640 \sin.\, nu$.

Cette quantité 0,03640 doit se multiplier par la masse de Jupiter $\frac{1}{1067}$, parceque les forces Φ et Π (3597) renfermoient cette masse, que nous n'avons point employée jusqu'ici, et que nous avons réservée pour la fin, dans le dessein de rendre les calculs plus faciles (3644): elle doit aussi se multiplier par 57°, ou par 206265″ pour être convertie en secondes (3622), et l'on trouvera $-7''05 \cdot \sin.\, nu$, ou $-7''05 \cdot \sin.\, t$: c'est ce que trouvent Clairaut (*Mém.* 1754), et M. de la Grange (*Mém. de Berlin*, 1784).

3656. On trouveroit de même une équation $+2''7 \cdot \sin.\, 2t$, si l'on eût fait sur les termes $2t$ ce que nous avons fait sur les termes t. *Alors au lieu de n on prend* ...

Si, au lieu de supposer $r = 1$, on emploie $r = 1 + e \cos.\, nu$ (3487), appellant u l'anomalie moyenne de la Terre ou du Soleil [a], on trouvera encore deux autres équations, qui sont $-1''5 \sin.\, (2t - u) + 0''4 \sin.\, (t - u)$.

L'angle t est la longitude de la Terre moins celle de Jupiter vue du Soleil. Je suppose qu'on ait, pour le 5 mars 1749, la longitude moyenne du Soleil $11^s\, 13°\, 20'$, celle de la Terre, qui lui est opposée, sera $5^s\, 13°\, 20'$; je suppose aussi que la longitude héliocentrique moyenne de Jupiter dans les tables se soit trouvée de $11^s\, 9°\, 4'$, on retranchera celle-ci de la longitude de la Terre, et l'on aura $6^s\, 4°\, 16'$ pour la valeur de l'angle t; le sinus de $6^s\, 4°\, 16'$, ou le sinus de $4°\, 16'$, pris négativement (3794), $= -0{,}0744$, comme on le trouve par les tables des sinus; donc l'équation $-7''05 \cdot \sin.\, t$ sera $+0''5$ dans ce cas-là. Si, au lieu de la longitude de la Terre, on vouloit employer celle du Soleil, qui est plus grande de 6 signes, pour former l'angle t, il faudroit changer le signe de l'équation, et elle deviendroit $+7''\, \sin.\, t$. M. de la Place trouve $7''0540 \sin.\, t - 2''5829 \sin.\, 2t - 0''1642$

[a] Cela n'est exact que pour l'anomalie vraie; mais comme le terme est petit, on y néglige cette différence: cependant M. de la Place a reconnu, en 1788, que, pour les équations de la Terre par l'action de la Lune, cela produisoit une petite équation.

(+ Si l'on fait t = ☉ − ♃, on a (tous les signes) +7″,0540 sin t − 2″,5829 sin 2t − 0″,1642 sin 3 &c. Ainsi est calculée la Table du ☉ VI. chez M. Delambre.)

sin. $3t$. Les inégalités produites dans le mouvement de la Terre par Vénus et par la Lune se calculeroient de la même maniere[a] ; on en trouvera le résultat dans les tables VI, VII et VIII, parmi celles du Soleil. La Caille (*Mém.* 1757, *pag.* 137) portoit l'action de Vénus à 15''2 ; elle est réduite ici à 9''5, d'après les observations, et d'après les raisons qui m'ont fait diminuer la masse de Vénus (3565).

Cette équation est composée, suivant M. de la Place, des termes suivans, $5''2871 \sin. t - 6{,}0126 \sin. 2t - 0''7427 \sin. 3t - 0''2251 \sin. 4t - 0''0910 \sin. 5t$. L'action de la Lune se réduit à $6'' \sin. t$.

L'action de Mars produit aussi, dans le mouvement de la Terre, des inégalités qui méritent d'être employées. M. de la Place a calculé en 1788 les équations suivantes, dans lesquelles T est la longitude hélioc. de la Terre, M celle de Mars, et t leur différ. $-0''4337 \sin. t - 3''4827 \sin. 2t + 0''2151 \sin. 3t + 0''0470 \sin. 4t + 2''8316 \sin. (2M - T + 45°)$: celle-ci dépend des anomalies de Mars et de la Terre ; car, si l'on appelle t la longitude moyenne de Mars moins celle du Soleil, p l'anomalie moyenne de Mars, et q celle du Soleil, on a $2''033 \sin. (t+p) + 1''095 \sin. (2t+q)$. Ces deux équations reviennent à $2''8 \sin. (2M - T + 47°)$: ces coëfficiens supposent la masse de Mars 1846082 fois moindre que celle du Soleil, la densité étant supposée en raison inverse de la distance (3565).

Pour trouver ces équations, on a mis dans les tables du Soleil l'argument IV T—M et l'argument V, 2M—T+45° en milliemes parties du cercle. La Caille employoit, pour l'action de la Lune, deux équations qui étoient $7''7 \sin. t + 1''8 \sin. (t+z) - 1''7 \sin. (t-z)$, en nommant z l'anomalie du Soleil (*Mém.* 1757) ; Mayer, dans ses tables du Soleil, suppose la premiere équation de 8'', et il n'a point d'égard aux autres ; mais M. de la Place a trouvé qu'elles ne doivent pas avoir lieu.

Cette équation du Soleil, produite par l'attraction de la Lune, est ce qu'on a appellé la PARALLAXE MENSTRUELLE (*Voy.* Sméaton, *Phil. Trans.*, 1768, *pag.* 156, et le P. Asclepi, *Atti di Siena* ; M. Maskelyne, *pref.*, pag. ix).

[a] Clairaut a donné le calcul de toutes ces inégalités de la Terre ; mais il faisoit les masses de Vénus et de la Lune trop fortes ; d'Alembert en traita dans ses *Recherches*, T. II et III, ainsi qu'Euler, dans les *Mémoires de Pétersbourg* pour 1771 et 1778 ; mais celui-ci se trompa, comme on l'a remarqué dans les volumes de 1779 et 1780. Il n'y avoit pas d'erreur dans le mémoire de Clairaut pour la Lune, comme je l'ai fait voir (*Mémoires de* 1786) ; mais M. de la Place trouve qu'il y en avoit pour les petites équations qu'il donnoit, et qui ne doivent point avoir lieu. M. de la Grange a aussi donné le calcul d'une partie de ces inégalités dans les *Mémoires de Berlin* pour 1784.

3657. Pour évaluer le changement que Jupiter produit dans la distance de la Terre au Soleil, on prendra la valeur de $\frac{p}{r}$ (3654), qui est — 0,01695; on changera le signe pour avoir la valeur de r; on la multipliera par la masse $\frac{1}{1067}$, et l'on aura 0,0000159; et comme nous n'employons que des logarithmes dont la variation est 434 pour 1000, à pareil nombre de chiffres dans cet endroit des tables, le changement se réduira à 7 parties pour un logarithme de 7 chiffres, et la correction sera $+7$ cos. t. Il y a encore un autre terme -4 cos. $2t$, que l'on trouveroit en étendant le calcul. C'est sur cette formule qu'est calculée la table XVI.

Voici les formules de M. de la Place, d'après lesquelles sont calculées les tables XV et suivantes, la distance moyenne étant prise pour unité : + 0,000029089 cos. arg. I; + 0,00001597 cos. arg. II; — 0,0000090081 cos. 2 arg. II; — 0,0000005824 cos. arg. III; + 0,000017059 cos. 2 arg. III; +0,0000026805 cos. 3 arg. III; + 0,000000936 cos. 4 arg. III; +0,00000054862 cos. arg. IV; + 0,00000806129 cos. 2 arg. IV— 0,0000064741 cos. 3 arg. IV.

3658. L'excentricité de l'orbite troublée, lorsqu'on veut la faire entrer dans ces calculs, exige beaucoup d'autres termes dans les valeurs de Ω : on ne fait plus $r=1$, comme je l'ai supposé dans les calculs précédens (3651), ni $t=nu$ (3652). Je vais donner une idée des difficultés que cette considération ajoute au calcul. Soit u l'anomalie vraie de la Terre, on aura $u+2e\cdot\sin. u$ pour son anomalie moyenne (3486), en négligeant tous les autres termes; et, puisque nous avons appellé $1-n$ le mouvement de Jupiter, lorsque celui de la Terre est 1, il ne faudra que multiplier $u+2e\cdot\sin. u$ par $1-n$, et l'on aura $u-nu+2e(1-n)\cdot\sin. u$ pour la longitude moyenne de Jupiter; on la retranchera de celle de la Terre ($u+2e\cdot\sin. u$), et l'on aura la valeur de t en u.

Mais l'on suppose que l'orbite de Jupiter est concentrique lorsque l'on calcule les effets de l'excentricité de la Terre; ainsi, supposant que $u-nu+2e(1-n)$ sin. u exprime aussi bien la longitude vraie de Jupiter que la moyenne, la retranchant de la longitude vraie de la Terre, qui est u, on aura $nu-2e(1-n)$ sin. $u=t$, au lieu de nu que nous avons pris pour la valeur de t (3652), lorsque nous supposions circulaire l'orbite de la Terre.

Un autre effet de l'excentricité est le terme $\frac{\Pi r \partial r}{\partial u}$ de la valeur de Ω, que nous avons négligé (3653), et dont il faut tenir compte quand on considere l'excentricité : on a pour lors $r=1+e\cdot\cos. u$ (3405,

3487) $\partial r = - e \cdot \sin. u \partial u$ (3448); $\frac{\partial r}{\partial u} = - e \cdot \sin. u$; $\frac{r \partial r}{\partial u} = - e \times$ sin. u; car on peut supposer ici $r = 1$, et négliger les termes ultérieurs de la multiplication, qui renfermeroient e^2, ou le carré de l'excentricité: il faudra donc multiplier par e sin. u tous les termes trouvés pour la valeur de Π (3646), et l'on aura une nouvelle suite de termes qui entreront dans Ω, et qu'il faudra traiter comme nous avons fait le terme $-0{,}002735 \cdot \cos. nu$ (3654).

Enfin l'excentricité exige encore, dans la correction du temps, un nouveau terme $-2e\,(3Z + \rho)\cos. mu \partial u$ (3621). J'ai donné ailleurs le calcul de tous ces termes, appliqué à un exemple assez détaillé (*Mém. acad.* 1758); on y trouvera aussi le calcul des termes qui dépendent de l'excentricité de l'orbite troublante, dont il est quelquefois nécessaire de faire usage.

Quoique l'excentricité soit une fraction dont le carré et le cube paroissent pouvoir toujours se négliger, M. de la Place a reconnu un cas très important, où la troisieme puissance de l'excentricité introduisoit un terme considérable, à cause de la petitesse du coëfficient; c'est dans les attractions réciproques de Jupiter et de Saturne. La troisieme puissance fournit des termes 5—2, dont la différence est 3; par exemple, cinq fois la longitude de Jupiter moins deux fois celle de Saturne; et comme cette quantité est une fraction très petite, elle produit, comme diviseur, un terme très grand (*Mém.* 1785, *p.* 124).

3659. La valeur de $\frac{1}{s^3}$ est la premiere chose qu'il a fallu connoître pour avoir l'expression des forces perturbatrices; dans l'exemple que j'ai donné, la valeur de $\frac{1}{s^3}$ a été exprimée par une série (3644), dont on a négligé les derniers termes, parcequ'on supposoit que f étoit très grand ou très petit par rapport à r; mais lorsque les deux quantités approchent de l'égalité, la série n'est plus assez convergente, et cette méthode pour trouver $\frac{1}{s^3}$ ne sauroit être exacte. Euler, qui apperçut cette difficulté, dans sa piece sur la théorie de Saturne, s'occupa à la résoudre, mais il ne démontra point la méthode qu'il indiquoit. D'Alembert, dans la seconde partie de ses *Recherches*, donna une autre méthode; et Clairaut en a donné une troisieme à l'occasion des inégalités de la Terre (*Mém. acad.* 1754). Je l'ai expliquée, avec un assez grand détail, dans des mémoires sur les inégalités de Vénus et de Mars (*Mém.* 1760, 1761). Je vais en donner ici les principes, de la maniere la plus élémentaire, et j'y joindrai les formules qui en résultent.

3660. La valeur générale de la distance s ou RT (fig. 290) est

$\sqrt{r^2+f^2-2fr\cdot\cos. t}$ (3425); donc $\frac{1}{s^3}=(r^2+f^2-2fr\cos. t)^{-\frac{3}{2}}$; divisant par $2fr$ les quantités qui sont sous le signe radical, et multipliant tout par $(2fr)^{-\frac{3}{2}}$, on a $\frac{1}{s^3}=(2fr)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{r^2+f^2}{2fr}-\cos. t\right)^{-\frac{3}{2}}$. Si l'on fait $\frac{r^2+f^2}{2fr}=h$, et qu'on exprime en général l'exposant $-\frac{3}{2}$ par m, la question se réduira à trouver en général la valeur de $(h-\cos. t)^m$. Pour cela soit $(h-\cos. t)^m=A+B\cdot\cos. t+C\cdot\cos. 2t+D\times$ $\cos. 3t$, etc.: cette forme nous est indiquée par les valeurs trouvées ci-dessus (3644), où $\frac{1}{s^3}$ n'a produit que des cosinus de multiples de t: il s'agira de trouver les valeurs de A, B, C, etc. Pour trouver celle de A, multiplions tout par dt, et nous aurons $(h-\cos. t)^m dt$ $=A\,dt+B\cdot\cos. t\,dt+C\cdot\cos. 2t\,dt$, etc.; donc en intégrant $\int(h-\cos. t)^m dt=At+B\cdot\sin. t+\frac{1}{2}C\sin. 2t$, etc. Faisons $t=180°$; alors tous les termes B, C, etc. s'évanouiront, car le sinus d'un demi-cercle et de tous ses multiples est toujours égal à o; il restera pour lors A $=\int\frac{(h-\cos. t)^m dt}{180°}$, qu'il s'agit de réduire en nombres, par approximation, cette quantité n'étant pas intégrable.

3661. Pour avoir $\int(h-\cos. t)^m dt$, il n'y a qu'à concevoir une courbe, dont t soit l'abscisse, dt la différentielle de l'abscisse, et $(h-\cos. t)^m$ l'ordonnée; et si l'on trouve la quadrature ou la surface de cette courbe pour le cas où $t=180°$, ce sera l'intégrale $\int(h-\cos. t)^m dt$. En calculant les inégalités que la Terre éprouve par l'action de Vénus, je trouvai $f=0,72333$, $h=1,052912$: si donc $t=1°$, on a $\cos. t=0,9998477$; donc $h-\cos. t=$ 0,0530643; son logarithme est 8,7248025; le complément de ce logarithme sera 1,2751975; c'est le logarith. de $(h-\cos. t)^{-1}$; si l'on y ajoute sa moitié 0,6375987, l'on aura 1,9127962, logar. de 81,8081; ainsi $(h-\cos. t)^{-\frac{3}{2}}=81,8081$, lorsque $t=1°$.

On cherchera de même la valeur numérique du même terme, lorsque $t=2°$, lorsqu'il est de 3°, et ainsi de suite jusqu'à 180°; toutes ces ordonnées se multiplieront par dt, et donneront ainsi les élémens de la courbe dont on cherche la quadrature ou la surface: or dt sera égale à 1, si les ordonnées ont été calculées de degré en degré; il sera égal à 2, si elles n'ont été calculées que de deux en deux degrés, et ainsi des autres; parceque dt doit être exprimé en degrés aussi bien que t lui-même. Si l'on a donc 180 ordonnées de degré en degré, il faudra les ajouter toutes ensemble pour avoir la surface ou l'intégrale cherchée (3473).

3662. On pourroit demander à ce sujet pourquoi $\int(h-\cos. t)^m\times$

$\partial t = A \cdot 180°$, c'est-à-dire pourquoi nous faisons $t = 180°$ plutôt que 360° : je réponds que si on le faisoit égal à 360°, on trouveroit la même chose ; car alors $\int (h - \cos. t)^m \partial t$ devroit se répéter 360 fois, et l'on trouveroit précisément le double de ce que l'on trouve en ne calculant que 180 ordonnées de la courbe, dont $\int (h - \cos. t)^m \partial t$ est la différentielle : en effet quand on a trouvé $A = \frac{\int (h - \cos. t)^m \partial t}{180}$, il est supposé que c'est $\int (h - \cos. t)^m \partial t$ pour le cas où $t = 180°$; si on le prend pour le cas où $t = 360°$, on aura le double ; car toutes les ordonnées du premier demi-cercle se répéteront dans le second ; et comme le total sera divisé par 360°, il donnera le même résultat.

3663. On demandera encore pourquoi, en cherchant la valeur de $\int \partial t (h - \cos. t)^m$ pour chaque degré, on prend $\partial t = 1°$, en sorte que 1° soit l'unité des arcs t : je réponds que puisque ∂t est la différentielle de t, il faut absolument l'exprimer en parties de t, afin que ∂t et t soient des quantités homogenes. Si donc on prenoit ∂t égal à 1' ou à $\frac{1}{60}$ de degré, et que ce fût l'unité, alors le demi-cercle qui forme le dénominateur dans $\frac{\int (h - \cos. t)^m \partial t}{180°}$, et qui rend cette valeur égale à A, vaudroit, non pas 180, mais 60 fois 180 de ces unités-là : si donc on veut mettre pour le demi-cercle 180 parties, il faut que ∂t soit composé de ces mêmes parties, c'est-à-dire de degrés. Si l'on fait ∂t égale à deux degrés, on aura le même résultat, pourvu qu'on double la somme de toutes les ordonnées, c'est-à-dire qu'on divise par 90 au lieu de diviser par 180 ; cela reviendra à-peu-près au même : je dis à-peu-près, parceque plus ∂t seroit grand, plus il y auroit d'inexactitude à supposer rectiligne la surface de la petite courbe qui est l'élément de l'aire totale, ou de la courbe entiere dont on calcule les ordonnées pour en avoir la surface.

3664. J'ai dit qu'il falloit ajouter ensemble toutes les ordonnées pour avoir la surface de la courbe ; mais il est encore mieux d'avoir égard à ce que nous avons dit des courbes paraboliques (3474). Supposons que $\partial t = 2$, et qu'on ait trouvé 46 ordonnées pour le premier quart-de-cercle, c'est-à-dire les ordonnées qui ont lieu en supposant $x = 0$, $x = 2°$, $x = 4°$, etc., jusqu'à $x = 90°$ inclusivement, et 46 ordonnées pour le second quart-de-cercle, c'est-à-dire depuis $x = 90°$ inclusivement jusqu'à $x = 180°$ inclusivement ; on ajoutera ensemble le tiers des extrêmes ou de la premiere et de la derniere ordonnée ; quatre tiers de la seconde, de la quatrieme, de la sixieme, c'est-à-dire de tous les termes pairs ; deux tiers de la troisieme, de la cinquieme ou de tous les nombres impairs (3475) ;

on divisera la somme par 90 (3660) ; ce seroit par 180 si l'on avoit calculé les ordonnées pour tous les degrés ; et, dans le cas de l'article 3661, l'on aura la valeur de $A = 8{,}702$. On trouvera tous ces calculs faits en détail dans les Mémoires que j'ai donnés à l'académie en 1760 et 1761, sur les inégalités de Vénus et de Mars produites par l'attraction de la Terre.

3665. J'ai supposé, dans l'exemple précédent, qu'on cherchoit seulement la valeur de $(h - \cos. t)^{-\frac{3}{2}} = (1{,}052912 - \cos. t)^{-\frac{3}{2}}$, ou de $\left(\frac{r^2+f^2}{2fr} - \cos. t\right)^{-\frac{3}{2}}$: mais pour avoir la valeur de $\frac{1}{s^3}$, il faut que cette même quantité soit multipliée par $(2fr)^{-\frac{3}{2}}$ (3660) ; or on suppose toujours que r, ou la distance de la planete troublée, est égale à l'unité ; il faut donc seulement diviser l'unité par la racine carrée du cube de $2f$, ou de deux fois la distance de la planete troublante, pour avoir le coëfficient général. Ainsi la distance de Vénus au Soleil est $0{,}72333 = f$, en supposant celle de la Terre égale à l'unité ; donc $r = 1$, et $(2fr)^{-\frac{3}{2}} = 0{,}57471$; c'est le coëfficient général pour le cas des perturbations de la Terre par Vénus : il faut donc multiplier 8,702 par ce nombre-là, et l'on aura la valeur entiere de $A = 5{,}0011$, à-peu-près comme Clairaut l'a trouvée (*Mém. acad.* 1754, pag. 554).

3666. On est obligé de chercher, par un semblable calcul, la valeur de B, qui est le 2e terme de $\frac{1}{s^3}$ (3660). Pour cela nous reprendrons la série $(h - \cos. t)^m = A + B \cdot \cos. t + C \cdot \cos. 2t$, etc. ; et multipliant tout par cos. t, nous aurons $(h - \cos. t)^m \cdot \cos. t = A \cdot \cos. t + B \cdot \cos. t^2$, etc. $= A \cdot \cos. t + \frac{B}{2} + \frac{B}{2} \cos. 2t$, etc. : tous les termes suivans renfermeront des cosinus, parcequ'il n'y a que les puissances paires $\cos. t^2$, $\cos. t^4$, etc. qui donnent des termes tels que $\frac{B}{2}$, où il n'y ait point de cosinus (3832), et que $\cos. t^4$ n'y sera pas : donc $(h - \cos. t)^m \cos. t \cdot \partial t = A \cdot \cos. t \partial t + \frac{B \partial t}{2} + \frac{B}{2} \times \cos. 2t \partial t$, etc. dont l'intégrale $\int (h - \cos. t)^m \cos. t \cdot \partial t = A \cdot \sin. t + \frac{Bt}{2}$, etc. : tous les termes, excepté $\frac{Bt}{2}$, renfermeront les sinus de t ou de ses multiples ; donc ils disparoîtront tous, excepté le terme $\frac{Bt}{2}$, lorsqu'on fera $t = 180°$; donc alors on aura $\int (h - \cos. t)^m \times \cos. t \partial t = B \cdot 90°$; donc $B = \int \frac{(h - \cos. t)^m \cos. t \partial t}{90°}$; c'est le second terme de la série. On trouveroit de même $C = \int \frac{(h - \cos. t)^m \cdot \cos. 2t \partial t}{90°}$; et ainsi de suite pour D, E, F, etc.

3667. On calculera donc aussi, pour chaque degré, la valeur de $(h - \cos. t)^m \cos. t$; par exemple, t étant égal à 1°, et $h - \cos. t$ élevé à la puissance $-\frac{3}{2}$, $= 81,8081$ (3661); on le multipliera par cos. 1°; on aura 81,795; c'est le second terme de B ou la seconde ordonnée de la courbe, dont la surface entiere doit donner la valeur de B. Dans le premier terme on a le cosinus de zéro ou l'unité pour cos. t. L'on calcule ainsi les 181 ordonnées, de degré en degré, ou seulement 91, de 2° en 2°; mais on observe que cos. t doit changer de signe aussitôt que t surpasse 90°; alors on ajoute cos. t avec h, au lieu de le retrancher, et toutes les ordonnées du second quart-de-cercle deviennent négatives à cause de la multiplication par cos. t. Ayant ainsi calculé 91 ordonnées, on prendra le tiers des extrêmes, les $\frac{4}{3}$ des termes pairs et $\frac{2}{3}$ des impairs (3475), en observant que, dans le second quart, elles sont toutes négatives, à cause de cos. t; on divisera la somme par 45 (ce seroit par 90° si l'on avoit calculé les 181 ordonnées), et l'on trouvera 15,4666: cette quantité multipliée par le coëfficient général 0,57471 (3665), donnera la vraie valeur de B, 8,8888, ou le second terme de la série $\frac{1}{s^3} = A + B \cdot \cos. t + C \cdot \cos. 2t$.

3668. Les autres termes C, D, E, F, se trouveront, par le moyen des deux premiers, au moyen des formules suivantes (*Mém. acad.* 1760), $C = \frac{2Bh + 2Am}{m + 2}$, $D = \frac{4Ch + (m - 1)B}{m + 3}$, $E = \frac{6Dh + (m - 2)C}{m + 4}$, $F = \frac{8Eh + (m - 3)D}{m + 5}$, etc. Dans le cas dont il s'agit ici (3665), on a $m = \frac{3}{2}$, d'où il est aisé de calculer ces valeurs en nombres.

L'usage de ces termes est absolument le même que pour la série $\frac{1}{s^3} = \frac{1}{f^3} + \frac{9r^2}{4f^5}$, etc. (3644); car on s'en sert pour trouver Φ et Π, ensuite Ω, Z, et l'élément du temps (3649 *et suiv.*). Lorsqu'on veut avoir égard à l'excentricité de la planete troublée, on trouve dans la valeur de $\frac{1}{s^3}$ un terme $-3ef \cdot 2f^{-\frac{5}{2}} \left(\frac{1+f^2}{2f} - \cos. t\right)^{-\frac{5}{2}}$, qui exige une nouvelle suite de termes, tels que A, B, C, etc. (*Mém. acad.* 1761). Je n'entrerai pas dans ce détail; il me suffit ici d'avoir expliqué clairement les principes de ces calculs; j'en ai donné l'explication dans les Mémoires cités.

3669. Les comètes exigent beaucoup de calculs semblables quand on cherche les perturbations et les inégalités qui ont lieu dans leur mouvement; les valeurs de ρ, de Ω, se trouvent par des quadratures de courbes que l'on forme en calculant de même un grand

grand nombre de leurs ordonnées : en effet, quand la distance s de la planete troublante à la planete troublée est trop variable pour qu'on puisse l'exprimer par une série, même avec le secours de la méthode precédente, on est obligé de chercher les quantités des différentes parties de Ω (3653), en calculant un grand nombre de fois leurs valeurs pour chaque révolution : j'en ai parlé à l'occasion de la comete de 1759 (3206).

3670. M. Euler donna le premier le calcul pour les inégalités de Saturne dans la piece de 1748, et pour Jupiter dans celle de 1752. Mayer calcula encore celles-ci ; et M. Wargentin en fit usage dans les tables de Jupiter et dans celles des Satellites : mais M. de la Place a poussé les recherches jusqu'aux troisiemes puissances de l'excentricité pour Saturne (*Mém.* 1785), et pour Jupiter (*Mém.* 1786). M. de Lambre s'en est servi pour calculer les tables que nous donnons dans ce livre, au moyen de l'examen des observations. La grande inégalité de Saturne, page 170 de nos tables, est calculée sur la formule suivante, dans laquelle a exprime le nombre des années, à partir de 1750, S est la longitude moyenne de Saturne, J exprime celle de Jupiter.

$$-(48'\,44'' - a\cdot 0'',1)\,\sin.\,(5S - 2J + 5^\circ\,34'\,8'' - a\cdot 58'',88).$$

Soit μ la long. hélioc. moyenne de Jupiter et μ' celle de Saturne, Φ la longitude corrigée de Jupiter, comptée de l'équinoxe de 1750, et Φ' celle de Saturne, $\Phi' = \mu' - (48'\,44'' - a\cdot 0'',1)\cdot\sin.\,(5\mu' - 2\mu + 5^\circ\,34'\,8'' - a\cdot 58'',88)$. On a encore les équations suivantes :

$$+\,0'\,20''\cdot\sin.\,(\Phi - \Phi' + 69^\circ\,38'\,40'') - 31'',5\cdot\sin.\,2\,(\Phi - \Phi')$$
$$-\,6'',6\cdot\sin.\,3\,(\Phi - \Phi'),$$
$$=\;6'\,59'',3\cdot\sin.\,(\Phi - 2\Phi' - 15^\circ\;0'\,57'' + a\cdot 14'',215),$$
$$-\,10'\,51'',0\cdot\sin.\,(2\Phi - 4\Phi' + 55^\circ\,52'\,19'' + a\cdot 42'',88),$$
$$-\;49'',6\cdot\sin.\,(3\Phi' - \Phi + 88^\circ\,20'\,19''),$$
$$-\;21'',8\cdot\sin.\,(2\Phi - 3\Phi' + 21^\circ\,50'\,35''),$$
$$+\;11'',0\cdot\cos.\,\Phi.$$

On trouvera les démonstrations dans les Mémoires de M. de la Place (*Mém.* 1785 et 1786).

La grande inégalité de Jupiter (*pag.* 146, 147) est calculée sur la formule $(20'\,49'',5 - a\cdot 0''042733)\cdot\sin.\,(5S - 2J + 5^\circ\,34'\,8'' - a\cdot 58'',88)$. Les autres équations sont exprimées par les formules suivantes :

$$-\,1'\,22'',7\cdot\sin.\,(\Phi - \Phi') + 3'\,24'',3\cdot\sin.\,2\,(\Phi - \Phi') + 17'',0\cdot$$
$$\sin.\,3\,(\Phi - \Phi') + 3'',9\cdot\sin.\,4\,(\Phi - \Phi'),$$

$+ 2' \, 18'',4 \cdot \sin.(\; \Phi - 2\Phi' - 13^\circ \, 33' \;\; 7'' + a \cdot 13'',7),$

$+ 1' \, 27'',4 \cdot \sin.(2\Phi - 3\Phi' - 61^\circ \, 59' \, 48'' + a \cdot 21'',9),$

$+ 2' \, 47'',0 \cdot \sin.(3\Phi - 5\Phi' + 55^\circ \, 19' \, 21'' + a \cdot 43'',0),$

$- \quad 16'',0 \cdot \sin.(3\Phi - 4\Phi' - 62^\circ \, 51' \, 19''),$

$+ \quad 12'',8 \cdot \sin.(3\Phi - 2\Phi' - \;\; 8^\circ \, 30' \, 15''),$

$- \quad 13'',0 \cdot \sin.(3\Phi' - \;\; \Phi - 58^\circ \, 31' \;\; 0''),$

$+ \quad 11'',6 \cdot \sin.(\; \Phi' + 45^\circ \;\; 4'),$

$+ \quad 10'',0 \cdot \sin.(4\Phi - 5\Phi' + 45^\circ \, 16' \, 32''),$

$- \quad \;\; 5'',4 \cdot \sin.(2\Phi - \;\; \Phi' + 16^\circ \;\; 1' \, 27'').$

3671. Pour avoir la longitude actuelle de Mars, il faut ajouter au calcul des tables $+ 6'',3 \cdot \sin. \, t - 32'' \cdot \sin. \, (t - u) + 14'' \cdot \sin. \, (2t - u) + 13'' \cdot \sin. \, (2t - z)$; t étant la longitude de la Terre moins celle de Mars, u l'anomalie moyenne de Mars, z celle de la Terre : je diminue la masse de la Terre que j'avois employée (*Mém.* 1761). M. de la Grange trouve la premiere équation comme moi (*Mém. de Berlin* 1784) ; il n'a pas calculé les autres qui dépendent des excentricités : mais il trouve un signe différent, parcequ'il emploie la longitude de Mars moins celle de la Terre.

A raison de l'action de Jupiter, t étant la longitude héliocentrique de Mars moins celle de Jupiter, je trouve encore $- 25'',7 \cdot \sin. \, t + 12'' \cdot \sin. \, 2t + 9'' \cdot \sin. \, (t - u) - 18'' \cdot \sin. \, (2t - 2u)$ (*Mém.* 1758, pag. 22, *Mém. de Berlin* 1784).

Pour Vénus par l'action de la Terre on doit appliquer au lieu moyen de Vénus les équations suivantes $- 4'',6 \cdot \sin. \, t - 10'',5 \cdot \sin. \, 2t + 6'',5 \cdot \sin. \, 3t + 1'',0 \cdot \sin. \, 4t$, en rectifiant la masse de la Terre que j'avois employée (*Mém.* 1760, pag. 326). M. de la Grange a ajouté les deux dernieres équations (*pag.* 247).

L'action de Jupiter sur Vénus produit aussi $- 2''9 \cdot \sin. \, t + 0''9 \cdot \sin. \, 2t$ (*ibid.* pag. 244).

Les inégalités de Mercure sont insensibles, comme je l'ai fait voir (Mém. 1771), ainsi que M. de la Grange, pag. 258.

Les inégalités de Herschel ont été calculées par M. Oriani à Milan (Ephém. de Milan, 1791) ; M. Duval le Roi à Brest ; et M. de Lambre à Paris, en 1789 : le premier s'est servi des formules de M. de la Place, le second de la méthode de M. de la Grange ; le troisieme a employé celle de M. de la Place, dans la piece qui a remporté le prix de l'académie en 1790. Voici les termes qu'il a employés dans ses tables. Soit H la longitude de cette planete, S celle de Saturne, A celle de son aphélie, I la longitude de Jupiter, A' celle de son aphélie ; on aura, pour la longitude de la planete, les équations suivantes :

+ 2′ 30″ · sin. (S — 2 H + A) + 2′ 13″, 14 · cos. (3 H — S) — 5″, 43 · sin. (3 H — S) + 52″,5 · sin. (I — H) — 0″,17 · sin. 2 (I — H) — 44″,19 · sin. (S — 2 H + A′) — 3″,7 · sin. (I — 2 H + A′) + 21″,91 · sin. (S — H), + 8″,4 · cos. (S — H) — 4″,23 · sin. 2 · (S — H) — 0″86 · sin. 3 (S — H) — 0″,24 · sin. 4 (S — H) + 2″,66 · sin. (2S — 3H), — 1″,54 · cos. (2S — 3H).

Ces équations s'appliquent à une orbite elliptique dont la distance moyenne est 19,18352; la plus grande équation est 5° 21′ 3″,2; la longitude pour 1784, 3ˢ 14° 43′ 18″; l'aphélie 11ˢ 17° 6′ 44″; le nœud 2ˢ 12° 46′ 47″; le mouvement séculaire 2ˢ 9° 51′ 20″; celui de l'aphélie 1° 28′; celui du nœud 26′ 10″; et l'inclinaison 46′ 16″. M. de Lambre a aussi calculé les équations de la distance + 0,0087132 + 0,0035435 · cos. (S — H) + 0,0004070 · cos. 2 (S — H) + 0,0000889 · cos. 3 (S — H) + 0,0000256 · cos. 4 (S — H) — 0, 00624 · cos. (S — 2 H + A) + 0, 001641 · cos. (S — 2 H + A′) + 0, 004899 · cos. (I — H).

L'équation 2′ 13″, dont la période est de 549 ans, est le résultat, pour les siecles actuels, de plusieurs équations que donne la théorie de M. de la Place, quand on ne néglige pas les puissances de l'excentricité.

Du Mouvement des Apsides.

3672. L'observation prouve que les aphélies de toutes les planetes ont un petit mouvement selon l'ordre des signes (1314 *et suiv.*); l'apogée de la Lune a un mouvement très rapide (1432) : ces mouvemens sont une suite de l'attraction. Chaque planete décriroit naturellement une ellipse, si elle n'étoit attirée que par le corps autour duquel elle tourne ; mais elle est continuellement détournée de cette orbite par les attractions des autres planetes, en sorte que sa trace n'est jamais véritablement une ellipse ; ou bien cette ellipse est mobile. Soit S le foyer (FIG. 296), et A l'aphélie d'une planete dont l'orbite est AMPO, et supposons que la planete eût été de A en B, dans une ellipse immobile ABP, avec la force centrale du Soleil S : si l'attraction d'une autre planete P, qui tend à l'éloigner du Soleil, la fait parvenir en un point C et à une distance SC du Soleil, on pourra supposer que ce point est placé dans une autre ellipse CDE égale à l'orbite ABP, dont l'apside, au lieu d'être encore en A, soit parvenue en C; l'on ajuste, pour ainsi-dire, sur le point C où est véritablement la planete, l'ellipse ABP dont la pla-

nete est véritablement sortie; et en faisant mouvoir cette ellipse, on réduit le calcul du vrai mouvement de la planete à la simplicité du calcul elliptique. Toutes les fois que la planete s'éloigne du foyer S, ou que la force centrale est diminuée, on est obligé de concevoir un mouvement progressif dans son apside pour satisfaire à cette diminution; c'est ce qui a lieu dans le système planétaire.

3673. Si la gravité étoit exactement en raison inverse du carré des distances, la planete emploieroit la moitié de sa révolution à aller de A en P, ou de l'aphélie au périhélie. Si la gravité est en raison inverse d'une puissance de la distance qui soit entre deux et trois ou entre le carré et le cube, la planete emploiera plus de la moitié de la révolution à arriver de l'aphélie au périhélie, c'est-à-dire que le périhélie aura un mouvement direct; il sera rétrograde si la gravité est en raison inverse d'une puissance moindre que le carré de la distance. On peut voir dans le Traité des Fluxions de Mac-Laurin et dans le livre des Principes de Newton, un grand nombre de propositions curieuses sur le mouvement des apsides dans différentes hypotheses de gravité, et les calculs de M. de la Grange (*Mém. de Berlin*, 1782). Je me contenterai de faire voir comment on peut trouver le mouvement des apsides par les principes établis ci-devant.

3674. L'équation générale d'une orbite troublée sert à trouver le mouvement continuel des apsides aussi bien que les inégalités périodiques : en effet, dans une ellipse mobile, on a cette équation $\frac{1}{r} = 1 - e \cdot \cos. mu$ (3415); mais dans l'orbite troublée, au lieu de $e \cdot \cos. mu$, l'on a une suite de termes dépendans de Ω (3618). Examinons les plus considérables dans le cas des perturbations de Jupiter sur la Terre.

3675. L'on a vu ci-dessus (3645) que la force perturbatrice qui affecte la force centrale, c'est-à-dire Φ, contient les termes $\frac{r}{2f^3} + \frac{9r^3}{16f^5}$; donc le premier terme de Ω (3613), ou $\Phi\, rr = \frac{r^3}{2f^3} + \frac{9r^5}{16f^5}$; mais $\frac{1}{r} = 1 - e \cdot \cos. mu$ (3415); d'où l'on tire $r^3 = 1 + 3e \times \cos. mu$ (3421); donc $\frac{r^3}{2f^3}$, qui est le premier terme de Φrr ou de Ω, est égal à $\frac{1 + 3e . \cos. mu}{2f^3}$: nous négligerons le second terme divisé par $16f^5$, comme étant beaucoup plus petit que l'autre, et nous examinerons ce que vaut $\frac{3e}{2f^3} \cdot \cos. mu$; nous le prendrons en moins, parceque Ω est négatif; nous aurons pour l'équation de l'orbite trou-

blée (3616) $\frac{f^2}{Sr} = 1 - g \cdot \sin. u - h \cdot \cos. u + \frac{3e}{2f^3(mm-1)} \cdot \cos. u$ $- \frac{3e}{2f^3(mm-1)} \cdot \cos. mu$. Cette équation doit revenir au même que l'équation d'une ellipse mobile tirée de l'observation, $\frac{1}{r} = 1 - e \cdot$ cos. mu (3415), si l'on ne considere que le mouvement de l'apside et qu'on fasse abstraction de toutes les autres inégalités ; car alors l'équation de l'orbite troublée n'a d'autre effet que de rendre l'ellipse mobile ; donc $\frac{3e}{2f^3(mm-1)}$ est l'excentricité de l'orbite troublée, ou l'excentricité observée, la même que j'ai appellée e ; donc $\frac{-3e}{2f^3(mm-1)}$ $= e$; d'où l'on tire $mm = 1 - \frac{3}{2f^3}$, $m = 1 - \frac{3}{4f^3}$ (3423), $1 - m$ $= \frac{3}{4f^3}$: c'est le mouvement de l'aphélie de la Terre (3415), en supposant que le mouvement de la Terre est l'unité. Il faut donc multiplier $\frac{3}{4f^3}$ par 360°, pour avoir le mouvement de l'apside pendant que la Terre fait 360°, ou pendant une révolution entiere de la Terre, c'est-à-dire pour avoir son mouvement annuel ; il faut aussi le multiplier par la masse de Jupiter qui, étoit contenue dans la force Φ (3644). La valeur de $\frac{3}{4f^3}$ est 0,005331, puisque $f = 5{,}201$; multipliant donc par $\frac{1}{1067}$ et par 1296000″ pour le réduire en secondes, on trouve 6″47 pour le mouvement annuel de l'apogée du Soleil ou de l'aphélie de la Terre produit par l'attraction de Jupiter. On auroit 6″9 si l'on ne négligeoit pas le terme $\frac{45}{16f^5}$, qui est égal à 0,000739. Ce résultat differe peu de celui d'Euler, qui trouve 6″95 (*Piece de* 1756, T. VIII) : M. de la Grange trouve 6″,79 (*Mém. de Berlin* 1782) : il a calculé les mouvemens des aphélies de toutes les planetes, en faisant entrer beaucoup plus de termes dans le calcul (1324).

3676. Il y a deux autres causes qui peuvent produire un mouvement dans les apsides. La premiere a lieu pour la Lune et pour les satellites ; c'est la figure aplatie de la planete principale (2950). La seconde est la petite résistance qu'on pourroit supposer dans la matiere éthérée où les planetes se meuvent ; cette résistance, si elle avoit lieu, pourroit changer la grandeur, la figure et la situation des orbites, après un certain nombre de révolutions (d'Alembert, *Recherches*, etc., T. II, *pag.* 145) ; on peut consulter aussi les Recherches de M. l'abbé Bossut, qui remporta le prix de l'académie en 1762 sur cette matiere, et celles de M. Albert Euler (*Pieces des*

prix, T. VIII). L'examen des plus anciennes observations ne nous fait appercevoir dans les orbites aucun changement qui puisse indiquer la résistance de la matiere éthérée : le mouvement des apsides, qu'on y remarque, est produit par l'attraction mutuelle des planetes ; car on trouve que la résistance du fluide produiroit un mouvement de l'aphélie beaucoup moins sensible que le changement de durée dans la révolution : or celui-ci n'a pas lieu, comme on va le voir ; donc le mouvement observé dans les apsides ne vient pas de la résistance.

3677. LES RÉVOLUTIONS des planetes n'ont point éprouvé de changement dans leurs durées : je l'ai fait voir pour le Soleil et pour Mars (*Mém.* 1757 et 1782). On avoit cru appercevoir une accélération dans Jupiter (1169) et une dans la Lune (1483) : on auroit pu attribuer l'accélération de Jupiter à la résistance de la matiere éthérée; mais le retardement que l'on trouvoit dans Saturne indiquoit assez que l'un et l'autre devoient être un effet de leur attraction réciproque : c'étoit déja l'opinion de Cassini (*Mém.* 1746). Les géometres s'étoient occupés long-temps à rechercher, par les calculs de l'attraction, l'explication de ces équations séculaires sans pouvoir y parvenir, comme on peut le voir dans les pieces de M. Euler sur la Lune, prix de 1770, *pag.* 94, et 1772, *pag.* 15 ; et dans celle de M. de la Grange, de même que dans ses Mémoires, qui font partie de ceux de Berlin, 1776, 1781. M. de la Place lut un mémoire en 1785, pour établir la même chose pour les équations séculaires des autres planetes : il avoit vû que les attractions des planetes, en poussant l'approximation jusqu'aux troisiemes puissances, n'avoient aucun effet sur les moyens mouvemens (*Mém. présentés*, 1778). M. de la Grange a démontré rigoureusement que les grands axes des orbites ne sont point changés par les attractions mutuelles (*Mém de Berlin* 1782 et 1783).

3678. Mais en 1786, M. de la Place a reconnu qu'il existe dans les mouvemens de Saturne une inégalité de 46′ 49″, dont la période est d'environ 877 ans, et dépend de cinq fois le moyen mouvement de Saturne moins deux fois celui de Jupiter. Il a trouvé en même temps, dans le mouvement de Jupiter, une inégalité correspondante de 20′, d'un signe contraire, et dont la période est la même (*Journal des savans novemb.* 1786 ; *Mém. de l'acad.*, 1786).

3679. En 1787, M. de la Place a reconnu que le changement d'excentricité de la Terre (1277) produit, dans le mouvement de la Lune, une inégalité qui ressemble à une accélération (1487), mais qui ne sera qu'une inégalité d'une très longue période, puisque l'é-

quation du Soleil augmentera dans la suite (*Journal des Savans*, *février* 1788 ; *Mém.*, 1786.)

Dans le temps qu'on ne savoit à quoi attribuer l'accélération de la Lune, on avoit cherché à l'expliquer par la figure alongée de la Lune (3302), et par la durée du temps que l'attraction pourroit employer à se propager (M. de la Place, *Mém. présentés*, T. VII, *pag.* 182 ; M. Bailly, *Astronomie indienne*, pag. 147). Mais les explications que nous venons d'indiquer ne laissent plus de motif pour recourir à ces deux hypotheses ; et l'astronomie doit infiniment à M. de la Place, qui a trouvé enfin la véritable cause de ces phénomenes ainsi que les inégalités des satellites.

Il paroît qu'en général tout est périodique ; les planetes se mouvant toutes dans le même sens, dans des orbites presque circulaires, et peu inclinées les unes aux autres, il s'ensuit, par la théorie, que même les excentricités et les inclinaisons sont toujours renfermées dans des limites étroites, et qu'ainsi le systême du monde ne fait qu'osciller autour d'un état moyen dont il ne s'écarte jamais que d'une petite quantité (M. de la Place, *Mém. de l'acad.* 1787).

3680. Ainsi la résistance de la matiere éthérée n'est pas prouvée ; l'attraction explique tous les effets observés ; et l'on doit reconnoître que, si les corps célestes ne sont pas dans un vide absolu, ils sont au moins dans une matiere dont l'effet est insensible, et qui est pour nous comme le vide : cela seul suffiroit pour dissiper le systême des tourbillons et du plein que nous avons déja réfuté (3529).

DU MOUVEMENT DES NOEUDS DES PLANETES.

3681. Si toutes les planetes tournoient autour du Soleil dans un même plan, ce plan ne changeroit point par leur attraction réciproque, une planete ne pouvant faire sortir l'autre d'un plan où elles sont toutes deux ; mais ces orbites sont inclinées les unes sur les autres, et dans des situations fort différentes : chaque planete est tirée sans cesse hors du plan de son orbite par toutes les autres planetes, et change à tout instant d'orbite. Les astronomes, pour représenter méthodiquement ces inégalités, supposent qu'une planete est toujours dans le même plan ou sur la même orbite, mais que cette orbite change de situation : on peut, en effet, représenter tous les mouvemens d'une planete hors du plan de son orbite primitive en donnant à ce plan un changement d'inclinaison, avec un mouvement

dans ses nœuds, qui soit tel que le plan que l'on adopte suive la planete dans toutes ses inégalités.

Il est impossible qu'une planete attirée, dont l'orbite est dans un autre plan que celle de la planete perturbatrice, vienne jamais traverser le plan de celle-ci au même point où elle l'avoit traversé dans la révolution précédente : elle doit à chaque fois le traverser plutôt qu'elle n'eût fait, si la planete perturbatrice ne l'eût point attirée vers ce plan ; elle a sans cesse une détermination ou une force vers le plan où se trouve la planete qui l'attire, et elle ne peut obéir à cette force qu'en arrivant à ce plan un peu avant la fin de sa révolution.

3682. Par exemple soit DN (FIG. 299) l'écliptique; LABN l'orbite de la Lune, c'est-à-dire l'orbite dans laquelle la Lune étoit d'abord, en parcourant l'arc LA ; le Soleil étant placé dans le plan de l'écliptique DN, il est clair qu'en tout temps la force attractive du Soleil tend à rapprocher la Lune du plan de l'écliptique, ou de la ligne DN, dans laquelle se trouve le Soleil; ainsi lorsque la Lune tend à parcourir dans son orbite un second espace AB égal à l'espace LA qu'elle venoit de parcourir, la force du Soleil tend à la rapprocher de l'écliptique ND d'une quantité AE [a]: il faut nécessairement que la Lune, par un mouvement composé, décrive la diagonale AC du parallélogramme AECB, en sorte que son orbite devienne ACM, au lieu de LABN; c'est pourquoi le nœud N de cette orbite change continuellement de position, et va de N en M, dans un sens contraire au mouvement de la Lune, que je suppose dirigé de A vers N ; donc le mouvement du nœud d'une planete est toujours rétrograde par rapport à l'orbite DN de la planete qui produit ce mouvement.

3683. La même figure fait voir pourquoi l'attraction du Soleil change l'inclinaison de l'orbite lunaire (1491): la Lune, obligée de changer sa direction primitive LABN en une direction nouvelle ACM, rencontrera l'écliptique NMD au point M, sous un nouvel angle AMD, différent de l'inclinaison AND que la Lune affectoit auparavant; mais ce changement d'inclinaison étant insensible dans les autres planetes, je ne m'en occuperai point ici : d'ailleurs ce changement est périodique, et il ne s'accumule point; car si l'orbite troublée ACM fait en M un plus grand angle d'inclinaison que l'orbite primitive en N, il arrivera le contraire quand la planete aura passé le nœud N, en sorte que l'inclinaison se rétablira par les mêmes degrés. Il n'y a que les nœuds dont le mouvement est toujours du même sens, et qui rétro-

[a] C'est cette force perpendiculaire à l'orbite que la Caille appelle *force déturbatrice.*

gradent

gradent de plus en plus, soit que la Lune tende à son nœud, soit qu'elle s'en éloigne. Ainsi je parlerai seulement du mouvement des nœuds, dont l'usage revient souvent; il produit lui-même un changement dans les inclinaisons des orbites planétaires, mais c'est quand on les rapporte à l'écliptique (1378); cette variation est extrêmement sensible pour les satellites de Jupiter (2986).

Ce mouvement du nœud pour chaque instant est différent à raison de la distance de la planete troublante à ce même nœud ; il faut donc trouver d'abord une expression générale du mouvement du nœud dans un instant infiniment petit ; et cherchant ensuite son intégrale, on aura le mouvement pour une révolution entiere.

3684. *Trouver l'expression générale du mouvement des nœuds.* Soit TOE (fig. 298) l'orbite de la Terre pour laquelle on cherche le mouvement du nœud par rapport à l'orbite de Jupiter MP; S le Soleil, qui est au centre de ces orbites; M la planete qui cause ce mouvement, c'est-à-dire Jupiter; SN la ligne d'intersection des deux orbites, en sorte que le demi-cercle ☊TO soit relevé au-dessus du plan de la figure; T*p* le mouvement de la Terre sur son orbite dans un instant très court, tel que δt. On tirera une petite ligne *pq* parallele au rayon vecteur SM de Jupiter, pour exprimer la force avec laquelle Jupiter tend à éloigner la Terre T de son orbite, parallèlement à SM: la Terre étant retirée de *p* en *q*, par l'action de Jupiter, son vrai mouvement, au lieu d'être T*p*, se fait de T en *q*; la ligne T*q* exprime l'orbite composée que décrit la Terre dans ce moment-là, tandis que T*p* exprime l'orbite primitive qu'elle décriroit si l'action de Jupiter ne l'avoit pas retirée de *p* en *q*.

On prolongera la tangente T*p* de l'orbite, et elle ira rencontrer en un point N la ligne des nœuds SON, ou la commune section du plan de l'écliptique et de l'orbite de Jupiter; de même, si l'on prolonge la ligne T*q* du mouvement composé, elle ira rencontrer le plan de l'orbite de Jupiter en un autre point *n*, et S*n* sera la ligne des nœuds pour cette nouvelle orbite: ainsi l'angle NS*n* exprimera le mouvement du nœud, ou le changement que la commune section des deux plans éprouve par l'action de Jupiter; c'est la quantité que nous cherchons, et dont il faut trouver l'expression : nous appellerons δq ce petit angle NS*n*.

3685. Si l'on conçoit par le nœud N une ligne N*n* dans le plan de l'orbite de Jupiter, parallèlement à SM, elle sera aussi parallele à *pq*, et par conséquent dans le plan du triangle T*pq*; ainsi cette ligne N*n* appartient et à l'orbite de Jupiter, et aux plans des triangles T*pq*, TN*n*, et le point *n* de cette ligne est le nouveau lieu du nœud des

deux orbites. Les triangles Tpq, TNn, sont semblables, puisque Nn est parallele à pq; donc $Tp : TN :: pq : Nn$, et $Nn = \frac{TN}{Tp} pq$.

Si l'on appelle M la masse de Jupiter, celle du Soleil étant 1, f sa distance au Soleil, s sa distance à la Terre, c'est-à-dire MT, la force perturbatrice de Jupiter sur la Terre, dans la direction SM, ou dans la direction pq, qui lui est parallele, sera $M\left(\frac{f}{s^3} - \frac{1}{f^2}\right)$ (3597); c'est cette force que nous appellons F.

L'espace $pq = F\, d t^2$ (a), parceque les espaces parcourus sont comme les carrés des temps (3506); ainsi $Nn = \frac{TN}{Tp} \cdot F\, d t^2$. La perpendiculaire $Rn = Nn \cdot \sin.\, nNR$; mais l'angle nNR est égal à l'angle MS☊, distance de Jupiter au nœud, à cause du parallélisme des lignes SM, Nn; donc $Rn = Nn \cdot \sin.\, MS☊ = \frac{TN}{Tp} F\, d t^2 \cdot \sin.\, MS☊$.

3686. La valeur de l'angle NSn, qui est le mouvement du nœud, ou l'arc divisé par le rayon (3498), est $\frac{Rn}{Sn} = \frac{TN}{Tp \times NS} F\, d t^2 \times \sin.$ MS☊; mais $NS : TN :: R : \sin.\, TSN$, en supposant l'orbite circulaire, ou l'angle T de 90°; donc $\frac{TN}{NS} = \sin.\, TSN$ ou TS☊; donc l'angle $NSn = d q = \frac{F\, d t^2}{Tp} \sin.$ MS☊ $\cdot \sin.$ TS☊; c'est l'expression du mouvement du nœud.

Si l'on suppose que le mouvement moyen de Jupiter soit à celui de la Terre comme p est à 1, p étant, par exemple, $\frac{1}{12}$, quand la Terre aura décrit un angle u, Jupiter aura parcouru un arc égal à pu (ou $\frac{1}{12} u$), en partant du même point; et la différence de leurs longitudes, ou l'angle de commutation MST, sera $u - pu$, ou $(1-p)u$; si la longitude du nœud est q, la distance MS☊ sera $pu - q$, et la distance TS☊, qui est la somme de MST et MS☊, sera $u - q$. On substituera ces deux expressions dans la formule qui renferme la valeur de $d q$.

3687. A la place de l'élément du temps $d t$, qui est supposé constant, parceque le temps est uniforme, on peut mettre le mouvement Tp, que j'appellerai $d u$, qui est également uniforme et proportionel au temps, dans une orbite circulaire; alors on aura $\frac{F\, d t^2}{Tp} = \frac{F\, d t^2}{d u} = F\, d u$: on substituera cette valeur dans l'expression du mouvement du nœud, on mettra aussi à la place de F sa valeur $M\left(\frac{f}{s^3} - \frac{1}{f^2}\right)$ (3685), et l'on aura le mouvement du nœud, $d q = M\, d u \left(\frac{f}{s^3} - \frac{1}{f^2}\right) \sin.\, (pu$

(a) t exprime ici le temps, mais ensuite il exprimera l'angle de commutation (3688).

$-q)$ sin. $(u-q)$, dont il sera aisé de trouver l'intégrale, quand on aura les valeurs de f et s exprimées en sinus de l'angle u, ou de ses multiples.

3688. Nommant t l'angle de commutation MST, on a la valeur de $\frac{1}{MT^3}$ ou $\frac{1}{s^3}$, exprimée par une série de cette forme : $A+B\cdot\cos.\ t+C\cdot\cos.\ 2t+D\cdot\cos.\ 3t$, etc. (3644, 3660), dont les coëfficiens A, B, C, sont supposés connus ; ainsi l'on aura $\delta q = M\delta u\,(fA-\frac{1}{f^2}+Bf\cdot\cos.\ t+Cf\cdot\cos.\ 2t$, etc.) sin. $(pu-q)$ sin. $(u-q)$: si l'on fait la multiplication de sin. $(pu-q)$ par sin. $(u-q)$, le second terme étant le plus grand, l'on aura (3814) $\frac{1}{2}$ cos. $(1-p)\ u-\frac{1}{2}$ cosin. $(u+pu-2q)$, qu'il faut encore multiplier par $M\delta u\,(fA-\frac{1}{f^2}+Bf\cos.\ t$, etc.). En mettant $(1-p)u$ à la place de l'angle t, on aura dans le produit un grand nombre de termes parmi lesquels on aura le produit de $\frac{1}{2}$ cos. $(1-p)\ u$ par $Bf\cdot\cos.\ t$, ou par Bf cos. $(1-p)\ u$; ce produit est $Bf\,[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos.\ (2-2p)\ u]$ (3820) : le terme $\frac{1}{4}$ ne renferme aucun sinus, et par conséquent aucune quantité dont le retour soit périodique ; il exprime donc une quantité qui ira toujours en croissant, et qui donnera $\delta q = MBf\delta u\cdot\frac{1}{4}$, pour l'élément ou la différentielle du mouvement du nœud, en négligeant tous les termes où il y a des sinus ; l'intégrale est $\frac{MBfu}{4}$; c'est donc le mouvement du nœud de la Terre sur l'orbite de Jupiter, pendant le temps que la Terre décrira un angle u. Si à la place de u nous mettons 360°, nous aurons le mouvement du nœud pour une révolution entiere de la Terre, ou le mouvement annuel, $MBf\cdot 90°$.

3689. **Exemple.** Soit M la masse de Jupiter $=\frac{1}{1067}$, celle du Soleil étant 1, $f=5{,}2$ (1222), la valeur du terme $B=\frac{3r}{f^4}+\frac{45r^3}{8f^6}$ (3644) $=0{,}004384$; $90°=324000''$; ainsi $MBf\,90°=6''92$; M. de la Grange suppose $6''98$. J'ai fait usage de cette quantité pour avoir le changement de latitude des étoiles (2758). De semblables calculs, appliqués à toutes les planetes, m'ont fait trouver le mouvement des nœuds de chacune par l'action de toutes les autres (*Mém. acad.* 1758), et j'en ai donné les résultats avec différentes remarques sur cette théorie (1348). Il est sur-tout nécessaire de réduire à l'écliptique le mouvement qui a lieu sur chaque orbite.

3690. Le mouvement des nœuds de la Lune, qui, suivant les observations, est de 1° 26′ 48″ pour chaque révolution de la Lune (1490), se trouve, par la formule précédente, à un vingtieme près ; je vais en donner le calcul, en négligeant non seulement la parallaxe du Soleil,

mais encore l'excentricité de l'orbite lunaire, celle du Soleil, et toutes les inégalités de la Lune. On peut voir dans les auteurs cités (1478), qu'en négligeant moins de choses, on trouve ce mouvement bien mieux d'accord avec l'observation.

3691. La force M $\left(\frac{f}{s^3}-\frac{1}{f^3}\right)$ (3685) se réduit à $\frac{3\,M \times \cos. t}{f^3}$ (3625); donc on a (3687), $\partial q = \frac{3\,M}{f^3} \partial u \cdot \cos. (1-p) u \cdot \sin. (pu-q) \sin. (u-q)$; en faisant la multiplication de ces trois facteurs, on trouvera un terme qui sera cos. $(u-pu)$ multiplié par lui-même, égal à $\frac{1}{4}$; tous les autres renfermant des cosinus; ce terme constant donnera donc cette équation; $\partial q = \frac{3\,M}{4 f^3} \partial u$, dont l'intégrale $q = \frac{3\,Mu}{4 f^3}$ est le mouvement du nœud pendant une révolution entiere de la Lune. On mettra à la place de u les 360°, ou 1296000″; au lieu de $\frac{M}{f^3}$, sa valeur qui revient à celle de t^2 (3561); à son logarithme 7,74782, on ajoutera celui de $\frac{3}{4}$ et celui de 360°: on aura le logarithme de 1° 30′ 38″, mouvement du nœud de la Lune en $27^j\ 7^h\ 43'\ 11''\frac{1}{2}$ (1421). L'observation donne 1° 26′ 52″ à raison d'une révolution en $6793^j\ 7^h\ 13'\ 17''7$ (1481). Cet exemple suffit pour faire comprendre l'esprit de la méthode, et l'on voit assez que, pour connoître le vrai résultat de la théorie, il faudroit employer plus de termes.

De la Précession des équinoxes.

3692. La précession des équinoxes (915) est un phénomene dont on ne soupçonnoit pas même la cause avant Newton; Copernic et Cisalpin l'avoient bien attribué à un mouvement de la Terre (*Alm. nov.*, II, 295); mais on n'y avoit pas même fait attention. Actuellement, il est bien reconnu que c'est un effet des attractions qu'exercent le Soleil et la Lune sur le sphéroïde terrestre; mais c'est une des parties les plus difficiles du calcul des attractions célestes. Newton y avoit fait une méprise; d'Alembert, Euler, Simpson, d'Arcy, M. de Silvabelle, Walmesley, Frisi (*De Gravitate*, 1768), M. Vince, dans les Transactions de 1787, se sont exercés sur cette matiere; mais ils ne sont pas tous d'accord; d'ailleurs aucun auteur n'en a parlé d'une maniere assez élémentaire, en sorte que je crois faire une chose utile en expliquant ici, avec tout le détail et toute la clarté possibles, les principes et le calcul de cette grande question. La premiere solution de ce beau problême fut celle de Newton (*Princip. math.*, L. III); mais elle n'étoit ni assez générale ni assez bien démontrée: d'Alembert est le premier qui ait réduit ce problême en équations, et qui l'ait

résolu d'une maniere générale et complete, dans ses *Recherches sur la Précession des équinoxes* en 1749; il fut suivi par Euler, dans les *Mémoires de Berlin* pour 1749: et tous deux trouverent un résultat différent de celui de Newton (3728). Pour moi je suivrai principalement la méthode de Simpson (*Miscellaneous tracts*, 1757); mais je tâcherai de la simplifier, et d'en démontrer toutes les parties d'une maniere encore plus satisfaisante et plus détaillée que n'avoit fait l'auteur lui-même.

3693. La théorie du mouvement des nœuds fait voir qu'une planete qui tourne dans le plan de son orbite en est sans cesse retirée par les autres planetes (3682): il en est de même des parties du sphéroïde terrestre qui, étant relevées vers l'équateur, et tournant chaque jour avec lui, sont détournées de leur mouvement naturel par les attractions latérales du Soleil et de la Lune, comme si la portion de matiere (ou cette espece de ménisque) dont on peut concevoir que le globe est surmonté, étoit composée d'un grand nombre de planetes qui tournassent en vingt-quatre heures autour de la Terre. Nous commencerons par chercher l'action du Soleil et son influence sur la précession des équinoxes, parceque le calcul en est plus simple que pour la Lune.

3694. Le premier pas qu'il faut faire dans cette théorie est de trouver la force avec laquelle le Soleil attire chaque point ou chaque particule de la Terre. Soit S le Soleil (FIG. 300), PADp un méridien terrestre, PCp l'axe de la Terre, DC une ligne perpendiculaire à la ligne des centres SC, c'est-à-dire à la ligne qui va du Soleil à la Terre; la force avec laquelle chaque point A du méridien est attiré par le Soleil dans la direction AS ne peut faire balancer l'axe PCp de la Terre, et déplacer l'équateur que dans le cas où le point A sera attiré plus que le centre C de la Terre; car si l'un et l'autre étoient attirés avec la même force vers le Soleil, il n'en résulteroit aucun changement dans leur position respective (3588): il faut donc chercher l'expression de la force qui agit sur le point A, trouver ce qui en résulte dans la direction CS, et en retrancher la force du Soleil sur le centre même de la Terre, dans la même direction, le reste sera la force perturbatrice (3597) par laquelle le point A, étant plus attiré que le point C ou le point K, tend à s'éloigner de la ligne CKD perpendiculaire au rayon solaire CS.

3695. La force du Soleil sur le point A est $\frac{M}{SA^2}$ (3532), en appellant M la masse du Soleil; cette force se décompose, et équivaut à deux autres qui agiroient suivant AB et AC; et comme la force AC, diri-

gée vers le centre de la Terre, ne produit aucune perturbation, il ne reste que la force suivant AB ou suivant CS, qui lui est parallele; cette force est $\frac{M \cdot CS}{SA^3}$ (3594); il faut ôter la force du Soleil sur le centre de la Terre, qui est $\frac{M}{CS^2}$, et l'on aura la force perturbatrice $M\left(\frac{CS}{SA^3}-\frac{1}{CS^2}\right)$ dans la direction de la ligne des centres CS.

3696. Pour simplifier cette expression, on considérera que $\frac{1}{SA^3}=(CS-AK)^{-3}$, et $\frac{M \cdot CS}{SA^3}=\frac{M}{CS^2}+\frac{3AK \cdot M}{CS^3}$ (3625); donc la force perturbatrice $M\left(\frac{CS}{SA^3}-\frac{1}{CS^2}\right)$ se réduit à $\frac{3M \cdot AK}{CS^3}$.

3697. Au lieu de la masse du Soleil M qui entre dans cette expression $\frac{3M \cdot AK}{CS^3}$, il faut y introduire la force centrifuge que nous éprouvons sur la Terre vers l'équateur, et qui est $\frac{1}{289}$ de la gravité des corps terrestres (3543). Si l'on appelle a le rayon de l'équateur, t le temps de la rotation diurne de la Terre, T la durée de la révolution annuelle et r la distance CS; on aura $M=\frac{r^3 \beta \cdot tt}{a^3 T^2}$ (3572); et par conséquent si l'on fait $a=1$, la force perturbatrice du Soleil sur une particule A de la Terre $\frac{3M \cdot AK}{CS^3}$ ou $\frac{3M \cdot AK}{r^3}$, exprimée en parties de la force centrifuge terrestre, sera $\frac{3\beta tt}{T^2} \cdot AK$.

3698. Ainsi cette force est proportionelle à AK, ou à la distance de chaque particule à la ligne CD ou au plan CKD du cercle d'illumination perpendiculaire au rayon SC. Nous rappellerons cette propriété quand il s'agira des marées (3770). Lorsque AK devient égal à l'unité, c'est-à-dire au rayon de l'équateur, l'on a $\frac{3\beta tt}{T^2}$ pour la force perturbatrice sous l'équateur; c'est ce que nous appellerons γ dans les articles suivans. Cette force du Soleil, exprimée en nombres, est $3 \cdot \frac{1}{(365)^2} \cdot \frac{1}{289}=\frac{1}{12852000}$ de la gravité totale des corps terrestres dont nous avons parlé (3501): c'est la force par laquelle le Soleil tend à détacher de la Terre, dans la direction CS, une particule située sous l'équateur.

3699. La force du Soleil sur un point de la Terre étant connue, il faut trouver la force totale qui en résulte pour faire incliner l'ellipse entiere du méridien: nous en conclurons celle d'une autre ellipse dans une section quelconque, et enfin la force sur le sphéroïde entier. Supposons donc une ellipse telle que FCN (FIG. 301): considérons une ordonnée EC au diametre OF, et nous chercherons la

somme des forces qui s'exercent sur cette ligne entiere ; la force étant proportionelle à la distance de chaque particule au diametre MON, on aura cette proportion ; a est à γ comme OD est à la force cherchée, qui sera $\frac{\gamma}{a}$ OD dans tous les points de la ligne BC.

3700. Cette force ou cette tendance de chaque partie de la Terre vers le Soleil exige encore une considération essentielle sur la position de chaque point V; c'est celle du bras de levier DV, auquel cette force est appliquée. Si la force $\frac{\gamma}{a}$OD, qui agit sur la particule V, étoit appliquée en D, ou si, au lieu du point V, on considéroit le point D, on n'auroit aucun mouvement dans l'ellipse; la particule D tend à se détacher du centre O suivant OD, mais non pas à faire tourner l'ellipse autour du centre : cette force n'agit pas plus pour faire tourner l'ellipse, que si elle étoit appliquée au centre O; car, suivant les élémens de la mécanique, on peut considérer une même force dans tous les points de sa direction, c'est-à-dire en O, en D et en T. Au contraire, il est évident que la même force appliquée en C y produira plus d'effet pour faire tourner l'ellipse, que dans tout autre point de la ligne DC; cependant l'expression $\frac{\gamma}{a}$OD est égale pour tous les points de la ligne BDC, parcequ'elle indique seulement la quantité dont chaque point de la ligne BDC tend à s'éloigner de la ligne MON : il faut donc multiplier la tendance que chaque partie de matiere V a pour s'éloigner de la ligne MN, par sa distance DV à la ligne des centres OT, pour avoir son énergie, ou l'effet qu'elle doit produire pour faire tourner la Terre autour de O. Si l'on ne sait pas d'abord quel produit donnera une force multipliée par une ligne, on verra qu'il suffit d'avoir la somme de toutes ces forces de rotation ainsi exprimées : on les comparera à celles d'un autre corps dont le mouvement sera connu, en exprimant de la même maniere les forces de celui-ci (3719); l'on en conclura leur rapport, et par conséquent le mouvement de l'équateur terrestre : ce n'est ici qu'un terme de comparaison. Quand je multiplie la force du point V par DV, et la force du point C, qui est la même, par DC, cela veut dire que les produits, qui sont les nouvelles forces, deviennent entre eux comme DV est à DC.

3701. L'on a donc la quantité $\frac{\gamma}{a}\mathrm{OD}\cdot\mathrm{DV}$ pour l'efficacité ou l'énergie de la force par laquelle chaque particule V tend à faire tourner l'ellipse ; et si l'on fait $\mathrm{DV}=z$ et la particule ou l'élément $\mathrm{V}=\partial z$, on aura $\frac{\gamma}{a}z\partial z\cdot\mathrm{OD}$, dont l'intégrale $\frac{\gamma}{2a}z^2\cdot\mathrm{OD}$ est la force de la ligne DV; ainsi $\frac{\gamma}{2a}\mathrm{DC}^2\cdot\mathrm{OD}$ sera la force de la ligne totale DC.

3702. Par la même raison, l'effort de toutes les particules de la ligne BD pour faire tourner l'ellipse sera $\frac{\gamma}{2a}\cdot OD\cdot BD^2$. Comme les parties de BD agissent pour faire touner la Terre du côté opposé, il faudra prendre la différence des deux efforts, et l'on aura $\frac{\gamma}{a}\cdot\frac{1}{2}OD\cdot(BD^2 - CD^2) = \frac{\gamma}{a}\cdot\frac{1}{2}OD(BD+CD)\cdot(BD-CD) = \frac{\gamma}{a}OD\times BC\cdot DE$, parceque $BD - CD = 2DE$; c'est la force qui résulte de toutes les attractions sur l'ordonnée BC, pour faire tourner l'ellipse sur son centre.

OF	$= c$
OM	$= p$
FH	$= f$
OH	$= g$
OD	$= y$
OE	$= x$

3703. Pour en conclure la force de l'ellipse toute entiere, il faut l'exprimer algébriquement par le moyen des diametres de l'ellipse : on a (3388) $CE^2 = BE^2 = \frac{pp}{cc}\times(cc - xx)$; il faut aussi employer la perpendiculaire FG et le segment OH qui dépendent de la déclinaison du Soleil; or, à cause des triangles semblables OFH, ODE, on a ces deux proportions :

$$\left.\begin{matrix} OF : FH :: OE : OD \\ c : f :: x : y \end{matrix}\right\} \text{et} \left\{\begin{matrix} OF : OH :: OE : ED \\ c : g :: x : ED; \end{matrix}\right.$$

ainsi $OD = y = \frac{fx}{c}$ et $ED = \frac{gx}{c}$: au moyen de ces valeurs, la force $\frac{\gamma}{a}OD\cdot BC\cdot ED$ de l'ordonnée entiere BC sera $= \frac{\gamma}{a}\cdot\frac{fx}{c}\cdot\frac{2p}{c}\sqrt{\left(cc - xx\right)}\cdot\frac{gx}{c}$.

On concevra une autre ordonnée infiniment proche, dont la distance mesurée sur OD soit appellée ∂y; multipliant par ∂y la force sur l'ordonnée BC, l'on aura la force sur le petit rectangle, qui est l'élément de l'ellipse, et l'intégrale donnera la force sur l'ellipse entiere. Au lieu de ∂y, on peut mettre $\frac{f\partial x}{c}$, et l'on aura la force sur l'élément, $\frac{\gamma}{a}\frac{ffgxx\cdot 2p}{c^4}\sqrt{cc - xx}\cdot\partial x$, ou $\frac{\gamma fg}{ac^2}\cdot\frac{2pf}{c^2}\sqrt{cc - xx}\times xx\partial x$, dont il faut prendre l'intégrale.

3704. On considérera que l'élément de la surface de l'ellipse est égal à $\frac{2p}{c}\cdot\sqrt{cc - xx}\cdot\frac{f\partial x}{c}$, c'est-à-dire l'ordonnée entiere $\frac{2p}{c}\times\sqrt{cc - xx}$, multipliée par la petite distance d'une ordonnée à l'autre qui est ∂y, ou $\frac{f\partial x}{c}$. Si l'on appelle A l'intégrale de cet élément $\frac{2pf}{cc}\sqrt{cc - xx}\cdot\partial x$, ou la surface de la demi-ellipse entiere, on aura l'intégrale de l'autre élément (qui contient xx de plus), ou

∫

$\int \frac{2pf}{cc} \sqrt{cc - xx} \cdot xx \, \partial x$ égal à $A \cdot \frac{c^2}{4}$, lorsque $x = c$ (3471); ce sera la force sur l'ellipse entiere, si A exprime toute l'ellipse. Ainsi l'intégrale ou la force de l'ellipse entiere sera $\frac{\gamma fg}{acc} \cdot A \frac{cc}{4} = \frac{\gamma}{a} \cdot \frac{fg A}{4} = \frac{\gamma}{a} \cdot \frac{1}{4} FH \cdot OH \cdot A$; mais $OH \cdot FH = mn(aa - bb)$, en appellant m et n le sinus et le cosinus de l'angle AOH (3409); donc la force ou l'énergie cherchée est $\frac{\gamma}{a} \cdot \frac{1}{4} mn \cdot (aa - bb) A$ sur l'ellipse toute entiere; c'est la force avec laquelle cette ellipse, par exemple, un méridien de la Terre, tend à faire tourner la Terre du nord au sud ou du sud au nord.

3705. Puisque AOG est le grand axe de l'ellipse ou le diametre de l'équateur terrestre, et qu'on suppose le Soleil agir sur la ligne ODT, il s'ensuit que l'angle AOT est égal à la déclinaison du Soleil; mais le sinus de l'angle $AOH = m$ et son cosinus $= n$ (3409, 3704); donc mn est le produit du sinus et du cosinus de la déclinaison du Soleil.

3706. Ce que nous venons de démontrer pour l'ellipse FMGA, qui forme le méridien ou la section du sphéroïde terrestre par son axe, se démontreroit également pour toute autre section de la Terre parallele au méridien; car toutes ces sections sont des ellipses semblables au méridien (3417). Ainsi l'on connoît la force du Soleil sur une ellipse qui fait portion d'un sphéroïde. On peut imaginer une autre ellipse, ou une autre section du sphéroïde infiniment proche de la premiere et qui lui soit parallele; la distance réciproque étant ∂u; la force de toute l'ellipse multipliée par ∂u donnera la force de toute la tranche solide qui est l'élément du sphéroïde; en intégrant, l'on aura la force du sphéroïde tout entier, ou l'énergie totale de la force dont la Terre est agitée par l'attraction du Soleil sur toutes les molécules de la Terre. Supposons donc que le sphéroïde terrestre est coupé parallèlement à l'axe PO (FIG. 304), ou au méridien dans lequel se trouve le Soleil, et qu'il faut supposer comme une demi-ellipse semblable à PQO, mais relevée sur la figure au-dessus de PO; cette section est faite à une distance $CM = u$ du centre de la Terre par un plan dont LMN est le profil : la section sera une ellipse (3417); le demi-grand axe est perpendiculaire au petit axe LN, ou relevé perpendiculairement sur M; il sera $= \sqrt{aa - uu}$, puisque c'est une ordonnée de l'équateur dont le rayon est a, prise à la distance u du centre. Si l'on nomme A la surface de l'ellipse du méridien EPQO, l'on aura $aa : aa - uu :: A : \frac{aa - uu}{aa}$, surface de

la petite ellipse : pour avoir la force de toutes les parties de cette ellipse, il faudra mettre, dans l'expression de la force totale (3704), cette surface de la petite ellipse à la place de A.

3707. Il faut par la même raison mettre la différence des carrés des demi-axes de cette petite ellipse, au lieu de la différence $aa - bb$, qui avoit lieu dans la grande ellipse : on trouve la différence des carrés pour la petite ellipse en considérant que cette différence est proportionelle à la surface de l'ellipse; car, dans deux ellipses semblables, les demi-axes ont le même rapport. L'excentricité étant $\sqrt{aa - bb}$, la surface de l'ellipse, qui est comme le carré de cette excentricité, est comme $aa - bb$, c'est-à-dire comme la différence des carrés des demi-axes; ainsi $A : A \cdot \frac{aa - uu}{aa} :: aa - bb : \frac{aa - bb}{aa} \times (aa - uu)$, différence des carrés des demi-axes qu'il faut mettre à la place de $aa - bb$, de même que $A \cdot \frac{aa - uu}{aa}$, au lieu de A dans l'expression $\frac{\gamma}{a} \cdot \frac{1}{4} mn(aa - bb) \cdot A$ (3704), et l'on aura $\frac{\gamma}{a} \cdot \frac{mn}{4} \left(\frac{aa - bb}{aa}\right) \cdot \frac{(aa - uu)^2}{aa} A$, pour l'énergie de la petite ellipse; il faut la multiplier par ∂u, ce qui donnera $A \cdot \frac{\gamma}{a^5} \cdot \frac{mn}{4}(aa - bb) \cdot (a^4 \partial u - 2a^2u^2 \partial u + u^4 \partial u)$: intégrant chaque terme (3438), on aura $\frac{A\gamma}{a^5} \cdot \frac{mn}{4}(aa - bb) \cdot \left(a^4 u - \frac{2}{3}a^2 u^3 + \frac{u^5}{5}\right)$.

3708. Lorsque $u = a$, c'est-à-dire au rayon entier CQ de l'équateur, la quantité précédente est égale à l'efficacité de toutes les particules qui composent le demi-sphéroïde; et celle du sphéroïde entier, qui en est le double, devient $\frac{A\gamma}{a^5} \cdot \frac{mn}{4}(aa - bb) \cdot 2\left(a^5 - \frac{2}{3}a^5 + \frac{a^5}{5}\right) = \frac{4}{15} A\gamma mn(aa - bb)$; mais $\frac{4aA}{3}$ est la solidité entiere du sphéroïde (3477) que nous appellerons S; donc mettant $\frac{3S}{4a}$ à la place de A, la force deviendra $\frac{\gamma}{5}(aa - bb)\frac{mn}{a}S$, et mettant pour γ sa valeur $\frac{3\beta tt}{T^2}$ (3698), l'on aura enfin $\frac{3\beta tt}{5T^2}(aa - bb)\frac{mn}{a}S$; expression de la force totale du Soleil pour faire tourner le sphéroïde terrestre dans le plan du méridien du nord au sud. Il s'agit d'en conclure le changement de l'axe, ou l'angle que l'axe doit parcourir en vertu de cette force : c'est ici où commence la principale difficulté du problême, et l'elgance particuliere de la méthode que j'explique, où ce problême est réduit à la plus simple dynamique. Nous verrons que cette force totale, divisée par $\frac{2}{5}a\beta S$, donne le mouvement de l'axe ou du plan de l'équateur.

3709. Nous connoissons la force du Soleil sur le sphéroïde terrestre (3708), et cette force doit produire à l'extrémité de l'axe de rotation, ou à la surface de l'équateur, un déplacement que nous appellerons *r*, en supposant la vîtesse du mouvement donné égale à l'unité, en sorte que le plan de l'équateur de la Terre doit s'incliner vers le Soleil en tournant autour d'un de ses diametres, en même temps qu'il tourne par la rotation diurne autour de l'axe du monde qui est perpendiculaire à son plan. Cherchons donc en général quelle force il faudroit appliquer perpendiculairement à chaque point de l'équateur pour entretenir ce petit mouvement *r* du plan de l'équateur, en même temps que chaque particule, contenue dans ce plan, continueroit son mouvement de rotation. Quand nous aurons trouvé la force totale qui seroit nécessaire pour produire un mouvement *r*, nous aurons, par une simple regle de trois (3721), le mouvement que produit la force donnée du Soleil dans un instant infiniment petit. Ainsi nous avons considéré d'abord la force du Soleil telle qu'elle s'exerce sur chaque particule du sphéroïde, et nous avons trouvé la force totale exercée sur le sphéroïde entier : nous allons chercher le rapport entre un mouvement *r* et la force totale sur un sphéroïde, nécessaire pour le produire ; et nous aurons le mouvement. Il faut commencer par le cas le plus simple, en ne prenant d'abord que le seul cercle de l'équateur, et une seule particule de matiere qui tourneroit librement dans la circonférence de ce cercle comme tourne la Terre, en même temps que le plan de l'équateur sur lequel il se meut auroit un mouvement *r*; et nommant β la force centrifuge, nous trouverons qu'il faut à cette particule de matiere une force égale à $2r\beta$ multipliée par la distance au point où le mouvement est le plus fort.

3710. PROBLÊME. Soit un corpuscule R de matiere (FIG. 302) qui tourne librement et uniformément sur la circonférence ARFB de l'équateur terrestre, d'occident en orient, tandis que le plan de l'équateur tourne lui-même du nord au sud autour du diametre AB par un mouvement infiniment plus lent, dont la vîtesse soit *r* au point F où elle est la plus grande, *r* étant une fraction du mouvement diurne ; on demande la force dont le corpuscule R a besoin, dans chaque point de l'arc AF perpendiculairement au plan de l'équateur, pour pouvoir demeurer toujours dans ce plan qui tourne sur le diametre AB ; ou, ce qui revient au même, on suppose qu'un corps R, qui tournoit avec l'équateur, devienne libre au point R, et l'on cherche la force qu'il faut lui imprimer pour qu'il reste dans le plan de l'équateur.

SOLUTION. Soit ARFB la situation de l'équateur au moment où le corpuscule est en R ; ANHZB la situation de l'équateur au second instant, lorsque le corpuscule R aura parcouru l'arc RE de l'équateur ou la partie RM de la tangente qui ne differe pas de RE (3456). Ce corpuscule a reçu en R, par le mouvement du plan, une impression perpendiculaire au plan ARFB, capable de lui faire parcourir RN qui exprime la vîtesse du plan en R, tandis qu'il a son mouvement dans l'équateur exprimé par RM ; ainsi il doit parcourir la diagonale du parallélogramme RNVM, et arriver en V à la fin du second instant, en sorte que MV seroit égale et parallele à RN, en ne considérant que ces deux impressions RN et RM. Mais la distance des deux cercles ARF, ANH est plus grande vis-à-vis du point M que vis à-vis du point R ; ainsi le point V n'est pas dans le plan du cercle ANHB, qui représente la situation de l'équateur dans le second instant ; il s'en faut d'une quantité VC : il faut donc que le corpuscule reçoive une seconde force capable de lui faire parcourir VC, pour qu'il puisse accompagner le plan de l'équateur malgré son mouvement ; c'est cette force que nous cherchons. Quoique le point C ne soit pas sur la circonférence même du cercle ANH, mais hors du cercle de la quantité CH, nous négligerons cette différence, et nous ne ferons point attention à la force qui seroit nécessaire pour le ramener en H. Si nous négligeons cette quantité CH, ce n'est pas (comme on pourroit le conclure des termes de Simpson) que cette force n'intéresse pas notre problême, mais c'est parcequ'elle est infiniment plus petite que la force VC dont nous cherchons la valeur : cette quantité CH n'est que l'écart de la tangente pour un petit arc égal à MC que l'on conçoit de E en H, qui est supposé infiniment plus petit que RM ou NV; donc CH est un infiniment petit du troisieme ordre, tandis que la force CV que nous cherchons est un infiniment petit du second ordre [a].

3711. Concevons les triangles plans DRN, GMC, perpendiculaires à la commune section ADOB, NR perpendiculaire à DR, et MC perpendiculaire à GM, rencontrant en C le plan du cercle ANHB, ou la ligne GH prolongée en C ; si nous tirons NV parallele à la tangente RM, elle rencontrera MC en V. La force que nous cherchons est exprimée par cette portion CV de la perpendiculaire MVC sur le plan du cercle ARF : cette force varie continuellement, parceque

[a] Cela me paroît suffisant pour répondre à une des objections du chevalier d'Arcy contre la solution de Simpson (*Mém.* 1759). M. d'Alembert a fait aussi diverses objections contre la solution de Simpson, dans ses *Opuscules*, T. V, *p.* 282, T. VI, *p.* 335.

la vîtesse RN du plan de l'équateur est différente à chaque point; la force VC est la plus grande quand le corps est en A; car lorsqu'il décrit AX, il n'a reçu en A aucune vîtesse du plan, et il a besoin de toute la force exprimée par XY pour pouvoir rester dans l'équateur, tandis qu'en décrivant RE, il n'a besoin que de la différence des forces, qui vient de ce que l'écartement des cercles est plus grand en E qu'en R. On néglige encore ici la différence entre la vîtesse AX et la vîtesse AY, parceque XY n'étant qu'un infiniment petit du troisieme ordre, la différence entre AX et AY n'est qu'un infiniment petit du quatrieme.

3712. Pour trouver une force capable de retenir continuellement le corps dans le plan du cercle mobile AR, il faut trouver la force capable de lui faire parcourir CV dans le même temps : il faut donc que cette force soit à la force centrifuge, comme CV est à ET que feroit parcourir la force centrifuge; car les espaces décrits dans un même temps sont comme les forces accélératrices en vertu desquelles ils sont décrits (3505).

3713. La vîtesse du mouvement diurne RM étant prise pour unité, nous avons appellé r le mouvement angulaire de l'axe ou du plan de l'équateur; ainsi r est une fraction du mouvement diurne; $r \cdot \mathrm{RM}$ sera la vîtesse ZF du plan de l'équateur en F, c'est-à-dire la vîtesse d'un point F; et $r \cdot \mathrm{RM}\,\frac{\mathrm{DR}}{\mathrm{OF}}$ sera la vîtesse RN du point R, puisque $\mathrm{ZF} : \mathrm{RN} :: \sin.\ \mathrm{AF} : \sin.\ \mathrm{AR} :: \mathrm{OF} : \mathrm{DR}$ (3877).

Ayant la vîtesse RN, nous allons en conclure MC, par la seule considération des triangles semblables DRN, GMC, et nous en ôterons MV pour avoir VC. Ces triangles donnent la proportion $\mathrm{DR} : \mathrm{RN} :: \mathrm{GM} : \mathrm{MC}$ ou $\mathrm{DR} : r \cdot \frac{\mathrm{RM \cdot DR}}{\mathrm{OF}} :: \mathrm{DR} + \mathrm{SM} : \mathrm{MC}$; donc $\mathrm{MC} = r \times \frac{\mathrm{RM \cdot DR}}{\mathrm{OF}} + r \cdot \frac{\mathrm{RM \cdot SM}}{\mathrm{OF}}$: nous en retrancherons $\mathrm{MV} = \mathrm{RN} = r \times \frac{\mathrm{RM \cdot DR}}{\mathrm{OF}}$, et il restera $\mathrm{CV} = r \cdot \frac{\mathrm{RM \cdot SM}}{\mathrm{OF}}$. La force centrifuge du corps qui se meut dans la circonférence ARF est égale à $\frac{\mathrm{RM}^2}{2\mathrm{OF}}$ (3538); donc CV est à l'effet de la force centrifuge comme $r \cdot \frac{\mathrm{RM \cdot SM}}{\mathrm{OF}} : \frac{\mathrm{RM}^2}{2\mathrm{OF}}$, ou $:: 2r \cdot \mathrm{SM} : \mathrm{RM}$; mais $\mathrm{OD} : \mathrm{OA} :: \mathrm{SM} : \mathrm{RM}$ (3446); donc CV est à l'effet de la force centrifuge $:: 2r \cdot \mathrm{OD} : \mathrm{OA}$. Ainsi pour que le corps A demeure constamment dans le plan de l'équateur quand l'équateur tournera autour du diametre AB, il faut qu'il y ait une force perpendiculaire au plan de l'équateur, qui varie comme la distance au plan dans lequel se fait le mouvement de l'axe, c'est-à-dire au

plan qui passe par OF perpendiculairement à la figure et au cercle AFB ou si l'on veut une force qui varie comme le sinus de la distance RF ou le cosinus de la distance AR au diametre AB, et qui, dans le point A où elle est la plus grande, soit égale à la force centrifuge β multipliée par $2r$. *C'est ce qu'il falloit trouver.*

3714. Nous verrons bientôt qu'une pareille force, répandue dans toutes les parties du sphéroïde, produit la cinquieme partie de l'effet qui auroit lieu si toute la matiere étoit réunie en A, et agitée de la force $2\beta r$, ou qu'il faut une force $\frac{2}{5} ar\beta S$ pour produire le mouvement r.

La force que nous avons trouvée est nulle quand le corps est en F; alors RN est parallele et égale à CM, la différence CV s'évanouit; la seule vîtesse du plan de l'équateur autour de son diametre AB, qui est commune au corps R, suffira pour qu'il reste dans le plan de l'équateur.

On néglige ici la petite différence qu'il y a entre la vîtesse réelle du corps R et sa vîtesse, supposée uniforme dans le plan ARF: il est bien vrai que la vîtesse réelle de R en C n'est pas rigoureusement uniforme, si la vîtesse est supposée uniforme dans le plan ARF: mais la différence est infiniment plus petite que la force CV; car puisque l'angle RAN est supposé infiniment petit, si l'on conçoit une ligne de N en C, elle fera un angle infiniment petit avec NV; donc la différence de NV à NC sera infiniment plus petite que CV (3492); donc si CV est un infiniment petit du second ordre, la différence que l'on néglige ici sera un infiniment petit du troisieme. Cela suffit pour répondre à une autre objection que faisoit d'Arcy (*Mémoires de l'académie* 1759).

3715. Cette force nécessaire pour un seul corpuscule qui tourneroit dans la circonférence de l'équateur nous fera trouver ce qui doit arriver dans un plus grand nombre de corpuscules qui formeroient un anneau continu AFB dans le plan de l'équateur, et même dans le cas où il y auroit des anneaux concentriques, tels que GIK, qui tourneroient également au dedans de l'équateur; et nous allons démontrer que la même force, avec la même loi, aura toujours lieu, et suffira pour conserver l'équilibre et le mouvement r dans un sphéroïde qui seroit entièrement fluide.

Soit β la force centrifuge d'un corpuscule placé dans l'anneau extérieur ARFB; celle d'un corpuscule I placé dans un anneau intérieur GIK, mais toujours dans le plan de l'équateur, sera $\beta\frac{OI}{OF}$, c'est-à-dire proportionelle au rayon de l'anneau ou du cercle qu'il dé-

crit (3542); ainsi la force nécessaire pour retenir le corpuscule I sera $2r\beta\,\frac{OI}{OF}$ au point G.

3716. Si l'on veut considérer un autre corpuscule placé sous une autre latitude, par exemple, à une distance de l'équateur qui seroit égale à GL, on trouvera que cette force diminue comme le cosinus de la latitude, aussi bien que la force centrifuge (3542); car si l'on conçoit le plan de cercle GLIK relevé perpendiculairement au plan de la figure, de maniere que I soit le pole du petit anneau dont le diametre est GK, QO sera égale au parallele décrit par le point L, puisque c'est la distance à l'axe de la Terre qui est perpendiculaire en O; donc la force centrifuge qui, sous l'équateur ou en G étoit $\beta\frac{OI}{OF}$, sera $\beta\cdot\frac{OI}{OF}\cdot\frac{QO}{OI}$, ou $\beta\cdot\frac{QO}{OF}$; donc la force nécessaire pour retenir le corpuscule dans la circonférence de son parallele, et balancer la force centrifuge, au lieu d'être $2r\beta\cdot\frac{OI}{OF}$, sera $2r\beta\cdot\frac{OI}{OF}\cdot\frac{QO}{OI}=\frac{2r\beta\cdot QO}{OF}$. Or dans cette expression il n'y a que OQ de variable; ainsi la force nécessaire pour retenir chaque corpuscule de la Terre dans son cercle ou dans son anneau à une distance quelconque de l'équateur, sera encore proportionelle à la distance OQ du corpuscule par rapport au diametre OF, ou au plan qui passe par OF perpendiculairement à la figure, comme dans l'article 3713, où le corps tournoit dans l'équateur.

3717. Il en sera de même quoique ce parallele soit déplacé par le mouvement r de l'équateur. Soit un cercle GEHF (FIG. 303), ou un parallele à l'équateur, considéré comme composé d'une infinité d'anneaux concentriques, qu'on suppose tourner uniformément autour du centre C, et de l'axe PCOB par le mouvement diurne, avec une vîtesse égale à l'unité sous l'équateur, tandis que le centre C lui-même et la ligne droite OC qui est l'axe du cône GOH, tournent uniformément dans le plan du méridien ou dans la circonférence du cercle PQB, avec la vîtesse angulaire r: les forces nécessaires pour retenir les particules du cercle GEHF dans leur plan pendant ce mouvement composé, seront les mêmes que si le cercle GEH tournoit autour de son diametre EF perpendiculaire au plan PQB de la figure, et qu'on supposât ce diametre immobile avec son centre C et la vîtesse angulaire du cercle GEH, c'est-à-dire la vîtesse des points G et H, égale à celle qu'avoit auparavant le centre C autour du point O: en effet l'angle OCG étant toujours droit, le point G décrira l'arc GQ, et le point C un autre arc concentrique et semblable à GQ; le point G, vu du centre C, aura le même mouvement angulaire

que les points G et C vus du centre O. Si le point G parcourt un degré du cercle GQ, la position de la ligne CG, qui fait avec OG un angle constant, changera aussi d'un degré; or le changement de situation de la ligne CG forme un mouvement angulaire du point G autour du centre C, puisque la ligne qui les joint ne reste point parallele à elle-même; donc ce mouvement aura été d'un degré. Le mouvement total et absolu du point G est composé de ce mouvement angulaire autour du centre C, et du mouvement de ce centre autour de O; mais il n'y a que le mouvement angulaire autour du centre C, et du diametre ECF, qui exige une force capable de retenir le corpuscule dans le plan de son cercle; car le mouvement, qui est commun au centre C et à toutes les parties de la circonférence, ne change rien au mouvement du corpuscule dans son cercle; donc le mouvement angulaire du point G autour de son centre C, dans la nouvelle hypothese du centre mobile, étant le même que lorsque le centre C étoit supposé immobile, la force nécessaire pour y retenir le corpuscule G sera encore la même. Il est donc certain que les forces paralleles à PCO, ou perpendiculaires au plan du cercle GEH, qui sont nécessaires pour retenir les particules dans son plan, seront toujours comme les distances au diametre GH ou au plan PHBQ, dans lequel se fait le mouvement de l'axe (3713), ainsi que dans le cas de l'article 3715, quelle que soit la distance du parallele GEHF au centre O et à l'équateur QR, c'est-à-dire quelle que soit la latitude du parallele terrestre GEHF. Nous pouvons donc supposer que toutes les parties de la Terre sont sollicitées par une force parallele à l'axe, qui, sous l'équateur, est $2r\beta$ dans les extrémités du diametre autour duquel tourne l'équateur, et qui est toujours proportionelle à la distance de chaque particule au plan dans lequel le mouvement est le plus grand, ou au plan d'un méridien perpendiculaire à ce même diametre.

3718. Concevons un fluide homogene tournant uniformément autour de l'axe PB, sous la forme d'un sphéroïde aplati, QR étant le diametre de l'équateur, tandis que l'axe lui-même tournera de la maniere expliquée ci-dessus (3710), par un mouvement de P en Q, supposé $=r$: les particules du fluide, pour rester en équilibre chacune dans le plan de leur parallele, doivent être sollicitées parallèlement à l'axe, ou perpendiculairement à l'équateur, par des forces qui soient comme les distances au plan du méridien PRBQ, et il faut que la force soit $2r\beta$ dans le point A de l'équateur QAR, qui est situé sur le diametre OA, autour duquel se fait le petit mouvement de l'équateur. Voyons quelle est la force totale qui en résulte, afin de pouvoir comparer cette force avec celle du Soleil, dont nous avons trouvé l'expression (3708).

3719. THÉORÊME. *Si toutes les particules d'un sphéroïde* EPQO (FIG. 304) *sont sollicitées par des forces paralleles à l'axe* PO, *proportionelles à la distance de chaque partie au plan qui passe par* PO (3718), *et si deux moitiés* PEO, PQO *du sphéroïde sont sollicitées également et en sens contraire, la somme de toutes ces forces, ou l'énergie de la force totale employée à faire tourner le sphéroïde autour de son centre, sera* LA CINQUIEME *partie de celle qui auroit lieu, pour le faire tourner autour du centre* C, *si toutes les parties du sphéroïde étoient réunies à la distance* CQ *du rayon de l'équateur.*

DÉMONSTRATION. Soit a le demi-diametre CQ de l'équateur; A la surface de l'ellipse OEPQ; γ la force qui agit sur une particule située à la distance CQ, ou la force que nous avons trouvée égale à $2r\beta$ (3713); la distance CM d'une section parallele au méridien $= x$; cette section, dont LN est le diametre, sera aussi une ellipse semblable au méridien OEPQ (3417). Par la propriété de l'ellipse, $CP^2 : LM^2 :: aa : aa - xx$; donc la section sur PO étant égale à A, la section sur LN sera $A \frac{aa - xx}{aa}$, parceque les figures semblables sont comme les carrés de leurs côtés homologues; ainsi la somme de toutes les forces qui agissent sur la petite ellipse dont LN est le petit axe, sera $A \cdot \frac{aa - xx}{aa} \cdot \frac{x}{a} \gamma$, puisque, par l'hypothese, la force en M est à la force γ, qui a lieu en Q, comme x est à a. Cette force, qui agit sur toute l'ellipse LN, doit encore être multipliée par le bras de levier CM, ou par la distance au centre, ainsi que nous l'avons fait en exprimant la force du Soleil (3700), parcequ'elle a d'autant plus d'effet, pour faire tourner le sphéroïde, qu'elle agit plus loin du centre; et l'on aura $A\gamma \cdot \frac{aa - xx}{aa} \cdot \frac{xx}{a}$ pour la force avec laquelle cette section elliptique tend à faire tourner le sphéroïde. Si l'on imagine une autre section infiniment proche lmn, et qu'on multiplie la force trouvée par $Mm = \delta x$, on aura la force totale sur LNnl, dont on prendra l'intégrale (3440); on fera $x = a$ pour avoir l'effet sur le demi-sphéroïde PQO, et le double sera l'effet total, qu'on trouvera $\frac{4}{15} aaA\gamma$. La solidité du sphéroïde que j'appelle S est égale à $\frac{4}{3} a$A (3477); donc $\frac{4}{15} aaA\gamma$, qui est la même chose que $\frac{4}{3} aA \cdot \frac{1}{5} a\gamma$, est aussi égale à $\frac{1}{5} a\gamma S$: or, si la solidité toute entiere S étoit à la distance a, la force seroit $a\gamma S$; donc la force sur le sphéroïde est un cinquieme de celle que la même masse éprouveroit si elle étoit toute au point Q, et c'est C·Q·F·D.

3720. Cette force $\frac{a\gamma S}{5}$ ou $\frac{2r\beta aS}{5}$ (parceque $\gamma = 2r\beta$) est donc celle qui est nécessaire pour produire sur l'axe du sphéroïde ou sur le plan

de l'équateur un mouvement angulaire égal à r, du nord au sud. Ainsi les particules du sphéroïde resteront dans leur ordre naturel, en suivant les deux mouvemens dont il s'agit, si la force totale qui produit le mouvement r de l'axe, et que j'appellerai F, est égale à $\frac{2r\beta aS}{5}$; c'est-à-dire que $r = \frac{F}{\frac{2}{5}a\beta S}$, et la force totale, employée par le Soleil dans la direction de la ligne des centres, pour faire tourner le sphéroïde, étant divisée par $\frac{2}{5}a\beta S$, donnera le mouvement de l'axe.

3721. Il est donc démontré qu'une force totale $\frac{2}{5}ar\beta S$, exercée sur le sphéroïde entier, est capable de produire le mouvement r dans le plan de l'équateur du nord au sud : or nous avons vu que le Soleil exerce sur tout le sphéroïde une force totale $\frac{3\beta tt}{5T^2}(aa - bb)\frac{mn}{a}S$ (3708) pour le faire tourner du nord au sud ; et, divisant par $\frac{2}{5}a\beta S$ (3720), l'on aura le mouvement qui doit en résulter $= \frac{3}{2}\frac{tt}{T^2}\cdot\frac{mn}{a^2}(aa - bb)$; c'est donc là le petit angle que l'axe de la Terre décrit en un instant infiniment petit, le mouvement diurne de rotation étant pris pour unité.

Ce n'est pas dans le point où agit le Soleil sur l'équateur que l'effet total se manifeste tout entier, c'est à 90° de là. Je suppose que, dans un instant donné, l'action du Soleil tende à déplacer le point E de l'équateur (FIG. 305) d'une quantité DE $= r$, tandis que le point E, par la rotation ordinaire, a décrit l'arc AE ; il en résultera un mouvement composé AD ; l'équateur AEB prendra la situation ADC, et s'écartera de la quantité CB ; ainsi l'écart est le plus grand à 90° du point A, où s'exerce la force perturbatrice.

3722. Le petit angle $\frac{3ttmn}{2TT}\left(\frac{aa - bb}{aa}\right)$, dont l'axe de la Terre est détourné de sa situation par la force du Soleil, à un instant donné, est l'angle de l'équateur avec l'équateur moyen : mais cet angle différentiel est plus ou moins grand, dans différens temps, à cause du changement de la déclinaison du Soleil, ou de m et n ; il faut savoir ce qui en résulte après un temps fini, afin d'avoir la précession des équinoxes pour trois mois, ou pour le temps après lequel m et n se rétablissent ; d'où nous la conclurons pour tout autre temps. Soit ESL (FIG. 307) l'écliptique, et EAC l'équateur ; BAD la position nouvelle que prend l'équateur par l'action du Soleil, faisant l'angle BAE avec la situation précédente qu'il avoit au moment où nous l'avons considéré, c'est-à-dire le Soleil étant au point S de l'écliptique avec une déclinaison AS : mettons k à la place de $\frac{aa - bb}{aa}$, dans la valeur de

l'angle A, l'on aura $\frac{3t^2}{2T^2}kmn$ égal à l'angle BAE (3721). Dans le triangle sphérique BAE, dont l'angle A est infiniment petit, on a cette proportion : sin. B : sin. EA :: sin. A : sin. BE, ou :: A : BE (3906); donc BE, qui est le mouvement du point équinoxial B, le long de l'écliptique BESL, dans un instant infiniment petit, sera $= \frac{A \times \text{sin. EA}}{\text{sin. B}} = \frac{3t^2}{2T^2} kmn \frac{\text{sin. asc. dr.}}{\text{sin. } 23^\circ\frac{1}{2}}$, parceque le point A est celui où répond le Soleil pour le temps où l'on a calculé le petit mouvement de l'équateur, c'est-à-dire où le sinus de la déclinaison du Soleil étoit *m*. Cette valeur de BE est donc la différentielle de la précession des équinoxes; nous la mettrons ensuite sous une forme plus commode (3726).

3723. L'équateur EAC, qui prend la situation BAD, se trouve moins éloigné de l'écliptique sur le colure des solstices LDC, ou à 90° du point équinoxial E; la différence CD est le petit changement de l'obliquité de l'écliptique, ou la nutation qui résulte de ce mouvement de l'équateur. Soit ♈CB (FIG. 308) l'écliptique, ARB l'équateur, qui prend la position ♈ESD; le petit arc SR sera aussi la nutation, car il mesure l'excès de l'angle ♈ sur l'angle A, puisque RC est sensiblement égal à *rc*: or le changement des positions célestes ne peut dépendre que de la position de l'équinoxe A duquel on les compte, et de l'angle A que forme l'écliptique avec l'équateur : ce n'est pas IK, mesure de l'angle D, ou du déplacement de l'équateur, qui est la différence de ces angles ♈ et A, c'est SR : IK est la différence des déclinaisons IL et KL; mais ces déclinaisons ne sont pas à égales distances de l'équinoxe, car l'une répond à la longitude ♈L, et l'autre à la longitude AL; donc IK n'est jamais une quantité dont on ait besoin dans nos calculs; mais on emploie SR, différence entre l'angle ♈ et l'angle A, combinée avec la différence ♈A, qui a lieu dans la position du point équinoxial.

Commençons par trouver la valeur de la nutation CD (FIG. 307), qui servira pour trouver la précession. Dans le triangle CAD, R : sin. AC ou cos. AE :: sin. A : sin. CD :: A : CD; donc la nutation CD $=$ A · cos. AE $= \frac{3t^2}{2T^2}kmn$ cos. AE : il y faut introduire la longitude du Soleil, pour l'avoir sous une forme plus astronomique.

Longitude ES $= z$
Sin. longit ou sin. ES $= x$
Cos. longit. $= y = \sqrt{(1 - xx)}$
Sin. 23°$\frac{1}{2}$ ou sin. AES $= p$
Cos. 23°$\frac{1}{2}$ $= q$
$\frac{aa - bb}{aa} = k$

3724. Dans le triangle sphérique EAS, rectangle en A, la déclinaison du Soleil $=$ AS; son ascension droite $=$ EA, sa longitude $=$ ES : on a donc sin. AS $=$ sin. ES $\times$ sin. E $= px$ (3873); cos. ES $=$ cos. AE $\times$ cos. AS $= y$ (3886); donc sin. déclin. cos.

déclin. cos. AE $= pxy$; ainsi la différentielle de la nutation, c'est-à-dire le petit arc CD, sera $\frac{3t^2}{2T^2}kpxy$.

3725. Puisque cet angle est une fraction du mouvement diurne, qui a été supposé égal à 1, il n'y a qu'à le multiplier par $366\frac{1}{4}$ (a), ou $\frac{T}{t}$ (3497), et l'on aura le même angle, le même mouvement de l'axe en fraction du mouvement annuel, $\frac{3t}{2T}kpxy$: ainsi, multipliant par cette quantité une partie quelconque du mouvement annuel, tel que le petit arc ∂z de l'écliptique décrit en un temps infiniment petit par le Soleil, on aura le mouvement de nutation pour le même temps; enfin écrivant pour y sa valeur $\sqrt{(1-xx)}$, et à la place de ∂z sa valeur $\frac{\partial x}{\sqrt{(1-xx)}}$ (3468), on aura la différentielle de la nutation, pour le moment actuel, $\frac{3t}{2T}kpx\partial x$, dont l'intégrale $\frac{3t}{4T}kpx^2$ est la nutation totale pour l'espace de temps que le Soleil a employé à parcourir un arc z de l'écliptique. Elle est la plus grande quand $x=1$, ou que le Soleil est dans le solstice; elle s'évanouit quand il est dans l'équateur.

3726. Il faut trouver aussi la précession des équinoxes, ou la quantité totale de BE, dans un temps fini : pour cet effet, nous allons chercher le rapport de la précession à la nutation par ces deux proportions (3875) : ER : CD :: sin. EA : sin. CA, ou cos. EA :: tang. EA : 1; et EB : ER :: 1 : sin. B; multipliant terme à terme, EB : CD :: tang. EA : sin. B. Il faut faire disparoître l'ascension droite EA; on a tang. EA = cos. E · tang. ES (3884) = cos. E $\frac{\text{sin. long.}}{\text{cos. long.}} = \frac{qx}{\sqrt{(1-xx)}}$; donc EB : CD :: $\frac{qx}{\sqrt{(1-xx)}} : p$: si l'on met actuellement pour CD sa valeur $\frac{3t}{2T}kpx\partial x$ (3725), on trouvera EB $= \frac{3t}{2T} \times \frac{kqx^2\partial x}{\sqrt{(1-xx)}}$; c'est la différentielle de la précession des équinoxes produite par le Soleil.

L'intégrale de $\frac{x^2\partial x}{\sqrt{(1-xx)}}$, qui dépend de la quadrature du cercle, est $\frac{z-x\sqrt{(1-xx)}}{2}$ (3470) ; donc l'intégrale cherchée est $\frac{3t}{2T} \cdot \frac{kq}{2}[z-x\sqrt{(1-xx)}]$; c'est la précession des équinoxes pour le temps que le Soleil a employé à parcourir l'arc z de l'écliptique. La seconde partie de cette expression est une partie variable ou une inégalité de la précession, qui dépend du produit du sinus et du cosinus de la longitude, ou du sinus du double (3817); ce terme n'est que d'une seconde, mais il mérite d'être employé (2908).

(a) L'année est de $365\frac{1}{4}$ jours, mais la durée de la véritable rotation de la Terre, qui est celle du retour des étoiles au méridien, est plus courte de $\frac{1}{365}$; ainsi le mouvement diurne, comparé au mouvement annuel, est 366, 2562, dont le logarithme est 2,5637850.

3727. La partie $\frac{3tkqz}{4T}$ de cette valeur est la plus importante ; on voit qu'elle va toujours en croissant, ce qui prouve que la précession des équinoxes augmente continuellement comme la longitude z du Soleil. Pour en trouver la valeur numérique, on considérera qu'au bout de trois mois on a $z = 90° = 324000''$; on a aussi $q = \cos. 23° 28' = 0,917$; $t = 1$ jour; $T = 366^j, 256$; $k = \frac{aa-bb}{aa} = \frac{1}{150}$; c'est à-peu-près le double de l'aplatissement de la Terre : en employant tous ces nombres, on aura $\frac{3tkqz}{4T} = 4''05$, précession moyenne pour trois mois; ainsi le quadruple 16''2 sera la précession moyenne annuelle des équinoxes produite par l'action du Soleil, en supposant la Terre homogene, et l'aplatissement $\frac{1}{300}$. Nous verrons bientôt que, suivant les observations, cette quantité est en effet d'environ 16'' (3735) ; mais si l'on supposoit l'aplatissement $\frac{1}{230}$, on trouveroit 21''2.

3728. D'Alembert trouve par sa théorie cette précession de 23'' environ (*Recherches*, etc., *pag.* 159). En supposant l'aplatissement $\frac{1}{230}$, Euler trouve aussi environ 22''; Newton ne trouvoit que 9'', et le chevalier d'Arcy $10''\frac{1}{3}$ (*Mém.* 1759) ; mais Newton se trompoit de moitié, comme Simpson l'a fait voir (*pag.* 45), c'est-à-dire que, sans une méprise, la méthode même de Newton devoit donner environ 21'' ; ainsi toutes les méthodes donnent une quantité plus grande d'un tiers que ne l'indiquent les observations (3742) quand on suppose la Terre homogene. On peut voir à ce sujet les auteurs cités (3692). Je passe à la précession et à la nutation que la Lune doit produire, en agissant de la même maniere que le Soleil (3694) sur chaque partie de la Terre.

3729. La lune produit sur le sphéroïde un mouvement semblable, et la précession produite par le moyen de la Lune se déduira de celle du Soleil; mais il faudra faire entrer dans ce calcul la situation des nœuds de la Lune, ce qui exigera une opération trigonométrique de plus, parceque la déclinaison dont le sinus et le cosinus entrent dans les formules précédentes, renferme le lieu du nœud, quand il s'agit de la Lune, dont l'obliquité n'est pas constante sur l'équateur comme celle de l'écliptique.

Soit ♈ B (fig. 308) l'écliptique supposée immobile, ♈ED♎F l'équateur dans sa premiere situation, AGRDBH l'équateur altéré par l'action de la Lune dans un instant infiniment petit, EGNFH l'orbite de la Lune, dont le nœud est au point N de l'écliptique, l'angle N étant de 5° 8' 44'' (1500); c'est l'inclinaison moyenne de l'orbite lunaire.

3730. L'action du Soleil produit chaque année 16″ de précession (3727) : si la force de la Lune est deux fois ½ celle du Soleil (3567, 3780), elle en produira deux fois et demie autant, toutes choses égales ; mais supposons en général cette force égale à *m*, celle du Soleil étant 1, la précession solaire $= p$, et la durée d'un mois $= t$; alors la précession causée par la Lune dans un mois sera $\frac{mpt}{T}$, c'est-à-dire en raison de sa force, et du temps pendant lequel elle agit ; mais ce sera sur l'orbite de la Lune, et en supposant que l'inclinaison de cette orbite sur l'équateur soit toujours la même que l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur, c'est-à-dire que l'angle E soit de 23°½, comme l'angle ♈ : mais si l'angle d'inclinaison est plus petit que 23°, la précession devient plus grande dans le rapport des cosinus ; car, dans l'expression de l'article 3727, on auroit, au lieu de *q* ou du cosinus de 23°½, un autre cosinus qui seroit celui de l'angle E ; donc il faut diviser l'expression par *q*, et ensuite la multiplier par le cosinus de l'angle E : alors la précession EG, mesurée sur l'orbite de la Lune, pendant une révolution de la Lune, ou pendant un mois, sera $\frac{mpt}{T} \cdot \frac{\text{cos. E}}{\text{cos. } 23°\frac{1}{2}}$.

Longit. ☊ = ♈ N = *z*
Sin. ♈ N = *x*
Cos. ♈ N = *y*
Sin. ♈ 23°½ = *a*
Cos. ♈ = 23°½ = *b*
Sin. N = 5° 9′ = *c*
Cosin. N = 5° 9′ = *g*
Circonfér. = 6,28 = *c*
Force ☾ = 2½ = *m*
Précess. 14″½ = *p*
Révol. ☾ 27j = *t*
Année = 365j = T
18 ans = *n*

3731. Pour rapporter cette quantité à l'écliptique ♈A, sur laquelle on a coutume de compter la précession, je suppose que FDE soit la position de l'équateur lorsque la Lune le traversoit en F, et HDG sa position quand la Lune repassoit dans l'équateur en G ; et je remarque que l'intersection D de ces deux cercles est dans le milieu D de l'intervalle : pour le prouver, on observera que l'inclinaison de l'axe de la Terre, ou de l'équateur terrestre, par rapport à la situation primitive ou naturelle, revient la même à chaque demi-révolution de la Lune, c'est-à-dire à son passage dans l'équateur ; en effet la nutation (3725) est la plus grande lorsque la déclinaison de l'axe qui la produit est à son *maximum*, après quoi elle diminue jusqu'à l'autre équinoxe, où l'inclinaison est rétablie à sa premiere valeur : ainsi l'inclinaison en F et en G doit être exactement la même, mais l'angle F l'angle E sont nécessairement égaux ; donc les angles E,G,F,H sont tous égaux ; les triangles DEG, DFH, le sont donc aussi ; par conséquent le point D, qui tient le milieu entre les points G et H, où l'orbite de la Lune coupe l'équateur, est celui où l'équateur mobile coupe l'équateur primitif. Ainsi DE = DF = 90° ; mais S étant le point solsticial, ♈S est aussi = 90°, en sorte que DS = ♈E. Dans le triangle DEG, l'on a cette proportion, sin. ED ou R : sin. G : : sin. EG : sin. D : : EG : D ; donc le petit angle D = EG · sin. G = EG.

sin. E. Dans le triangle sphérique ΥDA, l'on a aussi cette proportion, sin. A : sin. ΥD (ou cos. ΥE) :: sin. D : sin. ΥA :: D : ΥA; donc on a $\Upsilon A = \frac{D \times \cos. \Upsilon E}{\sin. A} = \frac{EG \times \sin. E \times \cos. \Upsilon E}{\sin. 23°}$, parceque $D = EG \cdot \sin. E$; mais $EG = \frac{mpt}{T} \cdot \frac{\cos. E}{\cos. 23°}$; donc $\Upsilon A = \frac{mpt}{T} \cdot \frac{\sin. E \times \cos. E \times \cos. \Upsilon E}{\sin. \Upsilon \times \cos. \Upsilon}$; c'est la valeur de la précession causée par la Lune dans le petit espace d'un mois, mesurée le long de l'écliptique : elle doit varier d'un mois à l'autre à cause du changement de l'angle E; ainsi nous ne considérons la petite précession d'un mois que comme la différentielle de la précession totale qui s'acheve en 18 ans; nous en chercherons l'intégrale quand nous aurons trouvé celle de la nutation.

3732. On trouvera de même la valeur de la petite nutation SR pour le même intervalle de temps, ou la différentielle de la nutation, c'est-à-dire la quantité dont l'équateur se trouve rapproché de l'écliptique, sur le colure des solstices SRC, dans l'espace d'un mois; pour cela on cherchera RS par le moyen de EG; on a d'abord cette proportion, R : sin. DS :: D : RS; donc $RS = D \cdot \sin. DS = D \cdot \sin. \Upsilon E$; mais $D = GM = EG \cdot \sin. E$; donc $RS = EG \cdot \sin. E \cdot \sin. \Upsilon E = \frac{mpt}{T} \times \frac{\cos. E}{\cos. \Upsilon} \cdot \sin. E \sin. \Upsilon E$. Quand on a les sinus d'un angle et de son côté adjacent, on peut mettre à la place un autre angle, avec son côté pareillement adjacent : ainsi nous pourrons substituer, dans cette expression, l'inclinaison N, qui est à-peu-près constante, et la longitude ΥN du nœud qui change à-peu-près uniformément, en considérant que sin. E : sin. ΥN :: sin. N : sin. ΥE; donc $RS = \frac{mpt}{T} \times \frac{\sin. N \times \sin. \Upsilon N \cos. E}{\cos. \Upsilon} = \frac{mpt}{T} \cdot \frac{ex}{b} \cos. E$. On doit encore éliminer de cette expression l'angle E, pour n'avoir que la long. du nœud avec des constantes, parceque cet angle E change par le mouvement des nœuds de la Lune. Dans le triangle ΥEN, où l'on connoît ΥN, Υ & N, on a $\cos. E = \cos. \Upsilon N \cdot \sin. N \sin. \Upsilon - \cos. N \cdot \cos. \Upsilon$ (3944) ou $yea - gb$; mais parceque l'angle E est obtus, la perpendiculaire tombera hors du triangle, le cosinus de E sera négatif, et l'on aura $\cos. E = bg - aey$; donc la petite nutation $RS = \frac{mptex}{Tb} \cos. E$ sera $\frac{mpt}{T} \cdot \frac{ex(bg - aey)}{b}$, le nœud étant supposé en N : nous considérerons cette nutation comme une différentielle dont l'intégrale sera la nutation totale qui doit avoir lieu après que le nœud N aura fait le tour du ciel.

3733. Il faut exprimer cette différentielle de la nutation par le moyen de la différentielle de la longitude du nœud qui sera maintenant appellée ∂z; pour cela je considere que la durée t d'une révo-

lution de la Lune est à la durée n d'une révolution entiere du nœud, comme δz, qui est le mouvement moyen du nœud en un mois, est à la circonférence entiere du cercle que nous appellerons c: donc $t = \frac{n \delta z}{c} = \frac{n \delta x}{c\sqrt{(1-xx)}}$ (3468). Supposons T = 1, en sorte que n soit égal à 18,6 (1488), et substituons $\frac{n \delta x}{c\sqrt{(1-x^2)}}$, ou la valeur de t, dans la différentielle de la nutation $mpt \cdot \frac{ex \cdot (bg - aey)}{b}$. En mettant $\sqrt{(1 - xx)}$ à la place de y, on aura $mpn \cdot \frac{e}{bc}\left(\frac{gbx \delta x}{\sqrt{(1-x^2)}} - aex \delta x\right)$ dont l'intégrale (3436) est $\frac{mpne}{cb} \times \left(-gb\sqrt{1-xx} - \frac{aex^2}{2}\right)$: or quand $x = 0$, il faut que la nutation soit nulle, puisque c'est du point équinoxial que nous comptons les mouvemens, et que c'est à ce point que commence l'action périodique de la Lune; donc l'intégrale trouvée doit être = 0 quand $x = 0$: cependant $-gb\sqrt{1-xx} - \frac{aex^2}{2}$ devient alors $= -gb$; donc il faut ajouter $+ gb$ à l'intégrale trouvée (3445); et cette intégrale complete sera $\frac{mpne}{cb}(bg - bg\sqrt{1-xx} - \frac{1}{2}aex^2) = \frac{mpne}{cb}(gb \cdot \text{sin. verse } z - \frac{1}{4} ea \text{ sin. verse } 2z)$, parceque le carré du sinus d'un arc est égal à la moitié du sinus verse du double de l'arc (3819). Telle est la nutation entiere, ou la diminution de l'obliquité de l'écliptique causée par la Lune depuis que le nœud étoit dans l'équinoxe du Bélier jusqu'au temps où il est arrivé en N. Cette expression se réduit à un nombre de secondes, puisque p est exprimée en secondes, étant égale à 16″ suivant les observations (3742), et que toutes les autres quantités de l'expression précédente sont des fractions du rayon (3499), même la quantité c, ou la circonférence du cercle égale à 6,28 (3467).

3734. La différentielle de précession $\frac{mpt.\text{ sin. E. cos. E. cos.} \Upsilon \text{E}}{\text{T. sin.} \Upsilon \text{. cos.} \Upsilon}$ (3731) est à la différentielle de la nutation $\frac{mpt}{\text{T}} \cdot \frac{\text{cos. E. sin. E. sin.} \Upsilon \text{E}}{\text{cos.} \Upsilon}$, comme $\frac{\text{cos.} \Upsilon \text{E}}{\text{sin.} \Upsilon}$ est à sin. ♈ E, ou comme cotangente ♈ E est à sin. ♈; ainsi la différentielle de la nutation, multipliée par $\frac{\text{cot.} \Upsilon \text{E}}{\text{sin.} \Upsilon}$, doit donner la différentielle de la précession. Mais cot. $\Upsilon \text{E} = \frac{ag + bey}{ex}$ (3975), comme il est aisé de s'en assurer en mettant ♈, E, N, au lieu de A, B, C; donc $\frac{\text{cot.} \Upsilon \text{E}}{\text{sin.} \Upsilon} = \frac{ag + be\sqrt{(1-xx)}}{aex}$; ainsi multipliant cette quantité par la différentielle de la nutation $= \frac{mpne}{bc}\left(\frac{gbx}{\sqrt{(1-xx)}} -\right.$

a

$aex)\partial x$ (3733), on aura celle de la précession $= \frac{mpn}{abc} \cdot \Big(\frac{abg}{\sqrt{(1-xx)}}$ $+ (bb - aa)ge - abe^2\sqrt{1-xx}\Big)\partial x$, dont l'intégrale, en nommant z l'arc dont x est le sinus, sera (3468, 3469) $= \frac{mpn}{abc}(ag^2bz$ $+ (bb-aa)gex - \frac{1}{2}abe^2z - \frac{1}{2}abe^2x\sqrt{1-xx})$, ou $\frac{mpn}{abc} \times$ $[(gg - \frac{1}{2}ee)abz + (bb - aa)ge \cdot \sin. z - \frac{1}{4}abee \cdot \sin. 2z]$ (3817). Telle est la valeur de la précession vraie causée par l'action de la Lune, pendant le temps que le nœud emploie à parcourir l'arc z.

3735. Il s'agit maintenant d'exprimer en nombres la nutation et la précession. Lorsque le nœud de la Lune a achevé une demi-révolution, l'on a $z = 180° = \frac{c}{2}$; mais le sinus verse de 180° est 2, et le sinus verse de $2z$ ou de $360° = 0$; donc, après une demi-révolution du nœud, la nutation $\frac{mpne}{cb} \cdot (gb \sin. v. z - \frac{1}{4}ae \sin. v. 2z)$ (3733) devient $\frac{mpne}{bc} \cdot 2bg$, ou $\frac{2mpneg}{c}$; cette nutation revient à 19″2, quand on suppose, pour la force de la Lune, $m = 2\frac{1}{2}$; car alors il faut supposer la précession solaire $p = 14''48$, et la précession lunaire 35″,77, pour que les deux ensemble fussent 50″25, qui est la précession observée. Mais si l'on veut que la nutation soit de 18″, et supposer rigoureusement exactes les observations de Bradley (2893), on fera $m = 2{,}037$, et $p = 16'',68$, pour que, réunie à la précession lunaire 33″57, elle fasse les 50″25; alors on trouvera la nutation de 18″, comme dans l'exemple ci-joint. Ainsi la force de la Lune, déduite de la précession, est plus petite que celle qu'on déduit des marées (3780).

Logar. 2	. . . .	0,30103
	2″,037 . . .	0,30899
	16″,66 . . .	1,22220
$n =$	18″,613 . . .	1,26982
Sin. 5° 9′	. . .	8,95310
Cos. 5° 9′	. . .	9,99824
$c =$	6″,2832. . .	9,20182
	18″,0 . . .	1,25520

3736. Pour exprimer aussi en nombres la valeur de la précession (3734), on supposera que le nœud ait fait une demi-révolution; alors $z = \frac{c}{2}$; sin. z et sin. $2z = 0$; donc les deux derniers termes de la valeur trouvée disparoissent, et la précession entiere devient $\frac{mpn}{2}(gg - \frac{1}{2}ee)$; et parceque le carré d'un cosinus $gg = 1 - ee$, elle revient à $\frac{mpn}{2}(1 - \frac{3}{2}ee)$; donc pendant une révolution entiere des nœuds ou pendant 18 ans, la précession sera le double de cette quantité, c'est-à-dire $mpn(1 - \frac{3}{2}ee)$, qui donne par année 33″57, en employant pour m et p les valeurs précédentes.

3737. On voit par cette expression, que la moyenne précession causée par la Lune, est à la précession mpn, qui auroit lieu si la Lune tournoit dans l'écliptique (3730), c'est-à-dire si l'on faisoit $e = 0$, comme $1 - \frac{3}{2}ee$ est à 1, ou comme 0,9879 est à 1.

3738. En comparant les expressions (3735, 3736), on voit que la quantité de la nutation, qui est de 18″ suivant les calculs précédens, pendant neuf ans ou pendant une demi-révolution du nœud, est à la précession correspondante, comme $\frac{4ed}{c}$ est à $1 - \frac{3}{2}ee$, c'est-à-dire comme 1 à 17,35.

3739. L'inégalité ou l'équation de la précession se trouvera en retranchant de la précession vraie pour un temps quelconque, la précession moyenne pour le même temps. Soit z la longitude du nœud pour un certain espace de temps, la précession moyenne pendant une demi-révolution du nœud étant $\frac{mpn}{2}(gg - \frac{1}{2}ee)$ (3736), on aura pour le temps correspondant à l'arc z, la précession $= \frac{z}{e} \cdot mpn\,(gg - \frac{1}{2}ee)$: cette précession moyenne, retranchée de la vraie précession trouvée ci-devant (3734), donne pour différence ou pour équation $\frac{mpn}{abe}[(bb - aa)\,ge \sin. z - \frac{1}{4}abe^2 \sin. 2z]$. Nous négligerons le second terme qui renferme le carré du sinus e d'un angle de 5°, et qui ne peut jamais produire qu'un quart de seconde ; nous aurons donc, pour la plus grande équation de la précession, le nœud étant dans le solstice, c'est-à-dire sin. z étant égal à 1, $\frac{mpneg}{abc}(bb - aa)$.

3740. Cette équation de la précession est à la nutation entiere de 18″ ou $\frac{2mpneg}{c}$ (3735), comme $bb - aa : 2ab$, comme 1 est à $\frac{2ab}{bb - aa}$, ou à la tangente du double de l'obliquité de l'écliptique (3825) : cette regle qui suit de la théorie, est conforme à l'hypothese que l'on emploie dans le calcul de la nutation (2909), et qui n'est que la construction de l'expression précédente. En effet si l'on suppose que PQ (FIG. 242) soit à PR comme $bb - aa$ est à b, ou comme le cosinus de 46° 56′ est au cosinus de 23° 28′ (3825), c'est-à-dire comme 0,7444 est à 1, ou à-peu-près comme 3 est à 4, et qu'on prenne RPO égal à longitude du nœud, le lieu du pole sera en M (2910) ; ainsi PQ : RV :: $\frac{bb - aa}{2} : b$. Mais l'équation de la précession, ou PEQ : PQ :: R : sin. 23° (3903) :: 1 : a; donc multipliant terme à terme, PEQ : RV :: $\frac{bb - aa}{2} : ab :: aa - bb : 2ab$: c'est la proportion qu'il y a par la théorie précédente entre la plus

grande précession, égale à l'angle REQ, et la nutation totale RV de 18″.

3741. Ainsi la théorie détermine le rapport entre la nutation observée en déclinaison et l'inégalité de la précession des équinoxes, en sorte que nous pouvons déterminer celle-ci par le moyen de la nutation. Si nous supposons avec Bradley que la nutation est de 18″, la plus grande équation de la précession sera 16″,8, et la force de la Lune sera 2,037.

3742. Mais si la nutation observée étoit de 19″, on auroit 17″,8 pour l'équation, et 2 ½ pour la force de la Lune, ainsi que je l'ai supposé (3568, 3735) : cette quantité peut s'accorder avec les observations de Bradley, pourvu qu'on y suppose seulement 1″ d'erreur ; mais les marées exigeroient que cette force fût 2,71 (3780) ; ainsi l'on ne peut les accorder exactement avec la quantité qu'exige la nutation. Si l'on se contente de prendre un milieu, on aura 2,37. Quoi qu'il en soit, la précession causée par le Soleil n'est pas de 21″, comme on le trouvoit autrefois (3727) : elle paroît plutôt de 16″ ; ce qui prouve que la Terre n'est pas homogene. Le degré d'aplatissement qu'on y observe prouve aussi la même chose (3746, 3764).

3743. Les 34″ de précession moyenne, qui sont l'effet de la Lune (3736), seroient produites d'une maniere aussi uniforme que celle du Soleil (3726), si la Lune étoit toujours à la même déclinaison quand elle répond au même point de l'équateur ; mais à cause du mouvement de ses nœuds (1488), il arrive que, dans ses différentes révolutions, elle s'éloigne plus ou moins de l'équateur, et agit sur lui avec plus ou moins de force. Quand le nœud ascendant est dans le Bélier, le plus grand éloignement de la Lune, par rapport à l'équateur, va jusqu'à 28° 30′ dans les lunistices ; mais quand le nœud ascendant est dans la Balance, neuf ans après, la Lune ne s'éloigne plus de l'équateur que de 18° 15′ à chaque révolution ; alors son attraction totale sur le sphéroïde, dans le cours d'une révolution, est beaucoup moindre, puisqu'on a vu qu'elle dépend du sinus *m* de la déclinaison (3705) ; c'est pourquoi la précession annuelle est si inégale dans l'espace de 18 ans, et la nutation si considérable.

3744. Ceux qui aiment à se former des idées indépendantes du calcul, pourront se faire ici une difficulté. Lorsque le nœud ascendant de la Lune est dans le Bélier, c'est alors que la Lune s'éloigne le plus de l'équateur, et qu'elle a le plus d'action pour changer le plan de l'équateur, et par conséquent l'obliquité de l'écliptique. Soit ♈ G ♎ l'écliptique (FIG. 306), ♈ M ♎ l'équateur, EG l'orbite de la Lune ; cette planete s'écarte beaucoup au nord de l'équateur quand

son nœud ascendant G est dans le Bélier; alors la Lune attire l'équateur terrestre de ce côté-là avec plus de force. Il semble qu'alors l'équateur EM devroit se rapprocher de l'écliptique ♈G; c'est cependant alors même que l'angle est le plus grand, et que l'obliquité de l'écliptique, au lieu d'être, par exemple, de 23° 28′ 0″, se trouve de 23° 28′ 9″.

3745. Mais ce n'est pas au point où agit la Lune sur l'équateur terrestre que le déplacement de l'équateur est sensible; c'est à 90° plus loin (3721). Ainsi quand la Lune, en parcourant la partie L A (FIG. 309), agit le plus sur l'équateur ♈ Q vers les points solstitiaux, c'est vers les équinoxes ♈ et ♎ que cet effet devient sensible; et il n'en résulte rien pour changer l'obliquité de l'écliptique ou la distance du point E de l'écliptique au point Q de l'équateur.

Mais si la Lune est en G (FIG. 306), à une certaine distance du colure NS, que OF exprime la force de la Lune pour incliner l'équateur et MO le mouvement diurne de l'équateur, il prendra une nouvelle direction MF, et il en résultera sur le colure des solstices NS un changement AS qui fait la nutation. Cet effet s'accumule pendant tout le temps que la Lune est éloignée de l'équateur; et comme elle s'en éloigne sur-tout quand le nœud ascendant est dans le Bélier, c'est alors que l'effet est le plus sensible; voilà pourquoi l'obliquité de l'écliptique est la plus grande. Mais ce ne sont là que des considérations vagues, dont on ne sauroit tirer des conséquences sans le secours des calculs rigoureux que j'ai détaillés ci-dessus, et qui sont d'accord avec les phénomenes. Ainsi la précession des équinoxes, celui de tous les phénomenes de l'attraction qui a donné le plus d'embarras aux géometres, et dont la cause paroissoit autrefois la plus difficile à comprendre, se trouve expliquée d'une maniere incontestable, et forme une nouvelle démonstration de cette loi générale du monde, comme je l'avois avancé (3528).

FIGURE DE LA TERRE

Suivant les loix de l'attraction.

3746. Nous avons prouvé, par observation, l'aplatissement de la Terre (2682); il faut le prouver actuellement par la théorie générale. Si la Terre étoit une masse fluide et homogene [a], elle auroit la figure d'un ellipsoïde, dont l'axe seroit plus petit de $\frac{1}{230}$ que le diamètre

[a] Homogene et hétérogene viennent de ὁμος *similis*, ἑτερος *alter*, γένος *genus*.

metre de l'équateur. Cette proposition, que Newton supposa, a été prouvée par Mac-Laurin dans sa piece sur le flux et le reflux, et par Clairaut (Théorie de la *Figure de la Terre*) : elle me donnera lieu d'expliquer les principes de l'hydrostatique et les attractions des sphéroïdes : il en résultera une introduction aux ouvrages des géometres qui ont approfondi cette matiere, tels que d'Alembert (*Recherches*, etc., partie II, *Opuscules*, etc.) ; Simpson (*Mathémat. Dissert.* 1743) ; Bouguer, Boscowich, etc., qui ont étendu leurs recherches plus loin que le cas du sphéroïde homogene et de la pesanteur ordinaire.

3747. La ligne du zénit, la ligne verticale, la ligne du fil à-plomb ou la direction de la pesanteur, est perpendiculaire à la surface de la Terre, quelle que soit la quantité de son aplatissement ; c'est un principe dont nous avons fait sentir la certitude, soit par l'expérience, soit par le raisonnement (2672), et qui sera nécessaire dans les démonstrations suivantes ; car nous supposerons que le sphéroïde est en équilibre dans toutes ses parties, lorsque la direction de la pesanteur est perpendiculaire à la surface du sphéroïde dans tous ses points, et que toutes les colonnes ont une égale pesanteur : cela est rigoureusement vrai, du moins pour la loi de pesanteur qui a lieu dans la nature.

3748. Pour démontrer que la figure elliptique convient à la Terre, en supposant une masse fluide homogene qui tourne sur son axe, il faut connoître si les attractions qui ont lieu en divers points de la surface d'un sphéroïde elliptique sont telles, qu'elles soient, dans tous les points, en équilibre avec la force centrifuge qui a lieu dans le même sphéroïde elliptique ; car si cela est, on sera certain que la figure du sphéroïde, tournant sur son axe, ne cessera point d'être une ellipse. Telle est la méthode de Clairaut que nous allons employer.

Nous commencerons par chercher l'attraction qu'un sphéroïde ANB (FIG. 310) exerce sur un corpuscule quelconque parallèlement au petit et au grand axe, afin d'ôter de celle-ci la force centrifuge, en conservant la premiere dans son entier. La maniere la plus simple de trouver cette attraction en N consiste à prouver qu'elle est égale à celle qu'un petit sphéroïde, décrit sur QH, exerceroit en Q. Pour y parvenir, nous supposerons deux sphéroïdes concentriques AMB, QSH, coupés obliquement par un plan ; les deux sections seront des ellipses semblables à celles des méridiens de chaque sphéroïde (3416). Supposons que le plan de ces deux ellipses ANB, QTH tourne autour de la tangente MQN, en faisant seulement

un angle infiniment petit ; ce mouvement produira des tranches ou solides infiniment minces : et nous allons démontrer que l'attraction de la grande tranche A N B M sur le corpuscule N est égale à l'attraction de la petite tranche Q T H S sur un corpuscule Q, l'une et l'autre considérées dans la direction du petit axe. Nous diviserons ces tranches en pyramides infiniment petites par des lignes QT, Qt, NK, Nk ; et nous allons montrer que la quantité de l'attraction de chacune est égale à la petite base divisée par la hauteur.

3749. Soit X la surface de la base d'une petite pyramide BD (FIG. 312) et Dd l'élément de cette pyramide, l'attraction de cet élément sera $\frac{X \cdot Dd}{BD^2}$; et mettant b pour $\frac{X}{BD^2}$, cette attraction sera $b \cdot Dd$. L'intégrale $b \cdot BD$ sera l'attraction de la pyramide entiere, ou, ce qui revient au même, $\frac{X}{BD}$.

3750. Supposons deux lignes QR et QT dans la petite ellipse (FIG. 310), également éloignées du petit axe QH, et dans la grande ellipse, deux lignes NK, NL paralleles aux lignes QR et QT ; que ces lignes soient les axes de quatre petites pyramides engendrées par le petit mouvement du plan des deux ellipses autour de la tangente NQM ; les attractions des deux pyramides égales QT et QR dans la direction QH, seront égales à celles des deux pyramides NL, NK dans une direction parallele à HR. En effet les pyramides sont semblables, les bases de ces pyramides sont proportionelles aux carrés de leurs longueurs, et les attractions sont proportionelles aux bases divisées par leurs longueurs ; elles sont donc proportionelles aux longueurs simples : or la somme des longueurs NL, NK est égale à celle de QT et QR (3847) ; ainsi la somme des attractions est la même pour les pyramides QT et QR ou pour les pyramides NL, NK. En décomposant ces attractions dans la direction QB, elles resteront égales, puisque les angles sont les mêmes par rapport à la ligne QH, ou à sa parallele tirée par N ; ainsi l'attraction des deux élémens QT, QR, selon QH, est égale à celle des deux élémens NL, NK dans la même direction.

On dira la même chose de tous les autres élémens dont la tranche est composée. Et lorsque QR et QT seront arivées à une inclinaison assez grande pour faire passer NL dans le segment MAN, on verra de même que les attractions des pyramides dont est composé le solide produit par la révolution de M A N M, étant retranchées des attractions des pyramides qui leur correspondent dans le solide produit par MBN, et qui sont opposées, le reste sera encore égal aux attractions des pyramides correspondantes dans le solide

produit par l'ellipse RQT ; donc l'attraction restante de la plus grande tranche sur le point N, dans la direction parallele à QB, sera encore égale à l'attraction de la petite tranche sur le point Q dans la direction QH.

3751. Corollaire. De là il suit que les deux sphéroïdes elliptiques semblables, et dont les tranches ci-dessus sont les élémens, exercent aussi une même attraction, l'un sur le point Q suivant QB, l'autre sur le point N dans une direction parallele à QB. Il en seroit de même si la tangente MQN de la petite ellipse étoit parallele au petit axe au lieu d'être parallele au grand axe, c'est-à-dire qu'on prît SD au lieu de QM ; l'attraction du petit sphéroïde sur le point S seroit égale à l'attraction du grand sphéroïde sur le point D, l'une et l'autre considérées dans une direction parallele au grand axe.

3752. Il n'en faut pas davantage pour démontrer que la figure d'une masse fluide, qui tourne sur son axe, peut être une figure elliptique[a] ; et pour cela nous allons démontrer d'abord que les attractions que nous avons déterminées dans un sphéroïde elliptique, combinées avec la force centrifuge qui est toujours parallele au grand axe du méridien ou perpendiculaire au petit axe, produisent une force qui est perpendiculaire à la surface du sphéroïde.

Soit E l'attraction du sphéroïde sur un corpuscule E (fig. 311) situé sous l'équateur (3761); nous calculerons bientôt sa valeur, qui est indifférente jusqu'à ce qu'on cherche la quantité d'aplatissement. Si l'attraction sur un corpuscule situé au pole égale à P (3758), la force centrifuge sous l'équateur = F, qui est $\frac{1}{288}$ de la pesanteur qu'on y éprouve (3543) ; il faut déterminer la pesanteur d'un point quelconque N pour savoir sur quelle ligne elle se dirigera : si c'est sur la perpendiculaire à la circonférence d'une ellipse, tout sera en équilibre, et cette perpendiculaire décidera de la courbure du sphéroïde.

[a] On ne connoît aucune autre figure avec laquelle l'équilibre soit possible. On a disputé pour savoir s'il n'y avoit pas d'autre figure qui pût convenir à la Terre (*Mém. acad.* 1772, 2e partie, pag. 554 ; Histoire, pag. 88). M. le Gendre et M. de la Place ont prouvé rigoureusement que, dans la supposition du sphéroïde homogene, l'ellipse est en effet la seule figure qui puisse avoir lieu (*Mém.* 1782, 1784). M. le Gendre l'a étendue, en 1790, à un sphéroïde dont les couches auroient différentes densités. D'Alembert, en 1768, dans ses Opuscules, observa qu'avec la même vîtesse de rotation, il y avoit deux aplatissemens différens qui pourroient également avoir lieu. Pour la Terre, le second seroit le cas où l'axe seroit seulement $\frac{1}{681}$ du diametre de l'équateur (M. le Gendre, *Mém.* 1784, pag. 386) : et cela peut servir à expliquer le grand aplatissement de l'anneau de Saturne (3774)

L'attraction en N, décomposée suivant NR, sera la même qu'elle seroit au pole X d'un sphéroïde semblable à PNE, qui auroit CX pour demi-axe (3751); donc $P\frac{CX}{CP}$ sera la force qui agit en N parallèlement à l'axe PC; car les attractions des corps semblables et homogenes sont comme les solides ou les cubes des rayons, quand on ne considere que les masses attirantes : elles sont en raison inverse des carrés des distances ou des mêmes rayons, quand on ne considere que les distances du centre à la surface ; donc en réunissant les deux circonstances, les attractions sont comme les simples rayons. De même l'attraction du sphéroïde PEp sur le point N dans la direction NX, sera la même qu'à l'équateur R d'un sphéroïde semblable où CR seroit le demi-diametre de l'équateur (3751); donc on aura $E \cdot \frac{CR}{CE}$ ou $E \cdot \frac{NX}{CE}$ pour l'attraction au point N suivant NX. Il faut retrancher de celle-ci seulement la force centrifuge $F \cdot \frac{NX}{CE}$, qui a lieu au point N (3542); donc $(E - F) \cdot \frac{NX}{CE}$ sera la force totale qui agit en N suivant NX, et qu'on peut exprimer par une ligne NV, la force perpendiculaire à celle-là étant exprimée par NS ou VT; la force composée, qui en résulte, est exprimée par une diagonale NT, qui, prolongée en G, rencontre l'axe Pp; et si XG est égale à la sous-normale dans le petit axe de l'ellipse, c'est-à-dire à $\frac{CE^2}{CP^2}CX$ (3408), il s'ensuit que la force totale du point N est dirigée suivant la normale, et par conséquent perpendiculaire à la surface de la Terre.

3753. Pour que XG soit la sous-normale, il suffit qu'on ait cette proportion, VT : NV :: XG : NX, c'est-à-dire $P \cdot \frac{CX}{CP} : \frac{NX}{CE}(E - F) :: \frac{CE^2}{CP^2} \cdot CX : NX$; ou, ce qui revient au même, $P : E - F :: CE : CP$; et dès lors la force d'un point quelconque ne dépend plus de sa situation, et les deux forces qui agissent en N, se réduisant à une force NT suivant la normale, ou perpendiculaire à la surface du sphéroïde, il tournera sans changer de figure, ce fluide ayant la forme d'une ellipse dont les axes sont comme P est à E — F.

Cette conclusion est certaine; car si les deux axes sont comme P est à E — F, la Terre tournera sans que la force centrifuge dérange rien à sa figure : or nous supposons un sphéroïde fluide tournant, et dont toutes les parties ont pris leur assiette, leur équilibre et leur niveau; donc, dans ce sphéroïde, on a les axes comme P est à E — F : nous en chercherons la valeur en calculant les attractions P et E au pole et à l'équateur d'un sphéroïde quelconque, et alors nous saurons

rons la quantité de l'aplatissement, par la quantité d'attraction; mais nous sommes assurés dès à présent que le rapport des axes sera celui de P à E — F.

3754. Pour mieux sentir la légitimité de cette conclusion, l'on peut renverser l'opération, et dire: supposons un ellipsoïde dont les axes CE, CP soient comme P : E — F, et multipliant les antécédens et les conséquens par les mêmes quantités, nous aurons $P \cdot \frac{CX}{CP} : \frac{NX}{CE} \cdot (E - F) :: \frac{CE^2}{CP^2} \cdot CX : NX$, c'est-à-dire que les forces VT et NV sont comme XG : NX, ou comme la sous-normale est à l'ordonnée de l'ellipse : donc la force composée se dirige le long de la normale ; donc la gravité est perpendiculaire à la surface ; donc il y a équilibre; donc la figure elliptique satisfait aux attractions calculées, pourvu que les axes soient comme P : E — F.

3755. Ainsi quand les différens points d'un cercle sont sollicités par des forces paralleles entre elles, et proportionelles aux ordonnées de ce cercle, comme cela arrive par la force centrifuge qui tend à éloigner les parties du cercle, il se change en une ellipse dont le grand axe est parallele à la direction de cette force étrangere; et comme tous les méridiens de la Terre sont dans le même cas, ils deviennent tous des ellipses, et la figure de la Terre qui en résulte se trouve comme formée ou engendrée par un méridien tournant autour du petit axe. Dans le cas des marées, nous verrons qu'une pareille force produit un sphéroïde alongé (3770).

3756. Pour que la figure de la Terre continue d'être une ellipse, dont les axes soient entre eux comme CE est à CP, il faut que la vîtesse de rotation soit telle, que, par la force centrifuge F, qui en résute, l'on ait cette proportion, P : E — F :: CE : CP ; alors toutes les colonnes peseront également ; il y aura sur toutes les parties du sphéroïde une pression perpendiculaire à la surface, égale dans tous les points, puisque, dans cette proportion, à laquelle nous sommes parvenus, il n'y a aucun terme qui dépende de la situation du point N : chaque partie n'aura donc d'autre mouvement que celui de rotation commun à toute la masse, et le sphéroïde elliptique tournera sur son axe sans changer de figure.

3757. Après avoir démontré que le sphéroïde homogene peut être elliptique, il faut trouver quelle sera la quantité de son aplatissement suivant la vîtesse de rotation qui est connue, et suivant la force d'attraction que le sphéroïde exerce sur des particules de matiere

situées au pole et sous l'équateur ; c'est-à-dire trouver le rapport des quantités P, E et F.

3758. *Trouver l'attraction d'un sphéroïde* P E p (FIG. 311) *sur un corpuscule* P *placé au pole.* Soit Am une portion infiniment petite du méridien PEM; ayant tiré les lignes PM, Pm et le petit arc M A perpendiculaire sur Pm, on imaginera que la courbe tourne autour de l'axe PCp d'une quantité infiniment petite; alors PMA formera une pyramide que l'on peut regarder comme un des élémens du sphéroïde entier, que la courbe PEp décriroit si elle faisoit une révolution complete. Soit l'angle infiniment petit, qui mesure le mouvement du plan PE$p = \alpha$, le rayon étant pris pour unité ; on aura $u\alpha$ égal à l'arc ou à la petite ligne droite décrite par le point M pendant le mouvement infiniment petit du plan PEMp autour de l'axe ; car un petit arc est égal au rayon multiplié par l'angle (3498); ce petit arc, l'un des côtés de la base de la pyramide, étant multiplié par l'autre côté MA, donnera la surface de la base de cette pyramide, $= u\alpha \cdot \text{MA}$; donc l'attraction de la pyramide suivant PC,

Demi-axes	$\text{CP} = 1$
	$\text{CE} = m = 1 + \delta$
	$mm - 1 = nn = 2\delta$
abscisse	$\text{PQ} = z$
ordonnée	$\text{QM} = u$
	cos. $\text{MPQ} = s$
	sin. MPQ $\sqrt{(1-ss)}$

sera $\frac{u\alpha s . \text{MA}}{\text{PM}}$ (3749); mais $\frac{\text{MA}}{\text{PM}} = \frac{ds}{\sqrt{(1-ss)}}$ (3448), parceque la différentielle MA d'un angle est au rayon PM comme la différentielle ds du cosinus s est au sinus; donc l'attraction de la petite pyramide sera $\frac{\alpha us\, ds}{\sqrt{(1-ss)}}$; dont il faut éliminer la lettre u pour mettre s à sa place, afin de n'avoir qu'une seule inconnue dans cette différentielle. Par la propriété de l'ellipse on a $u^2 = 2mmz - m^2 z^2$ (3385); d'un autre côté, le cosinus de l'angle $\text{MPQ} = \frac{\text{PQ}}{\text{PM}}$ (3803) $= \frac{z}{\sqrt{(zz+uu)}}$ $= s$, d'où l'on tire $zz = sszz + ssuu$, $zz = \frac{ssuu}{1-ss}$, ou $z = \frac{su}{\sqrt{(1-ss)}}$; substituant ces valeurs de z et de zz dans l'expression du u^2, on aura $u\left(1 + \frac{m^2 s^2}{1-ss}\right) = \frac{2mms}{\sqrt{(1-ss)}}$ et $u = \frac{2mms\sqrt{(1-ss)}}{1-ss+mmss}$; mettant nn à la place de $mm - 1$, et substituant cette valeur de u dans l'expression $\frac{\alpha us\, ds}{\sqrt{(1-ss)}}$; elle deviendra $\frac{2\alpha mmss\, ds}{1+nnss}$; faisant la division, on trouvera $2\alpha m^2 s^2\, ds - 2\alpha n^2 m^2 s^4\, ds$; car à cause de la petitesse de n^2, on néglige les termes suivans : l'intégrale est $\frac{2}{3}\alpha m^2 S^3 - \frac{2}{5}\alpha m^2 n^2 s^5$ (3438); c'est l'attraction de toute la partie MPp de la tranche elliptique. On fera $s = 1$, ce qui a lieu quand la ligne PM parcourra toute la demi-circonférence de l'ellipse pEP; et l'on aura l'attraction de

tous les élémens, ou de la tranche entiere formée par le petit mouvement de cette demi-ellipse. On fera aussi $\alpha = c$ (3498), et l'intégrale représentera l'attraction de toutes les tranches, qui, formant la circonférence entiere, composent le sphéroïde : cette intégrale devient alors $\frac{2}{3}cm^2 - \frac{2}{5}cm^2n^2$. A la place de m, qui est le rayon de l'équateur, mettons $1 + \delta$, en sorte que δ soit l'aplatissement de la Terre : comme c'est une fraction très petite du demi-axe CP, nous pourrons négliger le carré et les puissances ultérieures ; alors $m^2 = 1 + 2\delta$ (3423), et $nn = mm - 1 = 2\delta$; substituant ces valeurs, nous aurons pour l'intégrale précédente $\frac{2}{3}c + \frac{8}{16}c\delta = \frac{2}{3}c \cdot (1 + \frac{4}{5}\delta)$: c'est l'attraction d'un sphéroïde (dont le demi-axe est égal à 1 et l'aplatissement égal à δ) sur un corpuscule situé au pole. C'est cette quantité qui est appellée P dans les articles 3752, 3763.

3759. Si l'on suppose $\delta = 0$, comme cela arrive dans un globe dont le rayon est $CP = 1$, l'on aura $\frac{2}{3}c$ pour l'attraction de ce globe sur un corpuscule placé à sa surperficie. Cette attraction est proportionnelle à la circonférence ou au rayon du globe qui attire.

3760. *Trouver l'attraction que le même sphéroïde elliptique exerce sur un corpuscule placé sous l'équateur.* Soit PC le demi-axe (FIG. 313), CE le rayon de l'équateur, et la tangente EK parallele à l'axe PCR : supposons un plan qui passe par la ligne EK, et qui coupe le sphéroïde ; la section sera une ellipse semblable à l'ellipse EPAR (3417), parceque ce plan, étant parallele à l'axe PR de la Terre, est nécessairement parallele à quelqu'un des méridiens qui se coupent tous sur l'axe PR. Si l'on prend $EH = PR$, et qu'on suppose sur le diametre EH une sphére coupée de même par des plans qui passent par la ligne EK, ces plans formeront une infinité d'élémens ou de tranches infiniment minces en tournant autour de la ligne EK. Nous allons chercher la proportion qu'il y a entre l'attraction d'un des élémens de la sphere et l'attraction de l'élément correspondant du sphéroïde, et nous en déduirons l'attraction du sphéroïde, au moyen de ce que nous connoissons celle de la sphere (3759).

$CQ = EK = u$
$NK = z$
Sin. $NEC = s$
Cos. $NEC = \sqrt{(1 - ss)}$

3761. Si l'ellipse EPAR fait un mouvement infiniment petit, en décrivant un petit angle α autour du point E et de la ligne EK, elle coupera sur le sphéroïde une tranche elliptique infiniment mince, dont l'élément ou la différentielle est une petite pyramide ENL ; le petit mouvement du point N pendant le même temps lui fera décrire une petite ligne droite, ou plutôt un petit arc dont la valeur est l'angle α multiplié par le rayon

NK, ou αz (3498); c'est un des côtés de la base de cette pyramide, l'autre côté est NL : ainsi la surface de la base sera $\alpha z \cdot NL$; l'attraction de la pyramide sera donc (3749) $\frac{\alpha z \cdot NL}{EN} \cdot \sqrt{1 - ss}$ dans la direction EC ; mais $\frac{NL}{EN}$ est le petit angle NEL (3498), ou la différentielle de l'angle NLC ; et la différentielle de l'angle, multipliée par le cosinus, est égale à la différentielle du sinus (3446) ; donc on aura $\frac{NL}{NE} \cdot \sqrt{1 - ss} = \partial s$: ainsi l'attraction de la pyramide ENL se réduira à $\alpha z \partial s$, dont il faut éliminer la lettre z, ou la valeur de NK.

Par la propriété de l'ellipse, $PQ \cdot QR : QN^2 :: PC^2 : CE^2$ (3385); donc $1 - uu : zz - 2mz + mm :: 1 : mm$; donc $uu = \frac{2mz - zz}{mm}$. Le sinus de l'angle NEC ou ENK est égal à $\frac{EK}{NE} = \frac{u}{\sqrt{(uu + zz)}} = s$: de ces deux équations on tirera aisément une valeur de z en s ; car puisque $s = \frac{u}{\sqrt{(uu + zz)}}$, $uu = \frac{sszz}{1 - ss}$; donc égalant les valeurs de uu, l'on a $\frac{2mz - zz}{mm} = \frac{sszz}{1 - ss}$; $2m \cdot (1 - ss) - z(1 - ss) = m^2 s^2 z$; donc $z = \frac{2m(1 - ss)}{1 + mmss - ss}$, et comme $mm - 1 = nn$, $z = \frac{2m(1 - ss}{1 + nnss}$; substituant cette valeur de z dans $\alpha z \partial s$, ou multipliant la valeur de z par $\alpha \partial s$, on aura l'attraction $= \frac{2m\alpha(1 - ss)\partial s}{1 + nnss}$. Si l'on réduit en série cette fraction, en négligeant le carré nn (3421), on aura l'attraction de la petite pyramide $= 2m\alpha(1 - ss) \cdot (1 - nnss)\partial s = 2m\alpha \cdot (1 - ss - nnss + nns^4)\partial s$, dont l'intégrale (3438) est $2m\alpha \cdot \left(s - \frac{s^3}{3} \Big| - \frac{nns^3}{3} + \frac{nns^5}{5}\right)$; c'est l'attraction de la tranche décrite par le secteur AEN. Si l'on fait $s = 1$, l'on aura l'attraction de la tranche sémi-elliptique décrite par ERA, $2m\alpha\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{15}nn\right)$. Substituant pour m sa valeur $1 + \delta$ (3758) et pour nn sa valeur 2δ, elle deviendra $2\alpha\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5}\delta\right)$. Si l'on fait $\delta = 0$, l'on aura l'attraction d'une tranche sémi-circulaire infiniment mince, qui seroit décrite de la même façon par le mouvement du demi-cercle, dont EH seroit le diametre, et cette attration est $\frac{4}{3}\alpha$.

3762. Le rapport entre les attractions d'une sphere décrite sur EH et du sphéroïde ERAP est le même que celui de leurs élémens, puisqu'ils ont le même nombre d'élémens; ainsi les attractions totales sont entre elles comme l'attraction de la tranche sémi-elliptique est à celle de la tranche sémi-circulaire, c'est-à-dire comme $2\alpha\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5}\delta\right)$ est à $\frac{4}{3}\alpha$; ou comme $1 + \frac{3}{5}\delta$ est à 1 ; donc il suffira de multiplier l'at-

traction de la sphere que l'on sait être égale à $\frac{2}{3}c$ (3759) par $1+\frac{3}{5}\delta$, pour avoir celle du sphéroïde, qui sera par conséquent $\frac{2}{3}c(1+\frac{3}{5}\delta)$; c'est la quantité que nous avons appellée E (3752). Les quantités P et E sont calculées dans le livre de Clairaut, sans supposer que le carré de δ soit une quantité négligeable ; mais j'ai cru pouvoir omettre ici tout ce qui rendroit le calcul plus compliqué sans donner dans le résultat un centieme de différence.

3763. Au moyen des valeurs de P et de E, nous pouvons connoître l'aplatissement de la Terre. Pour que le sphéroïde elliptique tourne sur son axe sans changer de figure, il faut qu'on ait cette proportion (3756), $P : E - F :: CE : CP$, ou $\frac{2}{3}c(1+\frac{4}{5}\delta) : \frac{2}{3}c(1+\frac{3}{5}\delta) - F :: 1+\delta : 1$, d'où il est aisé de tirer la valeur de F; nous négligerons le carré de δ, ainsi que le produit de F par δ, qui sont considérablement plus petits que F, et nous aurons $F = \frac{2}{3}c \cdot \frac{4}{5}\delta$; c'est l'expression de la force centrifuge, en supposant connu l'aplatissement de la Terre. La force centrifuge sous l'équateur est $\frac{1}{288}$ de la pesanteur qu'on y observe (3543). Appellons Φ cette fraction $\frac{1}{288}$, nous aurons $\Phi = \frac{F}{E-F}$; car alors $F = 1$; la pesanteur primitive $E = 289$, celle qu'on observe, ou $E - F$, $= 288$. Substituant les valeurs de E et de F en δ, et négligeant les puissances de δ, l'on aura $\Phi = \frac{4}{5}\delta$, ou $\delta = \frac{5}{4}\Phi = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{288} = \frac{1}{230}$ (a). Donc l'aplatissement de la Terre doit être $\frac{1}{231}$ du rayon de l'équateur en vertu des loix de l'attraction, si la Terre est homogene et qu'elle ait été fluide dans le principe.

En appliquant ces formules à Mars, on trouveroit $\frac{1}{195}$ pour son aplatissement (3344).

3764. Newton trouvoit aussi $\frac{1}{230}$ pour l'aplatissement de la Terre (L. III, prop. 19, *pag.* 87) : c'est la quantité employée pour le calcul des degrés et des rayons de la Terre, dans les tables de Berlin.

Les observations du pendule simple (2710) donnent une quantité beaucoup plus forte pour la différence des pesanteurs, qui seroit aussi l'aplatissement de la Terre si elle étoit homogene : et Newton avoit déja remarqué que ces observations donnoient un aplatissement plus fort que $\frac{1}{230}$ (T. III, *pag.* 112). Je trouve en effet $\frac{1}{181}$ par l'observation de Maupertuis en Lapponie, et $\frac{1}{185}$ par celle de M. Lyons au Spitzberg. Si la Terre étoit homogene, l'alongement du pendule seroit de $1^{li}.87$, et les expériences donnent $2^{li}.38$, qui font $3'54''$ de temps : ainsi l'augmentation de pesanteur est plus considérable que suivant la théorie. Cela paroît prouver que la Terre n'est pas homogene,

(a) Au lieu de 230, on trouve 230,61, quand on calcule plus rigoureusement la force centrifuge.

et nous avons vu que la précession semble indiquer la même chose. M. Boscovich, en partant d'une différence de $2^{li.}$,49 ou $\frac{1}{176}$ sur le pendule, et supposant dans l'intérieur de la Terre un noyau sphérique, également dense à égales distances du centre, trouve que l'aplatissement seroit $\frac{1}{335}$, tandis que la combinaison des différens degrés mesurés lui donne $\frac{1}{341}$ (*Voyage astronom.*, pag. 469, 512); et il s'en tient à $\frac{1}{335}$. Newton supposoit que l'augmentation de pesanteur et l'aplatissement étoient toujours d'accord ; mais cela n'est vrai que pour un sphéroïde homogene ; et il paroît que la Terre est plus dense vers le centre : or Clairaut a fait voir, dans une théorie savante et curieuse, qu'en supposant la Terre composée d'une infinité de couches elliptiques, dont les densités et les ellipticités varient d'une maniere quelconque, l'augmentation de pesanteur doit différer de $\frac{1}{230}$, autant que l'aplatissement, mais l'un en plus et l'autre en moins (*Fig. de la Terre*, p. 243 - 249).

D'après cela, M. de la Place trouve que la diminution de pesanteur observée indiqueroit pour l'aplatissement $\frac{1}{321}$ (*Mém. académ.* 1783, pag. 34); et par une théorie plus générale (*Mém.* 1782), il prouve que l'aplatissement $\frac{1}{321}$ peut satisfaire aux pendules, à la précession et aux parallaxes, sans satisfaire aux degrés : les mesures du degré lui paroissent mieux représentées par $\frac{1}{250}$ d'aplatissement ; mais il est obligé d'en rejeter plusieurs (*Mém.* 1783, pag. 23).

En combinant les expériences du pendule qui donnent pour différence de pesanteur $\frac{1}{185}$, il s'ensuit que l'aplatissement est $\frac{1}{302}$, tandis que les degrés de France et du Pérou donnent $\frac{1}{304}$, et la combinaison des six degrés qui s'accordent le mieux, faite par Boscovich, donne $\frac{1}{297}$ (*pag.* 509). Il me semble donc que l'aplatissement supposé $\frac{1}{300}$ avec l'augmentation de densité en approchant du centre de la Terre, est le résultat le plus vraisemblable qu'on puisse adopter (*Mém.* 1785, pag. 1 - 8); il satisfait aussi mieux à la précession (3727); ainsi je n'ai pas cru pouvoir conserver dans mes tables l'aplatissement employé par Newton, ni pour la parallaxe, ni pour les degrés de la Terre, quoique les astronomes anglois continuent de s'en servir. Au reste il est aisé de comprendre que la grande compression des parties voisines du centre, et le défaut de fluidité parfaite, ont dû empêcher que la Terre ne prît toute la quantité d'aplatissement que la force centrifuge auroit produite dans un corps parfaitement fluide et homogene. Quoi qu'il en soit, on peut regarder l'aplatissement de la Terre et celui de Jupiter (3345) comme une nouvelle démonstration de son mouvement (1084), et en même temps de la théorie de l'attraction.

DU FLUX ET DU REFLUX DE LA MER.

3765. La théorie de la figure de la Terre conduit naturellement à celle du flux et du reflux de la mer, parceque les marées viennent d'un changement dans la figure de notre globe, produit par une force étrangere qui suit la même loi.

Il y a dans les marées deux phénomenes principaux extrêmement remarquables; le premier revient deux fois le jour; le second deux fois le mois. Tous les jours au passage de la Lune par le méridien, ou quelque temps après, on voit les eaux de l'océan s'élever sur nos rivages. A Saint-Malo cette hauteur va jusqu'à 50 pieds: parvenues à cette hauteur, les eaux se retirent peu à peu: environ 6 heures après leur plus grande élévation, elles sont à leur plus grand abaissement; après quoi elles remontent de nouveau, lorsque la Lune passe à la partie inférieure du méridien: en sorte que la haute mer et la basse mer, le *flot* et le *jusant*, s'observent deux fois le jour, et retardent chaque jour de 50′ 28″ et un tiers, comme le passage de la Lune au méridien, plus ou moins, suivant les inégalités de la Lune. Il faut distinguer ce retardement du passage de la Lune de celui qui a lieu en 24 heures, qui n'est que de 48′ 45″,7; on le trouve en disant $29\frac{1}{2}$ jours sont à 24 heures comme 24^h 50′ sont à 50′ 28″, 33, retardement des marées.

Le second phénomene consiste en ce que les marées augmentent sensiblement au temps des nouvelles lunes et des pleines lunes, ou un jour et demi après.

Un troisieme phénomene des marées est l'augmentation qui arrive quand la Lune est périgée, et il est encore fort sensible (3781).

3766. On a coutume d'ajouter un quatrieme phénomene, qui est celui des grandes marées des équinoxes; mais les vents y influent beaucoup, comme je l'ai fait voir dans mon *Traité du Flux et du Reflux de la mer*, publié en 1781, dont les articles suivans ne seront qu'un extrait; cependant il paroît que les marées augmentent un peu dans les équinoxes, par l'action du Soleil et de la Lune.

3767. Hérodote, en parlant de la mer rouge, et Diodore de Sicile (*pag.* 174), font mention d'un flux grand et rapide, mais sans rien dire de la cause. Le premier des Grecs qui fit attention à la cause des marées fut Pytheas de Marseille (312); il avoit été dans la Grande-Bretagne, comme le dit Strabon, et il avoit dû y observer les marées de l'océan. Plutarque nous apprend qu'il les regardoit, en effet, comme étant réglées en quelque sorte par la Lune.

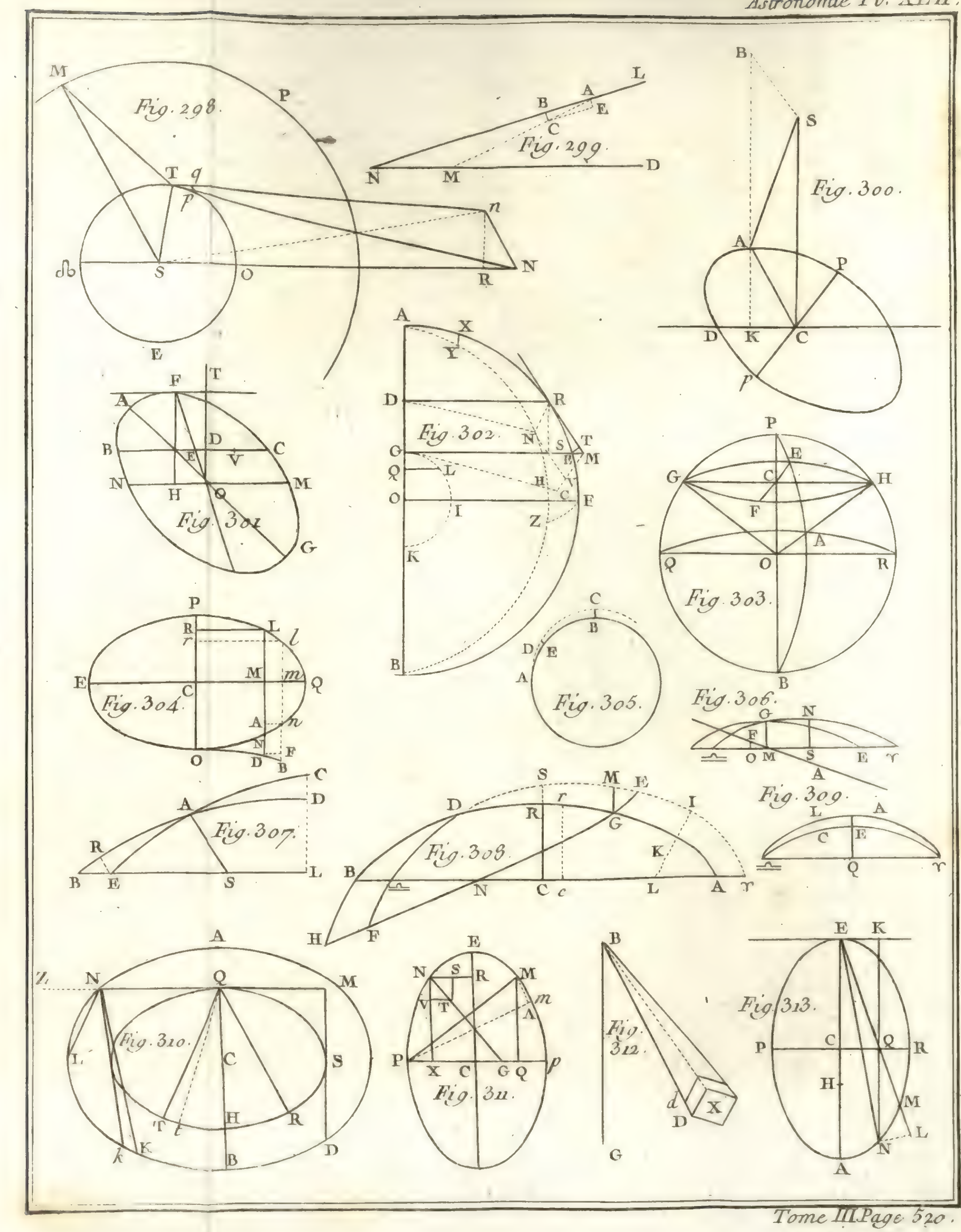
Cependant Aristote, dans la multitude de ses ouvrages de physique, faits 300 ans avant notre ere, ne parle presque pas des marées; on n'y trouve que trois passages fort courts à se sujet. Quinte-Curce parle de l'étonnement que la marée causa à Alexandre dans les Indes; et cela même fait voir combien les Grecs étoient peu instruits à cet égard.

3768. Ce fut au temps de César que les Romains, instruits par leurs conquêtes, commencerent d'avoir des connoissances dans cette partie de la physique : César en parle dans ses *Commentaires* (L. IV); Strabon explique, d'après Posidonius, que le mouvement de l'océan imite celui des cieux, qu'il y a un mouvement diurne, un menstruel, un annuel; que la mer s'éleve quand la Lune est dans le méridien, soit au-dessus soit au-dessous de l'horizon, et qu'elle est basse au lever et au coucher de la Lune; que les marées augmentent dans les nouvelles et dans les pleines lunes, et dans le solstice d'été (Strabon, Liv. III, *pag.* 173).

Pline explique non seulement les phénomenes, mais la cause, quand il dit (Liv. II, cap. 97): *Causa in Sole Lunaque... ut ancillantes sideri avido trahentique secum haustu maria*, etc. Séneque en parle d'une maniere exacte (*Quaest. nat. III,* 28, *Quare bonis viris mala accidant,* c. 1). Macrobe, auteur du quatrieme siecle, décrit très bien les mouvemens de l'océan, à l'occasion de la période de 7 jours (*Somn. Scip.* I, 6).

Les différentes manieres dont on a cherché en différens temps à expliquer l'effet de la Lune sur les marées sont si peu satisfaisantes que je ne crois pas devoir même les indiquer. *Voy.* Plutarque, *de Plac. phil.*, Liv. III, c. 17; Galilée, *de Syst. mundi,* Dial. 4; Riccioli, *Almag. II,* pag. 374; Gassendi, *Oper. II,* pag. 27. Je passe à l'explication de Képler, qui le premier apperçut l'effet de l'attraction universelle dans les marées; il en parle d'une maniere éloquente dans deux ouvrages, *de Stella Martis* (1206), *Epitome astr.*, pag. 555, comme je l'ai déja rapporté (3521).

3769. Newton, après la découverte du principe et de la loi de l'attraction, apperçut facilement les effets que le Soleil et la Lune devoient produire sur les marées, et il traita cette matiere, dans son livre des *Principes,* avec sa supériorité ordinaire. Enfin l'académie des sciences, ayant résolu, vers 1738, de traiter et d'approfondir toutes les parties du systême du monde, que Newton n'avoit pu épuiser, proposa pour le prix de 1740 la question des marées : les pieces de Daniel Bernoulli, Euler et Mac-laurin, qui partagerent le prix, sont d'excellens traités sur cette matiere; elles sont dans le troisieme volume



lume de l'édition de Newton, que j'ai coutume de citer; mais je vais démontrer avec bien plus de simplicité les circonstances générales des marées, sans supposer autre chose que ce que j'ai déja démontré.

3770. La premiere chose qui se présente à démontrer, c'est que l'attraction de la Lune, agissant sur une couche de fluide très mince, qui environne un globe, doit faire prendre à ces eaux une figure elliptique [a]. Mac-laurin le démontra d'une maniere ingénieuse, dans la piece que j'ai citée; Clairaut imita sa méthode, dans sa *Théorie de la Figure de la Terre* (3746); et il est aisé d'appliquer aux marées la démonstration que j'ai donnée de l'ellipticité de la Terre. Pour cela il suffit de considérer trois choses; 1°. la force du Soleil S (FIG. 300), ou de la Lune, sur un point A de la Terre, est proportionelle à la distance AK de ce point au plan DC, perpendiculaire au rayon lunaire (3698); elle est donc proportionelle à des lignes paralleles à la ligne des centres CS, dirigée vers le Soleil ou vers la Lune; 2°. la force centrifuge, que nous avons considérée quand il étoit question de la figure de la Terre, étoit également proportionelle aux rayons des paralleles ou aux distances à l'axe de la Terre dans les différens points du méridien, et parallele au grand axe de l'ellipse (3542, 3752); 3°. une force dont la direction s'exerce ainsi par des lignes paralleles, dans les différens points d'une sphere, et dont l'intensité est proportionelle aux mêmes lignes, change la sphere en une ellipse dont le grand axe est parallele à la direction de cette force étrangere (3752): il en sera donc des eaux de la mer, par l'action du Soleil, comme de la Terre par l'action de la force centrifuge; il en résultera que le cercle se changera en ellipse. Dans la Terre, c'est un sphéroïde aplati; ici c'est un sphéroïde alongé, parceque le grand axe de l'ellipse, ainsi formé par la force étrangere, ne tourne pas autour de son petit axe pour former un sphéroïde aplati, comme dans l'article 3755. Au contraire les parties qui sont autour de la ligne dirigée vers le Soleil comme vers un point fixe, prennent toutes la même forme, ainsi que tous les cercles de la Terre qui ont leur commune section dirigée vers l'astre, et il en résulte un sphéroïde alongé par les deux extrémités opposées.

3771. Ainsi les eaux, disposées en sphéroïde alongé, s'élevent non seulement vers le côté où est l'astre qui les attire, mais encore du côté opposé, parceque, si l'astre attire les eaux plus qu'il n'attire le centre de la Terre, il attire aussi le centre de la Terre plus qu'il n'at-

[a] Cette force, quoique très petite, est sensible par les marées; on pourroit peut-être aussi la rendre sensible sur un corps terrestre, en le suspendant à un ressort spiral très libre et très sensible, suivant l'idée de Franklin.

tire les eaux inférieures, et celles-ci restent en arriere du centre autant que les eaux supérieures vont en avant du côté de l'astre qui les attire (3588). Cette hypothese d'un sphéroïde elliptique est celle que Daniel Bernoulli a suivie pour l'explication de tous les phénomenes des marées, et je l'ai suivie à son exemple dans le traité dont je donne ici l'abrégé. Euler, d'Alembert et M. de la Place (*Mém.* 1775, 1776) ont été plus loin, et ont donné des méthodes plus savantes, pour y faire entrer la théorie des oscillations des fluides. On en trouvera un extrait dans le livre de M. Cousin, *pag.* 212 et suiv.

3772. Le degré d'ellipticité d'un pareil sphéroïde est égal à $\frac{5}{4}$ de la force qui le produit, considérée au point où elle est la plus grande (3763). Ainsi quand nous aurons déterminé la force attractive d'un astre, nous la multiplierons par $\frac{5}{4}$ pour avoir l'alongement que cette force produit, c'est-à-dire la différence des demi-axes.

3773. La force perturbatrice du Soleil sur les eaux de l'océan, au point où elle est la plus grande, ou quand AK = 1 (3625, 3696), est égale à $\frac{3M}{CS^3}$, c'est-à-dire la masse du Soleil multipliée par 3, et divisée par le cube de la distance, ou multipliée par le cube du sinus de la parallaxe du Soleil. Je suppose donc la masse du Soleil 351886 (3559), sa parallaxe 8″6, et le rayon moyen de la Terre 3270000 toises (2701); je le reduis en pouces, en le multipliant par 72; et, en faisant le calcul ci-contre, je trouve que l'aplatissement de ce sphéroïde, ou $\frac{15}{4}\frac{M}{CS^3}$, est de 22 $\frac{1}{2}$ pouces. C'est la quantité dont la force seule du Soleil est capable d'élever les eaux de la mer sous l'équateur.

Masse du Soleil, logar.	5,54642
Sin. 8″6 cubé	[illegible] 8[illegible]022
Rayon de la Terre . .	[illegible],51448
3·72 ou 216 . .	2,33445
$\frac{5}{4}$	0,09691
Marée 22,5	1,35248

Newton, Bernoulli et Mac-laurin ont suivi cette méthode, et ont trouvé le même résultat. Euler et d'Alembert n'ont fait entrer dans leur calcul que la force Π perpendiculaire à la gravité, et ils se sont trompés en négligeant l'action du sphéroïde lui-même; aussi ils ont trouvé $\frac{3}{2}$ au lieu de $\frac{15}{4}$, et cela ne feroit que 9 pouces de marée (d'Alembert, *Encyclopédie,* au mot *Flux,* T. VI, *pag.* 907; et Euler, T. III de Newton, *pag.* 306). Simpson trouve $\frac{5}{2}$ en employant aussi la force tangentielle, et cela donne 15 pouces (*Mathém diss.* 1743, *pag.* 39): mais la méthode que je viens d'expliquer est certainement exacte; au reste c'est de l'observation qu'il faudra toujours emprunter la quantité absolue de la marée; d'ailleurs celle que donne la théorie précédente se trouveroit bien plus grande si l'on considéroit l'augmentation de densité qui a lieu vers le centre (3764). Dans l'état phy-

sique, cette marée doit être diminuée par l'inertie des eaux, par le défaut d'étendue des mers, par la résistance et le frottement du fond : aussi quoique l'effet du Soleil soit joint à celui de la Lune, trois fois plus fort dans certains temps, la marée totale n'est que de 3 pieds dans les mers libres, comme à l'isle de Ste-Hélene, au Cap de Bonne-Espérance, aux Phippines, aux Moluques, et dans la mer du Sud : mais elle est souvent augmentée par l'obstacle et la situation des côtes, puisqu'à S.-Malo il y a jusqu'à 50 pieds de marée.

3774. Ce n'est pas précisément vers le Soleil ou vers la Lune qu'est dirigé le sommet de cet ellipsoïde aqueux, car on observe que la marée n'arrive qu'environ $2^h\frac{1}{2}$ après leur passage au méridien dans les mers libres; c'est ainsi que la Caille l'a observé au Cap (*Mém. acad.* 1751) ; M. Maskelyne à $2^h\frac{1}{4}$ à l'isle de Ste-Helene (*Phil. Trans.* 1762). C'est en Poitou 3^h, en Bretagne 4^h, à S.-Malo 6^h, à Caen et au Havre 9^h, à Dieppe $10^h\frac{1}{2}$, à Dunkerque 12^h. L'inertie des eaux et la résistance du fond produisent ce retard ; le flot ne fait que 20 lieues par heure sur nos côtes, et la même marée qui devroit arriver le matin à Dunkerque n'y arrive que le soir; celle du matin appartient au jour précédent. L'heure de la pleine mer, le jour de la nouvelle lune, s'appelle l'*établissement du port;* on en trouvera la table pour tous les pays, dans les livres de navigation, tels que ceux de Bouguer, de Robertson, et dans mon *Traité du Flux et du Reflux de la mer.*

Il paroît aussi par les marées de chaque mois que le sommet du sphéroïde aqueux, au lieu d'être dirigé vers l'astre attirant, reste en arriere d'environ 20°, et que les effets n'arrivent qu'un jour et demi après la cause qui les produit (*Traité du Flux,* pag. 44, 46).

3775. Dans une ellipse peu aplatie, les excès des rayons sur le petit demi-axe sont comme les carrés des sinus des distances au petit axe (2693) ; ainsi le sphéroïde aqueux faisant successivement, avec le Soleil, tout le tour de la Terre, les pays situés sous le grand axe seront inondés; ceux qui seront sous le petit axe auront basse mer, et la différence entre la basse mer et la hauteur de l'eau pour un moment quelconque sera la différence entre le rayon qui passe au lieu donné, et le petit axe de l'ellipse.

La hauteur de la marée au-dessus des basses eaux, en un lieu quelconque, est donc égale à la plus grande hauteur de l'eau multipliée par le carré du cosinus de la distance de l'observateur au sommet de l'ellipsoïde, qui, suivant notre théorie, est de la distance entre le zénit du lieu et l'astre qui produit la marée, en supposant l'ellipsoïde dirigé à l'astre même; ainsi la plus basse mer arrive quand l'astre est à l'horizon, et la plus haute mer quand l'astre est au méridien.

3776. De là il suit que si le lieu donné et l'astre qui produit la marée sont tous deux sous l'équateur, la hauteur de la marée est comme le carré du cosinus de l'angle horaire, et l'élévation croît à-peu-près comme les carrés des temps aux environs du méridien ; c'est aussi ce que l'observation a fait voir (*Mém. acad.,* 1720, *pag.* 360).

3777. Si le lieu donné est éloigné de l'équateur, la hauteur de la marée est comme le carré du cosinus de la latitude ; mais aussitôt que la latitude est assez grande pour que la Lune ne se couche point dans certains temps, il n'y a plus qu'une seule marée dans les 24 heures, parceque la Lune n'approche qu'une fois de l'horizon. Sous le pole même, il n'y a point de marée diurne, puisque la Lune reste sensiblement pendant toute la journée à la même distance du zénit, et le sphéroïde aqueux tourne sans s'élever à une heure plus qu'à une autre. Dans les autres cas, il y a deux marées ; l'une répond à-peu-près au passage supérieur de la Lune par le méridien, l'autre au passage inférieur : elles sont fort inégales suivant notre hypothese ; mais, dans l'état physique des choses, la plus petite marée est augmentée par la plus grande. C'est sur-tout à cet égard qu'on est obligé de recourir à la théorie des oscillations des fluides (3771), dont les équations ont été résolues depuis quelques années.

3778. Si l'astre n'est pas dans l'équateur, la marée, pour un pays situé sous l'équateur, sera comme le carré du cosinus de la déclinaison, parceque cette déclinaison sera elle-même la distance de l'astre au zénit, ou la distance du point donné au sommet de l'ellipsoïde.

Si le lieu donné n'est pas dans l'équateur, la marée supérieure sera la plus grande, suivant cette théorie, quand l'astre passera le plus près du zénit, c'est-à-dire quand la déclinaison de l'astre sera du côté du pole élevé. Soit D le pole (FIG. 340), GF le parallele de l'astre ; quand il passera en G, le sommet du sphéroïde sera le plus près du zénit Z ; mais quand l'astre passera en F, le sommet opposé du sphéroïde aqueux sera en B ; ainsi la marée inférieure sera plus petite que quand l'astre étoit dans l'équateur M, parceque le point B, opposé à l'astre, sera plus éloigné du zénit que l'équateur M, quand l'astre sera dans la partie inférieure F du méridien. En prenant un milieu entre la marée supérieure et la marée inférieure que donne ce calcul, on trouve, dans les équinoxes, une marée plus forte que dans les solstices, à moins que la latitude du lieu ne soit très grande.

3779. L'on observe que les marées en Europe sont souvent plus grandes en effet dans les équinoxes que dans les solstices ; cela vient aussi pour une partie des vents du sud et de l'ouest, qui sont très communs dans les temps des équinoxes. J'ai fait voir que l'action du vent

peut transporter la masse des eaux de la mer d'environ un pied et demi à Brest plus haut ou plus bas que sa situation naturelle, tandis que l'action de la Lune s'exerce sur ce volume ainsi déplacé, et produit une marée d'une grandeur ordinaire (*Traité du Flux*, pag. 104).

J'ai fait voir aussi, d'après un grand nombre d'observations et de témoignages, que les marées extraordinaires, ou les plus fortes, ne sont pas arrivées dans les équinoxes (*Traité du Flux*, pag. 88 et 89); mais M. de la Place trouve, d'après la théorie des oscillations des fluides, que les marées des équinoxes doivent être les plus grandes, par une raison semblable à celle qui rend presque égales les deux marées d'un même jour (*Mém.* 1775, *pag.* 170): et les observations paroissent confirmer cette théorie; car en prenant, parmi la collection d'observations que j'ai publiées, l'étendue des marées quatre fois à chacune des deux syzygies qui avoisinent chaque équinoxe et chaque solstice, M. de la Place trouve, pour la marée moyenne des équinoxes à Brest, deux pieds de plus que pour celle des solstices.

3780. Les marées dépendent des attractions du Soleil et de la Lune. Dans les syzygies, c'est-à-dire les nouvelles lunes et les pleines lunes, le sphéroïde aqueux produit par la force du Soleil, et celui qui est produit par la force de la Lune, sont dirigés dans le même sens; ainsi l'alongement du sphéroïde est égal à la somme des alongemens que le Soleil et la Lune sont capables de produire séparément; mais dans les quadratures, les axes de ces deux sphéroïdes sont à angles droits, et le grand axe du sphéroïde solaire augmente le petit axe du sphéroïde lunaire. Ainsi les marées des syzygies sont la somme des effets du Soleil et de la Lune, tandis que les marées de la quadrature sont la différence. Les hauteurs des marées peuvent donc nous faire connoître le rapport des forces du Soleil et de la Lune. Bernoulli apprit qu'à S.-Malo la mer varioit de 50 pieds dans les marées moyennes des syzygies, et de 15 pieds dans celles des quadratures; il en conclut que le rapport des forces du Soleil et de la Lune étoit celui de 7 à 13; et, après avoir examiné diverses observations, sur-tout les intervalles des marées (3782), il jugea que la force de la Lune est $2\frac{1}{2}$ fois celle du Soleil dans les moyennes distances. Soit donc a = l'effet de la Lune b = l'effet du Soleil, on a la somme a+b et la

J'ai calculé un grand nombre de hauteurs des marées faites à Brest; j'ai trouvé par un milieu que les marées moyennes sont de $18^{pi.}\ 3^{po.}$ dans les syzygies, et $8^{pi.}\ 5^{po.}$ pour les quadratures; ainsi l'effet du Soleil est de $4^{pi.}\ 11^{po.}$, celui de la Lune $13^{pi.}\ 4^{po.}$, c'est-à-dire 2,7 par rapport à celui du Soleil; mais la nutation observée donne une force plus petite (3735, 3742).

La Place fait les marées moyennes à Brest = 18,13 pieds ... et 8,671 pieds pour les quadratures (Exposit. du Système du monde Tome I. p. 137.).

$a = 18^{pi.}\ 3^{po.}$
$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = 9^{pi.}$ ...
$\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = (9^{pi.}$ ...

On ne fait qu'ajouter l'effet du Soleil à celui de la Lune pour avoir l'effet total, et il est aisé de sentir la légitimité de ce procédé. Supposons que les eaux dont la forme circulaire est FMP (FIG. 333) sont changées en une forme elliptique LBD par l'action du Soleil, qui les souleve de deux pieds; si la masse ou la force du Soleil triploit, il produiroit évidemment une élévation de 6 pieds; si au lieu de tripler le Soleil, on ajoute la force de la Lune double de celle du Soleil pour produire quatre pieds d'élévation, on aura également six pieds; ainsi l'alongement total est la somme des deux effets du Soleil et de la Lune.

De même si les eaux ont déja pris, par l'action de la Lune, la forme ovale LBD, alongée de quatre pieds, et que le Soleil vienne y ajouter un effet de deux pieds, il produira dans chaque point du sphéroïde LBD une augmentation égale à celle qu'il auroit produite s'il eût trouvé les eaux disposées sphériquement : il les fera monter de la même quantité, soit qu'elles aient une figure exactement ronde, ou qu'elles soient disposées sur un sphéroïde déja formé, mais qui ne differe de la sphere que de quatre pieds sur 1432 lieues de rayon. Cet alongement n'a lieu que parcequ'il y a des parties de la mer plus voisines de la Lune que le centre de la Terre de $1432\frac{1}{2}$ lieues: 4 pieds de plus ou de moins ne changeront pas l'effet de 2 pieds, que les 1432 lieues doivent produire encore à raison du Soleil sur les eaux déja élevées par la Lune.

On peut concevoir que les eaux ayant déja une forme elliptique par l'action de la Lune, le Soleil vient agir sur ce sphéroïde, et qu'il éleve ou abaisse chaque point de la même quantité qu'il l'auroit élevé ou abaissé, si la forme des eaux avoit été circulaire; et la somme ou la différence des deux effets sera la quantité réelle de la marée, pourvu qu'on compte du point le plus bas jusqu'au point qui se trouve le plus haut par la combinaison des deux effets.

3781. Quand la Lune est apogée, sa force diminue comme le cube de sa distance augmente (3600); en sorte que si la force moyenne de la Lune est $2\frac{1}{2}$, la plus grande force dans le périgée sera égale à 3, et la plus petite égale à 2 seulement dans l'apogée; en effet, les cubes des parallaxes extrêmes, ou de 53′ 49″, et de 61′ 29″ (1703), sont à-peu-près comme 2 est à 3, ou plus exactement comme 125 est à 206. Si la Lune produit $13^{pi.}\ 4^{po.}$ dans les moyennes distances, elle ne produira que $10^{pi.}\ 9^{po.}$ dans l'apogée, mais il y aura $15^{pi.}\ 11^{po.}$ dans le périgée; la différence sera $5^{pi.}\ 2^{po.}$, et cela est d'accord avec les observations (*Traité du Flux*, pag. 48).

Les cubes des distances du Soleil à la Terre, en hiver et en été,

sont entre eux comme 1 est à 1,106. La force du Soleil est donc plus grande en hiver d'un douzieme; et comme le Soleil produit 4pi. 11po. de marée à Brest, il doit y avoir en hiver 6po. d'élévation de plus qu'en été, par le seul effet des distances du Soleil à la Terre.

3782. Jusqu'ici nous n'avons parlé des marées que pour le cas des syzygies ou des quadratures; examinons ce qui se passe dans les temps intermédiaires. Quand la Lune et le Soleil sont à quelque distance l'un de l'autre, chacun produit une élévation différente dans un lieu donné, et la somme de ces deux élévations est à-peu-près la hauteur de la marée qu'il s'agit de déterminer. La force de la Lune étant 2 ou 3 fois plus grande que celle du Soleil, le point de la haute mer approche deux ou trois fois plus de la Lune que du Soleil, et n'est jamais éloigné de la Lune de 15°. Ainsi le passage de la Lune au méridien est ce qui influe le plus sur le temps de la haute mer; aussi la différence entre le passage de la Lune et le moment de la haute mer n'est jamais de plus de 63′, lors même que la Lune est apogée, et qu'elle est à 60° du Soleil. Bernoulli a déterminé, par ses formules, le *maximum* de cette différence entre le passage de la Lune et la haute mer; mais il est aisé de le trouver par le calcul astronomique, à l'aide de quelques fausses positions, pour toutes les distances du Soleil à la Lune. Soient S et L (FIG. 333) les points qui répondent au Soleil et à la Lune, H le point de la haute mer, LS la distance du Soleil à la Lune, supposée de 60°, LH la distance de la Lune au point de la haute mer; prenons pour unité la hauteur de la plus grande marée par l'action seule du Soleil, nous aurons pour la hauteur en H au-dessus du point K, qui est à 90° du Soleil, cos. SH^2 (3775). La Lune éleve de son côté les eaux d'une quantité qui est 3 cos. LH^2; c'est la hauteur produite en H, au-dessus du point N, par l'action de la Lune périgée. Je suppose qu'il y ait 60° de distance entre le Soleil et la Lune, que LH soit de $9°\frac{1}{2}$, et SH de $50°\frac{1}{2}$, on trouvera cos. $SH^2 = 0,4046$, et 3 cos. $LH^2 = 2,9183$; la somme est à-peu-près la marée totale 3,3229. Si l'on suppose LH de 10°, et SH de 50, on aura 2,9095, et 0,4132, et la somme 3,3227: il sera facile de voir, par deux ou trois opérations semblables, que le *maximum* de cette somme est à $9°\frac{1}{2}$; c'est la plus grande hauteur de la mer en un point H, quand le Soleil et la Lune sont à 60° l'un de l'autre, et que la Lune est périgée, et le point H étant à $9°\frac{1}{2}$ de la Lune.

Cette somme n'est pas cependant la marée totale ou comptée des plus basses eaux, parceque l'une des deux marées partielles est comptée du plus bas de la marée lunaire N, l'autre du plus bas de la marée solaire K, qui est à 90° du point S: ainsi, pour avoir la marée

totale, il faut avoir égard au point de la plus basse marée I, qui est à 90° de H, et qui ne répond par conséquent ni au petit axe N du sphéroïde de la marée lunaire, ni au petit axe de la marée solaire, qui est en K. Pour cela il faut ôter de la somme trouvée deux fois la quantité dont le point le plus bas de la marée en I a été élevé par l'action du Soleil : or le point K est abaissé d'un tiers de l'effet total (3785), et le point I est au-dessus du point K d'une quantité égale à $\sin. KI^2$ (3775); ainsi le point I est réellement élevé de la quantité $\sin. KI^2 - \frac{1}{3}$, ou $0,5954 - 0,3333 = 0,2621$. Je dis qu'il faut ôter deux fois cette quantité ; d'abord parceque l'on a compté la grande marée lunaire 2,9183 du point N, au lieu de la compter du point I ; ensuite parcequ'on a compté la marée solaire du point K, au lieu de la compter du point I : la différence 0,2621, élévation réelle du point I, a donc influé deux fois dans le calcul précédent.

Il faut encore ôter de la somme des deux marées la quantité dont le point I étoit primitivement plus élevé que le point N, c'est $\sin.^2 NI = 0,0272$; ainsi l'on aura, pour la différence totale de la haute à la basse mer, 2,7715, par les actions réunies du Soleil et de la Lune.

Il reste à savoir combien de temps le point H doit passer au méridien plutôt que la Lune ; on considerera que le retardement diurne de la Lune étant alors de $1^h\,6'$, ces $9^\circ\frac{1}{2}$ font $40'$ de temps ; ainsi la haute mer précédera de $40'$ le passage de la Lune au méridien. Quand la Lune est apogée, et que sa force est seulement double de celle du Soleil, le *maximum,* pour 60° de distance, est de 3,366, et ce point est à 15° de la Lune ; ces 15° font $62'\frac{3}{4}$ en temps lunaire.

3783. Cette différence entre le passage de la Lune au méridien, et l'heure de la marée, a encore servi à Bernoulli pour déterminer le rapport des forces de la Lune et du Soleil. LH exprime l'avancement de la marée H par rapport au passage de la Lune L, qui est d'environ $14'$ par jour, suivant les observations, en sorte que la marée ne retarde alors que de $35'$ par jour ; ainsi, le lendemain de la syzygie, SL est de $49'$ de temps, LH de $14'$, et SH de $35'$, en supposant la Lune dans ses moyennes distances. Nous allons prouver que SH et LH sont en raison inverse des forces du Soleil et de la Lune, d'où il résultera que ces forces sont entre elles comme 14 est à $35\frac{1}{2}$, ou comme 1 est à $2\frac{1}{2}$. Prenons en général le nombre m pour exprimer ce rapport ; la hauteur en H est $\cos. SH^2 + m \cdot \cos. HL^2$ (3775), ou $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos. 2\,SH + \frac{m}{2} + \frac{m}{2}\cos. 2\,HL$ (3820). Puisque c'est le *maximum* de la hauteur, sa différentielle doit être égale à 0 (3437), c'est-à-dire (3448) $\sin. 2SH \cdot d \cdot SH + m \sin. 2HL \cdot d \cdot HL = 0$: mais $d \cdot SH = -d HL$,

puisque

puisque SH augmente autant que LH diminue; donc sin. 2 SH $=m$ sin. 2 HL : et, si l'on suppose les sinus proportionels aux arcs, on a SH $=m$HL; donc SH et HL sont en raison inverse des forces du Soleil et de la Lune.

3784. De tous les principes établis dans les articles précédens, on pourroit déduire une regle pour calculer la hauteur de la marée dans un lieu et un temps quelconques; en voici une idée. On cherchera les distances du Soleil et de la Lune à la Terre, et leurs déclinaisons un jour et demi plutôt (3774), et l'on calculera le plus grand effet du Soleil et de la Lune qui convient à leurs distances, et à la plus grande marée du port dont il s'agit (3781).

On cherchera le point H, intermédiaire entre le Soleil et la Lune, à raison de leur distance mutuelle; on en conclura la valeur de la plus grande marée en ce point-là (3782); l'on prendra, du moins sur un globe, la position du point H, en ascension droite et en déclinaison, et sa distance au zénit, en diminuant son angle horaire de la quantité de l'établissement du port (3774).

La plus grande marée de ce jour-là au point H, multipliée par le carré du cosinus de la distance du point H au zénit (3775), donnera l'élévation actuelle de la mer, à compter des basses eaux, pour le lieu, le jour et l'heure donnés (*Traité du Flux*).

3785. Le niveau naturel des eaux de la mer n'est pas le point qui tient le milieu entre la haute et la basse mer, comme on l'a quelquefois supposé; la hauteur de l'eau vers le sommet du sphéroïde aqueux, ou FD, est double de sa dépression à 90° de là, ou de BP, l'une et l'autre étant comptées du terme naturel ou du niveau que les eaux atteindroient s'il n'y avoit point de marée, c'est-à-dire de la circonférence primitive PMF. En effet, quand un cercle PMF se change en un ellipsoïde qui a la même surface (3479), la différence BP vers le petit axe n'est qu'un tiers de la différence entre les axes CD et CB, tandis que l'élévation FD vers le grand axe en est les deux tiers. Le point M, où le globe HM coupe l'ellipsoïde BM, est à 50° 44′ du grand axe, ou du point D; car l'augmentation des rayons est comme le carré du cosinus de la distance au grand axe; et la marée étant $\frac{1}{3}$ dans le point M d'intersection, relativement à CB, il faut que le carré du cosinus de FM soit $\frac{1}{3}$; or, prenant la racine d'un tiers, on trouve 0,5774, et c'est le cosinus de 54° 44′.

Ainsi quand on veut prendre un point fixe pour y rapporter les hauteurs de l'eau, il faut le prendre au-dessus des basses eaux; dans les syzygies, d'un tiers seulement de la différence entre la basse mer et la haute mer, afin que la montée soit double de la descente. A Brest

il y a 18 pieds de marée moyenne dans les syzygies (3780); le tiers est 6 pieds; c'est la hauteur du niveau naturel de la mer au-dessus des basses eaux.

3786. Dans les marées des quadratures, la hauteur totale étant la différence des effets de la Lune et du Soleil, si on les appelle l et s, on aura $\frac{2}{3}l - \frac{1}{3}s$ pour l'élévation, et $\frac{1}{3}l - \frac{2}{3}s$ pour la dépression; ainsi leur rapport dépend de celui des forces l et s: si ce rapport est celui de 5 à 2 (3783), l'élévation des eaux au-dessus du point fixe sera 8 fois plus grande que leur dépression; car, en substituant pour l sa valeur $\frac{5}{2}s$, la premiere quantité sera $\frac{8}{6}$, et la seconde $\frac{1}{6}$ seulement. Il n'y aura même que deux élévations, et point de dépression, si $\frac{2}{3}s = \frac{1}{3}l$, ou si la force de la Lune est double de celle du Soleil, comme cela arrive dans l'apogée.

3787. On a objecté souvent que si l'attraction étoit la cause des marées, elles devroient avoir lieu dans la Méditerranée et dans les petites mers comme dans les grandes. Il est facile de prouver que, dans de petites mers, la marée doit être insensible. Supposons que PX (FIG. 333) soit le globe terrestre, SBY le sphéroïde aqueux qui auroit lieu si la mer étoit libre et couvroit toute la Terre; s'il y a un petit espace de mer qui n'ait que la largeur comprise entre les rayons CY et CG, ou l'étendue ZX d'orient en occident, les eaux ne peuvent pas prendre la courbure YG; car n'y ayant pas des eaux environnantes pour prendre la place de celles qui s'éleveroient, elles sont réduites à prendre une courbure semblable OR, en sorte que OR soit parallele et semblable à YG, la surface COR étant toujours égale à la surface CZX. Par là on voit sans aucun calcul que la marée y sera d'autant moins sensible que la longueur de la mer en longitude sera moindre, puisque la surface du triangle ZCX diminue comme ZX, et que l'inclinaison des lignes OR, ZX, ne sauroit jamais être plus grande que l'angle formé par le cercle et par l'ellipse en M. Aussi j'ai démontré ce que Bernoulli avoit avancé sans donner la démonstration, que la marée totale dans une pareille mer est à celle qui auroit lieu dans une mer libre, comme la longueur ZX d'orient en occident est au rayon (*Traité du Flux*, etc., *pag.* 124). Cela ne donne qu'un pouce et demi de marée pour la mer caspienne. M. le chevalier d'Angos ayant observé les marées à Toulon avec grand soin, y a reconnu distinctement un pied d'élévation $3^h\frac{1}{4}$ après le passage de la Lune au méridien: j'ai rapporté ses observations dans mon Traité.

3788. Je ne parlerai pas ici des modifications particulieres que la loi générale des marées éprouve en différens pays par la situation

des mers et des rivages; j'ai donné ce détail fort au long dans mon Traité du Flux et du Reflux de la mer, de même qu'un grand recueil d'observations, dont on n'avoit donné que quelques résultats dans les mémoires de l'académie pour 1710, 1712, 1713, 1714, et 1720.

3789. Ainsi l'attraction universelle est démontrée par toutes les especes de phénomenes que nous avons parcourus. Nous n'avons donc à desirer que la perfection des méthodes et de l'analyse, qui doivent nous faire trouver jusques aux moindres effets de l'attraction, et dont nous avons donné ici tous les fondemens, avec les résultats trouvés jusqu'à présent.

LIVRE VINGT-TROISIEME.

TRIGONOMÉTRIE

RECTILIGNE ET SPHÉRIQUE.

Nous avons renvoyé à ce XXIII[e] livre un grand nombre de propositions, qui auroient fait dans le cours des autres livres de trop longues digressions, et qui d'ailleurs devoient être présentées dans un certain ordre et avec un enchaînement convenable. Ce livre auroit pu être placé à la tête de tout l'ouvrage, comme dans les leçons de la Caille; mais il y auroit annoncé l'astronomie sous un aspect trop rebutant. D'ailleurs on peut très bien lire le reste de l'ouvrage, et le comprendre, sans remonter à toutes les démonstrations de trigonométrie qu'il suppose.

Usage des Sinus dans l'Astronomie.

3790. Les sinus dans l'astronomie prennent sans cesse la place des angles et des arcs dont ils mesurent la hauteur : il est donc essentiel d'en donner une notion bien simple, en les montrant dans leurs usages les plus familiers : on verra combien la considération des sinus est essentielle dans l'astronomie et la trigonométrie, et en même temps combien l'idée en est naturelle.

Soit un triangle rectiligne ABC (FIG. 314) rectangle en C; que du centre A on décrive un arc de cercle BD, qui est la mesure de l'angle A : on appelle *sinus* de l'arc BD la perpendiculaire BC, abaissée de l'extrémité B de l'arc sur le rayon AD, qui passe par l'autre extrémité D du même arc. Ainsi la ligne BC est le *sinus* de l'angle A ou de l'arc BD qui en est la mesure; c'est la hauteur de l'arc : la ligne AC est le *cosinus* de cet arc; c'est la quantité dont le sinus s'éloigne du centre : enfin CD est le *sinus verse;* c'est la distance entre le sinus et l'arc dont le sinus mesure la hauteur.

3791. Les sinus ou perpendiculaires, tels que BC, ne suivent pas la même marche, le même progrès que les arcs dont ils sont les sinus : si, par exemple, l'arc BD est de 45°, en sorte que l'arc DG de 90°

en soit le double, la hauteur ou la perpendiculaire AG ne sera pas double de la perpendiculaire BC : on voit bien que la partie BG rampe, ou monte plus obliquement que la partie BD ; et sa hauteur ou son sinus ne doit pas croître aussi rapidement que dans l'arc BD, quoique la longueur des arcs soit la même. Ainsi la marche ou la proportion des sinus BC, AG, est différente de celle de leurs arcs DB, DG. Les géometres ont calculé avec soin des tables de sinus pour tous les angles (4103) ; c'est-à-dire qu'en supposant BD de 10°, 20°, 30°, 40°, etc., ils ont calculé les différentes longueurs des perpendiculaires, telles que BC. Le plus grand de tous les sinus est le sinus total, ou le rayon lui-même AG, parceque l'arc DG de 90° a la plus grande hauteur, la plus grande de toutes les perpendiculaires.

3792. Ces sinus viennent souvent se placer dans l'astronomie à la place de leurs arcs, et il est essentiel de les bien comprendre. Je suppose qu'une planete décrive une orbite APBD (FIG. 315) autour d'un centre C, et que je sois placé au point O pour considérer de loin son mouvement : cette planete, en partant de la ligne des centres A, décrira un arc AP ; elle ne me paroîtra éloignée de la ligne des centres que de la quantité PE, qui est le sinus de l'arc AP décrit par la planete ; lorsqu'elle aura fait 90° ou AB, elle sera plus éloignée du centre C par rapport à mon œil, parceque le rayon ou sinus total BC sera lui-même la distance apparente de la planete au centre C (en supposant la distance de l'œil extrêmement grande) ; au-delà du point B, elle paroîtra revenir à la ligne des centres, parceque les sinus, tels que FG, diminueront de la même maniere qu'ils avoient augmenté dans le premier quart-de-cercle AB, jusqu'à ce qu'en D l'arc parcouru étant de 180°, le sinus ou la perpendiculaire s'évanouisse comme en A.

La planete passant de l'autre côté à gauche de la ligne des centres au-delà du point D, le sinus, qui avoit diminué jusqu'à zéro, recommence à augmenter dans l'autre sens, par les mêmes degrés que dans le premier quart.

3793. Ainsi, dans ce cas-là, ce sont les sinus, et non point les arcs parcourus par la planete, qui mesurent son mouvement vu du point O : il est donc essentiel alors de recourir aux tables des sinus pour savoir à quelle distance la planete paroîtra relativement à la ligne des centres OACD en différens temps de sa révolution, ou à différens degrés de son orbite. Cet exemple suffit pour faire voir la nécessité d'employer les sinus dans l'astronomie : on en a vu bien d'autres dans le cours de cet ouvrage. Toutes les fois qu'une équation ou un effet périodique dépend de la longueur d'un arc, qu'on appelle

argument de cette équation, elle est ordinairement proportionelle au sinus de cet arc ; on en a vu plusieurs exemples dans les articles 1473, 3656, etc.

3794. Nous ferons à cette occasion deux remarques essentielles, qu'il faut bien concevoir et retenir avec soin, parcequ'elles sont d'un usage continuel dans les ouvrages modernes, et dans les formules où il entre des sinus.

LA PREMIERE REMARQUE est sur le changement de signes : les sinus deviennent négatifs ou changent de signes au-delà de 180°, c'est-à-dire dans le troisieme et quatrieme quart-de-cercle : en effet le sinus EP augmente de valeur jusqu'à ce qu'il soit égal au rayon CB ; il diminue ensuite jusqu'au point D où il devient nul, mais aussitôt il renaît de l'autre côté du point B : or toute quantité qui, ayant diminué jusqu'à zéro, continue sa marche de la même maniere qu'auparavant, doit augmenter dans un sens contraire ; c'est-à-dire qu'elle devient négative, si l'on suppose qu'elle étoit d'abord positive, puisqu'elle est en sens contraire de ce qu'elle étoit ; et elle devient positive si elle étoit négative. Ainsi l'équation négative $-7'' \cdot$ sin. t (3656) nous apprend qu'il faut ôter 7″ de la longitude du Soleil, lorsque l'angle t est de trois signes ; mais il faudra les ajouter lorsque l'angle t sera de neuf signes ; et cette équation sera toujours additive dès que l'angle t sera de plus de 180°, parceque le sinus est d'un signe contraire.

3795. Les cosinus changent aussi, mais d'une maniere différente. Nous avons dit que si PE est le sinus de l'arc AP, CE s'appelle son cosinus, ou le sinus de son complément à 90°, c'est-à-dire de l'arc PB ; le cosinus CE diminue visiblement à mesure que l'arc AP augmente, et il s'évanouit quand cet arc parvient à 90° ; alors la ligne CE est réduite au seul point C, en sorte que cos. 90° ou cos. 3 signes $=0$. Au-delà du point B, le cosinus passe au-delà du centre C ; car, quand la planete est en F, le cosinus de son élongation ou de l'arc AF est CG, qui est opposé à CE, et négatif par rapport à lui : le cosinus CG devient le plus grand lorsque la planete est en D, car il est égal alors au rayon même du cercle ou au sinus total, en sorte que cos. $0=1$, cos. $90°=0$, et cos. $180°=-1$: ce cosinus diminue ensuite jusqu'à ce que la planete étant au point H, le cosinus redevienne égal à zéro, en sorte que cos. $270°=0$, ou cos. neuf signes $=0$; enfin le cosinus depuis H jusqu'en A se trouve de la même quantité et du même signe que dans le premier quart AP de la révolution, d'où suit la regle suivante : *Les sinus changent de signe dans le troisieme et le quatrieme quart-de-cercle ; les cosinus changent dans le second et dans le troisieme.*

3796. Il n'en est pas d'une tangente telle que AT comme du sinus; lorsque son arc AR surpasse 90°, et devient AK, elle change de signe, quoiqu'elle paroisse encore à gauche et du même côté que le sinus; mais le point de rencontre des rayons KC et de la tangente tirée par le point A, passe de l'autre côté et se trouve en *t* sur le rayon prolongé au-delà du centre, vers la partie opposée. Ainsi la tangente est négative dans le second et le quatrieme quart, et change à tous les quarts du cercle; il en est de même de la cotangente.

3797. Pour avoir le sinus d'un arc ABDK qui surpasse 180°, il suffit de retrancher 180, et de prendre le sinus de l'arc DK, parceque le sinus de deux degrés ou celui de 182 est le même, comme on le voit par la figure où la ligne KG est le sinus de DK, de KA et de ADK: ainsi quand une quantité varie comme les sinus, elle devient nulle à 180°, et recommence à croître après 180 de la même maniere qu'elle croissoit vers zéro; par la même raison le sinus de 380° est le même que celui de 20°.

3798. La seconde remarque importante que nous avions à faire à l'occasion des sinus est sur la maniere de les considérer comme des fractions du rayon. Les tables des sinus ne sont proprement que des suites de fractions décimales dont l'unité est le rayon ou le sinus total, c'est-à-dire le sinus de 90°; par exemple, je trouve, dans les tables, que pour 90° le sinus est 100, et que pour 30° il est 50, c'est-à-dire la moitié de 100; je puis donc dire également que le sinus total est 1, etque le sinus de 30° est $\frac{1}{2}$, ou 0,5, pour l'exprimer dans la forme des décimales. De même le sinus de 10° sera 0,17, c'est-à-dire $\frac{17}{100}$ du rayon ou du sinus total pris toujours pour unité.

3799. Ainsi toutes les fois qu'une quantité se trouve multipliée par un sinus, comme quand nous disons 20″·sin. 30°, cela veut dire que ces 20″ sont multipliées par une fraction; et cette fraction sin. 30° n'est autre chose qu'une demie, parcequ'on sous entend toujours que ce sinus se rapporte au sinus total dont il est une partie.

Dans la figure 315, supposons que la plus grande distance de la planete au centre C, par exemple, d'un satellite par rapport à Jupiter, où le rayon CB soit de 8′, on pourra dire en général que sa distance apparente PE, vue de la Terre O dans toute autre position du satellite sur son orbite, est égale à 8′·sin. AP. En effet lorsque le sinus de l'arc AP ou la perpendiculaire PE sera la moitié de BC, la distance PE ne paroîtra que de 4′, parceque 8′·sin. AP feront 8′ multipliées par une demie; quand le sinus AP sera la dixieme partie du rayon, 8′·sin. AP sera 48″ ou la dixieme partie de 8′. Telle est la maniere usitée actuellement de considérer les sinus: on sent bien

qu'il en est de même des cosinus ; ainsi $8' \cdot$ cos. $60°$ est égal à $\frac{8'}{2} = 4'$, parceque cos. $60° =$ sin. $30°$ n'est autre chose que $\frac{1}{2}$.

3800. A l'égard des tangentes, elles ne sont des fractions proprement dites que jusqu'à 45°; au-delà de ce terme ce sont des nombres plus grands que l'unité. Ainsi $20'' \cdot$ tang. $56° \; 19' = 30''$, parceque la tangente de $56° \; 19'$ est égale à $1\frac{1}{2}$, comme il est aisé de le voir en ouvrant les tables de sinus.

3801. Il y a encore une troisieme remarque essentielle sur les sinus, qui a pour objet leur expression en lignes, et nous en avons fait un usage fréquent. Si l'on a un triangle ABC (FIG. 314) dont l'hypoténuse [a] AB soit prise pour rayon, le côté BC peut s'exprimer par AB · sin. A, et le côté AC par AB · cos. A ; car, suivant les premiers principes de la trigonométrie rectiligne et suivant la notion des sinus (3791), on a cette proportion ; AB est à BC comme le rayon est au sinus de A, ou R : sin. A :: AB : BC ; ce qui revient à 1 : sin. A :: AB : BC, puisque par le mot rayon nous entendons toujours l'unité (3798) ; donc on a $BC = \frac{AB \cdot \sin. A}{1} = AB \cdot \sin. A$. Par la même raison l'on a 1 : cos. A :: AB : AC, c'est-à-dire $AC = AB \cdot \cos. A$. Si l'on décrit sur le rayon AB un arc de cercle DBG, BE est le sinus de l'arc BG ou le cosinus de l'arc BD, c'est-à-dire de l'angle A ; si donc le sinus BC de l'angle A étoit la moitié du rayon BA, l'on auroit $BC = \frac{1}{2} AB$; donc en général, quelque fraction que soit BC du rayon AB, elle sera exprimée par AB · sin. A, puisque sin. A, comme on l'a dit ci-dessus, n'est jamais qu'une fraction du rayon, ou, ce qui revient au même, le rayon multiplié par une fraction ; c'est-à-dire enfin que la perpendiculaire d'un triangle rectangle est égale à l'hypoténuse multipliée par une fraction, et que cette fraction se trouve dans les tables de sinus. Par la même raison, $BC = AC$ tan. A, ou AC · cot. B, en prenant AC pour rayon, et considérant alors l'arc KF.

3802. De là suit que si la même ligne droite répond à deux arcs de rayons différens, les fractions qui expriment les sinus de ces arcs seront en raison inverse des rayons ; car sin. BD étant égal à BC divisé par le rayon, si BC est le même et que ce rayon change, sin. B augmentera d'autant plus que le rayon diminuera.

3803. Nous nous servons très souvent de l'expression sin. A ou sin. $BD = \frac{BC}{BA}$; cela revient au même que $BC = AB \cdot \sin. A$ (3801), et cela revient encore à l'expression des livres de trigonométrie ordinaire ; car AB est à BC comme le rayon est au sinus de l'arc BD ;

[a] Ce mot vient de ὑποτεινοῦσα, soutendant.

mais

mais par le mot de rayon nous entendons toujours l'unité ; donc AB : BC :: 1 : sin. BD ou sin. BD $= \frac{BC}{AB}$, qui est une fraction de l'unité.

3804. Il en est de même des cosinus et des taugentes, cos. BD $= \frac{AC}{AB}$, et tang. BD $= \frac{BC}{AC}$.

3805. Je supposerai aussi comme des choses familieres quelques propriétés des triangles formés par les sinus et les tangentes dans les triangles CEP, CAt (FIG. 315) : CA : At :: CE : EP ; c'est-à-dire le rayon est à la tangente d'un arc comme le cosinus est au sinus ; ainsi cos. $= \frac{\text{sin.}}{\text{tang.}}$, ou sin. $=$ cos. tang. , et tang. $= \frac{\text{sin.}}{\text{cos.}}$: de même cotang. $= \frac{\text{cos.}}{\text{sin.}}$; d'où il suit que cotang. tang. $= 1$.

Le sin. $= \sqrt{(1 - \text{cos.}^2)}$; le cosin. $= \sqrt{(1 - \text{sin.}^2)}$; la sécante C$t = \sqrt{(CA^2 + At^2)}$; et nommant t la tangente At, la sécante est $\sqrt{(1+tt)}$.

Sec : Tang = R : Sin.

3806. On a aussi cette proportion, Ct : At :: CP : PE ; ou $\sqrt{1+tt}$: t :: 1 : sinus ; donc le sinus est $\frac{t}{\sqrt{(1+tt)}}$. Le cosinus, qui est égal au sinus divisé par la tangente, devient $\frac{1}{\sqrt{(1+tt)}}$. L'on a enfin

cos : R = R : Sec.

CE : CP :: CA : Ct ; ainsi la sécante est égale à $\frac{1}{\text{cosin.}}$; la cosécante $= \frac{1}{\text{sin.}}$.

3807. La cotangente est $\sqrt{\left(\frac{1}{\text{sin.}^2} - 1\right)}$; car $\frac{\text{cos.}}{\text{sin.}} =$ cotang. $= \sqrt{\frac{1 - \text{sin.}^2}{\text{sin.}^2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{\text{sin.}^2} - 1\right)}$: nous en ferons usage (4029).

3808. Puisqu'un radical tel que $\sqrt{(1+t^2)}$ exprime la sécante d'un arc dont t est la tangente, ou répond à $\frac{1}{\text{cos.}}$, on n'a qu'à chercher dans les logarithmes des tangentes l'arc qui répond à la racine du second terme du radical, et diviser l'unité par le cosinus du même arc ; on aura par les seuls logarithmes la valeur du radical entier, et cela est utile dans certains cas (3968, 4180). M. Cagnoli a étendu et généralisé ces applications de nos tables des sinus dans sa trigonométrie, *page* 102.

3809. *CONNOISSANT les sinus et les cosinus de deux arcs, trouver les sinus et les cosinus de leur somme.*

Je suppose que AB et AD (FIG. 316) soient les deux arcs donnés, dont les sinus sont AF et DG, et dont les cosinus sont CF et CG ; la somme de ces deux arcs est l'arc BD, dont le sinus est DE et le co-

sinus CE : pour en trouver les valeurs, on abaisse la perpendiculaire GM sur le sinus DE, et il en résulte deux triangles semblables ACF et DGM ; car les lignes CF et GM étant paralleles, l'angle DGM est égal à l'angle GCF : ainsi on a cette proportion, CA : CF :: DG : DM ; donc $DM = \frac{CF \cdot DG}{CA}$. De même en abaissant une perpendiculaire GH, on aura, par les triangles semblables CAF, CGH, cette proportion, CA : CG :: AF : GH ; donc $GH = \frac{AF \cdot CG}{CA} = ME$; ajoutant ensemble les valeurs de DM et de ME, l'on aura DE, ou le sinus de la somme DB des deux arcs $= \frac{AF \cdot CG + CF \cdot DG}{CA}$: si l'on fait le rayon CA = 1, et qu'on appelle A et B les deux arcs donnés AB et AD, l'on aura sin. (A + B) = sin. A · cos. B + cos. A · sin. B. Si le second terme étoit très petit, en sorte qu'on pût prendre son cosinus pour le rayon et l'arc pour le sinus, l'on auroit sin. (A + B) = sin. A + B · cos. A.

3810. Les triangles semblables CAF et DGM donnent encore cette proportion, CA : AF :: DG : GM ; donc $GM = \frac{AF \cdot DG}{CA} =$ EH : mais par les triangles semblables CAF, CGH, l'on a aussi CA : CG :: CF : CH, et $CH = \frac{CF \cdot CG}{CA}$; donc la différence entre les valeurs de CH et de EH, ou la valeur de $CE = \frac{CF \cdot CG - AF \cdot DG}{CA}$; donc faisant CA = 1, l'on a cos. (A + B) = cos. A · cos. B — sin. A · sin. B.

3811. *Connoissant les sinus et les cosinus de deux arcs, trouver ceux de leur différence.* Je suppose que le plus grand arc soit DB et le plus petit arc AB. Si l'on prolonge DG jusqu'en N, et qu'on tire les perpendiculaires EN, EP, l'on aura des triangles semblables CAF, DEN ; donc CA : CF :: DE : DN, et $DN = \frac{DE \cdot CF}{CA}$. Par les triangles semblables CAF, CEP, on a CA : AF :: CE : EP ; donc $EP = \frac{AF \cdot CE}{CA} = GN$; si l'on retranche la valeur de GN de celle de DN, on aura $DG = \frac{DE \cdot CF - AF \cdot CE}{CA}$. Soit A le plus grand arc DB et B le plus petit arc AB, leur différence est l'arc AD ; la valeur de DG sera donc sin. (A — B) = sin. A · cos. B — sin. B · cos. A.

3812. Les triangles semblables CAF, CEP, donnent aussi cette proportion, CA : CF :: CE : CP ; donc $CP = \frac{CF \cdot CE}{CA}$: les triangles CAF, DEN, sont encore semblables ; car l'angle ACF =

NEF, qui est le complément de DEN ; on a donc CA : AF :: DE : EN, $= \frac{DE \cdot AF}{CA} =$ PG ; donc la somme de CP et PG, ou CG, $= \frac{CE \cdot CF + DE \cdot AF}{CA}$; c'est le cosinus de leur différence AD ; donc $\cos. (A - B) = \cos. A \cdot \cos. B + \sin. A \cdot \sin. B$.

3813. En prenant la somme ou la différence des équations démontrées dans les 4 articles précédens, on en conclura aisément les 4 valeurs suivantes, qui sont d'un usage continuel dans les calculs de l'attraction, pour résoudre les produits des sinus en sinus simples des arcs multiples.

$$\text{Sin. } A \cdot \cos. B = \tfrac{1}{2} \sin. (A + B) + \tfrac{1}{2} \sin. (A - B).$$

3814. $\text{Sin. } A \cdot \sin. B = \frac{1}{2} \cos. (A - B) - \frac{1}{2} \cos. (A + B)$.

3815. $\text{Cos. } A \cdot \cos. B = \frac{1}{2} \cos. (A + B) + \frac{1}{2} \cos. (A - B)$.

3816. $\text{Cos. } A \cdot \sin. B = \frac{1}{2} \sin. (A + B) - \frac{1}{2} \sin. (A - B)$.

Si l'on fait B = A, ces quatre équations produiront les quatre suivantes, que nous avons aussi employées fort souvent dans les calculs de l'attraction : il suffit pour les former de se rappeller que le cosinus de zéro = 1 (3795).

3817. $\text{Sin. } A \cdot \cos. A = \frac{1}{2} \sin. 2A$, et $\sin. A = \frac{\sin. 2A}{2 \cos. A}$.

3818. $\text{Sin. } A^2$, ou $\sin.^2 A$[a], ou $(\sin. A)^2$, $= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos. 2A$.

3819. Si au lieu de 2A on met A, et en même temps $\frac{1}{2}$A au lieu de A, l'on aura l'expression suivante, $2 (\sin. \frac{1}{2} A)^2 = 1 - \cos. A$: c'est le sinus verse.

On voit par cette valeur pourquoi l'on met, à la place des carrés des sinus des latitudes, les moitiés des sinus verses des latitudes doubles (2699, 3733).

3820. $\text{Cos. } A^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos. 2A$, ou $\cos. \frac{1}{2} A^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos. A$.

3821. $\text{Cos. } A = 2 \cos.^2 \frac{1}{2} A - 1$.

3822. $\text{Sin. } A = \frac{2 \cos. \frac{1}{2} A^2}{\cot. \frac{1}{2} A}$; car $\sin. A \cos. A = \frac{1}{2} \sin. 2A$ (3817), ou $\sin. A = 2 \sin. \frac{1}{2} A \cdot \cos. \frac{1}{2} A = \frac{2 \cos. \frac{1}{2} A^2}{\cot. \frac{1}{2} A}$, parceque $\frac{\cos.}{\cot.} =$ sinus (3805).

3823. $\text{Sin. } A = \frac{2}{\cot. \frac{1}{2} A + \text{tang.} \frac{1}{2} A}$; car $\sin. A \cdot \cos. A = \frac{1}{2} \sin. 2A$, ou

[a] Plusieurs auteurs écrivent $\sin.^2 A$ et non pas $\sin. A^2$, pour exprimer le carré du sinus de A ; mais en lisant des calculs, cela fait une confusion avec $\sin. 2A$, elle peut même se faire en écrivant ; c'est ce qui me fait préférer en général $\sin. A^2$: j'écrirai cependant quelquefois $\sin.^2 A$.

$\frac{2}{\sin. 2A} = \frac{1}{\sin. A \cdot \cos. A} = \frac{\sin. A}{\cos. A} + \frac{\cos. A}{\sin. A}$ = tang. A + cotang. A; donc $\frac{1}{\sin. A} = \frac{1}{2}$ tang. $\frac{1}{2}$A + $\frac{1}{2}$cot. $\frac{1}{2}$A, ou sin. A = $\frac{2}{\cot. \frac{1}{2}A + \tang \frac{1}{2}A}$. On s'en sert pour les projections (4064).

3824. 2 cot. A = cot. $\frac{1}{2}$A — tang. $\frac{1}{2}$A; car cos. (A + B) = cos. A · cos. B — sin. A · sin. B; donc cos. 2 A = cos. A^2 — sin. A^2, ou cos. A = cos. $\frac{1}{2}A^2$ — sin. $\frac{1}{2}A^2$; donc $\frac{2\cos. A}{\sin. A} = \frac{\cos. \frac{1}{2}A^2 - \sin. \frac{1}{2}A^2}{\frac{1}{2}\sin. A} = \frac{\cos. \frac{1}{2}A^2 - \sin \frac{1}{2}A^2}{\sin. \frac{1}{2}A \cdot \cos. \frac{1}{2}A} = \frac{\cos. \frac{1}{2}A}{\sin. \frac{1}{2}A} - \frac{\sin. \frac{1}{2}A}{\cos. \frac{1}{2}A}$; ainsi 2 cot. A = cot. $\frac{1}{2}$A — tang. $\frac{1}{2}$A. Ceci sert pour les projections (4065).

On a aussi tang. A = $\frac{1 - \cos. 2A}{\sin. 2A}$; car 1 — cos. A = 2 sin. $\frac{1}{2}A^2$ (3819) = 2 sin. $\frac{1}{2}$A · sin. $\frac{1}{2}$A = sin. $\frac{1}{2}$A · $\frac{\sin. A}{\cos. \frac{1}{2}A}$ (3817) = sin. A · tang. $\frac{1}{2}$A; donc tang. $\frac{1}{2}$A = $\frac{1 - \cos. A}{\sin. A}$; ou tang. A = $\frac{1 - \cos. 2A}{\sin. 2A} = \frac{\sin. 2A}{1 + \cos. 2A}$.

3825. Si dans la formule 3810 l'on fait B = A, l'on aura cos. 2A = cos. A^2 — sin. A^2; mais sin. 2 A = 2 sin. A · cos. A (3817); donc $\frac{\sin. 2A}{\cos. 2A}$ = tang. 2 A = $\frac{2\sin. A \cdot \cos. A}{\cos. A^2 - \sin. A^2}$. Nous en avons fait usage pour la nutation (3740).

3826. Sin. 2 A = $\frac{2 \tang. A}{\text{séc}. A^2}$; car sin. 2 A = 2 sin. A · cos. A; (3817); donc sin. A, ou tang. A · cos. A = $\frac{\frac{1}{2}\sin. 2A}{\cos. A}$; tang. A = $\frac{\frac{1}{2}\sin. 2A}{\cos. A^2}$ = $\frac{1}{2}$ sin. 2A séc. A^2, et sin. 2 A = $\frac{2 \tang. A}{\text{séc}. A^2}$ (*Ephém. de Berlin*, 1776 pag. 128).

3827. Coséc. 2A = $\frac{1 + \tang. A^2}{2 \tang. A}$, ou $\frac{\text{séc}. A^2}{2 \tang. A}$; car séc. A^2 = $\frac{1}{\cos. A^2}$ (3806) = $\frac{\tang. A}{\sin. A \cdot \cos. A}$; donc $\frac{\text{séc}. A^2}{2 \tang. A} = \frac{1}{2 \sin. A \cdot \cos. A} = \frac{1}{\sin. 2A}$ = coséc. 2 A.

3828. tang. (A ± B) = $\frac{\tang. A \pm \tang. B}{1 \mp \tang. A \cdot \tang. B}$; car tang. (A ± B) = $\frac{\sin. (A \pm B)}{\cos. (A \pm B)} = \frac{\sin. A \cdot \cos. B \pm \cos. A \cdot \sin. B}{\cos. A \cdot \cos. B \mp \sin. A \cdot \sin. B}$ (3809 et suiv.). Divisant le numérateur et le dénominateur par cos. A · cos. B, on aura l'expression proposée.

3829. Cotang. 2 A = $\frac{2 \tang. A}{1 - \tang. A^2}$. Il suffit de faire B = A dans l'expression précédente. On trouvera de même tang. 2 A = $\frac{2 \tang. A}{ - \tang. A^2} = \frac{2}{\cot. A - \tang. A}$, ou cot. 2 A = $\frac{\cot. A - \tang. A}{2}$. On a aussi tang. 2 A = $\frac{2 \cot. A}{\cot. A^2 - 1}$; car cette valeur revient au même que $\frac{2 \tang. A}{1 - \tang. A^2}$.

3830. Connoissant la valeur de $\sin. A^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos. 2A$, il est aisé de trouver $\sin. A^3$ ou le cube de sin. A ; car il ne faut que multiplier $\sin. A^2$ par sin. A ; on aura $\sin. A^3 = \frac{1}{2}\sin. A - \frac{1}{2}\cos. 2A \cdot \sin. A$: si l'on développe le dernier terme du second membre, savoir $\cos. 2A \cdot \sin. A$, par le moyen de la formule (3816), on aura $\frac{1}{4}\sin. 3A - \frac{1}{4}\sin. A$, qui, étant retranché de $\frac{1}{2}\sin. A$, donnera $\sin. A^3 = \frac{3}{4}\sin. A - \frac{1}{4}\sin. 3A$.

3831. Pour trouver de même $\cos. A^3$, l'on multipliera $\cos. A^2$, ou $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos. 2A \cdot$ (3820) par cos. A ; l'on aura $\frac{1}{2}\cos. A + \frac{1}{2}\cos. 2A \cdot \cos. A$: le second terme, développé par la formule 3815, sera $\frac{1}{4}\cos. 3A + \frac{1}{4}\cos. A$, qui, ajouté à $\frac{1}{2}\cos. A$, donnera $\frac{3}{4}\cos. A + \frac{1}{4}\cos. 3A$.

3832. On aura par des opérations semblables $\sin. A^4$ et $\cos. A^4$: il ne s'agit que de multiplier les valeurs de $\sin. A^3$ par sin. A et de $\cos. A^3$ par cos. A, et de développer chacun des termes du produit par les formules précédentes.

$\text{Sin. } A^4 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos. 2A + \frac{1}{8}\cos. 4A.$

$\text{Cos. } A^4 = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos. 2A + \frac{1}{8}\cos. 4A.$

3833. Ces premiers termes sin. A, $\sin. A^2$, $\sin. A^3$, $\sin. A^4$, suffisent en faisant évanouir les fractions, pour faire appercevoir la loi suivant laquelle ils augmentent, et pour continuer la série (*Introd. in anal. infin. I*, 220. *Cagnoli, Trig.* art. 127.)

3834. On emploie souvent les sommes et les différences des sinus et des cosinus ; ainsi il est nécessaire de les démontrer. On a d'abord $\sin. A + \sin. B = 2\sin. \frac{1}{2}(A + B) \cdot \cos. \frac{1}{2}(A - B)$. Car si on multiplie les valeurs de $\sin. (A + B)$ et de $\cos. (A - B)$ (3809 et 3812), en considérant que $\sin.^2 + \cos.^2 = 1$, on aura $\sin. A \cdot \cos. A + \sin. B \cdot \cos. B$, qui revient à $\frac{1}{2}\sin. 2A + \frac{1}{2}\sin. 2B$ (3817) ; donc, en mettant A au lieu de 2 A, $\frac{1}{2}$A au lieu de A, B au lieu de 2B, et $\frac{1}{2}$B au lieu de B, $\sin. A + \sin. B = 2\sin. \frac{1}{2}(A + B) \cdot \cos. \frac{1}{2}(A - B)$.

3835. $\text{Sin. } A - \sin. B = 2\sin. \frac{1}{2}(A - B) \cdot \cos. \frac{1}{2}(A + B)$. Car multipliant les valeurs de $\sin. (A - B)$ et $\cos. (A + B)$ (3811 et 3810), et considérant de même que $\sin.^2 + \cos.^2 = 1$, on trouve $\sin. A \cdot \cos. A - \sin. B \cdot \cos. B$ ou (3817) $\frac{1}{2}(\sin. 2A - \sin. 2B)$; donc $\sin. A - \sin. B = 2\sin. \frac{1}{2}(A - B) \cdot \cos. \frac{1}{2}(A + B)$.

3836. $\frac{\sin. A + \sin. B}{\sin. A - \sin. B} = \frac{\text{tang.} \frac{1}{2}(A + B)}{\text{tang.} \frac{1}{2}(A - B)}$. Il suffit de mettre en fraction les deux valeurs précédentes, en considérant que $\frac{\sin.}{\cos.} = \text{tang.}$ Nous en avons fait usage (2201).

3837. De là suit une proportion fort usitée dans la trigonométrie rectiligne ; la somme de deux côtés est à leur différence, comme la

tangente de la demi-somme des angles opposés à ces côtés est à la tangente de leur demi-différence. Nous en avons indiqué l'usage (1141, 1248 et 1254).

3838. $\text{Cos. A} + \text{cos. B} = 2\,\text{cos.}\,\frac{1}{2}(\text{A} + \text{B}) \cdot \text{cos.}\,\frac{1}{2}(\text{A} - \text{B})$. Pour le démontrer, il suffit de multiplier les valeurs de $\text{cos.}(\text{A}+\text{B})$ (3810) et de $\text{cos.}(\text{A} - \text{B})$ (3812), et l'on aura $\text{cos. A}^2 \cdot \text{cos. B}^2 - \text{sin. A}^2 \times \text{sin. B}^2$; mettant pour cos. B^2 sa valeur $1 - \text{sin. B}^2$, et l'unité pour $\text{sin. A}^2 + \text{cos. A}^2$, on trouvera $\text{cos. A}^2 - \text{sin. B}^2$, ou (3820, 3818) $\frac{1}{2}\text{cos. 2A} + \frac{1}{2}\text{cos. 2B} = \text{cos.}(\text{A}+\text{B}) \cdot (\text{A} - \text{B})$; donc $\text{cos. A} + \text{cos. B} = 2\,\text{cos.}\,\frac{1}{2}(\text{A} + \text{B}) \cdot \text{cos.}\,\frac{1}{2}(\text{A} - \text{B})$.

3839. $\text{Cos. B} - \text{cos. A} = 2\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}(\text{A} - \text{B}) \cdot \text{sin.}\,\frac{1}{2}(\text{A} + \text{B})$. Car multipliant les valeurs de $\text{sin.}(\text{A} + \text{B})$ et de $\text{sin.}(\text{A} - \text{B})$ (3809 et 3811), on a $\text{sin. A}^2 \cdot \text{cos. B}^2 - \text{sin. B}^2 \cdot \text{cos. A}^2$; et parceque $1 - \text{sin. B}^2 = \text{cos. B}^2$, et que $\text{sin. A}^2 + \text{cos. A}^2 = 1$, cette valeur se réduit à $\text{sin. A}^2 - \text{sin. B}^2$; donc $\text{sin.}(\text{A}+\text{B}) \cdot \text{sin.}(\text{A} - \text{B}) = \text{sin. A}^2 - \text{sin. B}^2$. Cette valeur nous servira (4182). Mais $\text{sin. A}^2 - \text{sin. B}^2 = \text{cos. B}^2 - \text{cos. A}^2$; donc $\text{sin.}(\text{A}+\text{B}) \cdot \text{sin.}(\text{A} - \text{B}) = \text{cos. B}^2 - \text{cos. A}^2 = \frac{1}{2}\text{cos. 2B} - \frac{1}{2}\text{cos. 2A}$; donc aussi $\text{cos. B} - \text{cos. A} = 2\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}(\text{A}+\text{B}) \cdot \text{sin.}\,\frac{1}{2}(\text{A} - \text{B})$. Ceci servira pour la démonstration d'un théorême fondamental de la trigonométrie sphérique (3976), et pour les distances (4179 et 4182).

3840. $\frac{\text{cos. B} + \text{cos. A}}{\text{cos. B} - \text{cos. A}} = \frac{\text{cot.}\,\frac{1}{2}(\text{A} + \text{B})}{\text{tang.}\,\frac{1}{2}(\text{A} - \text{B})}$; il suffit de metre en fraction les valeurs des deux articles précédens.

3841. $\frac{\text{cos. B} - \text{cos. A}}{\text{cos. A} + \text{cos. B}} = \text{tang.}\,\frac{1}{2}(\text{A} + \text{B}) \cdot \text{tang.}\,\frac{1}{2}(\text{A} - \text{B})$; cela se démontre de la même maniere. Nous en ferons usage (3981).

3842. $\text{Tang. A} + \text{tang. B} = \frac{\text{sin.}(\text{A} + \text{B})}{\text{cos A} \cdot \text{cos. B}}$; car $\text{tang. A} + \text{tang. B} = \frac{\text{sin. A}}{\text{cos. A}} + \frac{\text{sin. B}}{\text{cos. B}} = \frac{\text{sin. A} \cdot \text{cos. B} + \text{sin. B} \cdot \text{cos. A}}{\text{cos. A} \cdot \text{cos. B}} = \frac{\text{sin.}(\text{A} + \text{B})}{\text{cos. A} \cdot \text{cos. B}}$.

3843. $\text{Tangente A} - \text{tang. B} = \frac{\text{sin.}(\text{A} - \text{B})}{\text{cos. A} \cdot \text{cos. B}}$; car $\frac{\text{sin. A}}{\text{cos. A}} - \frac{\text{sin. B}}{\text{cos. B}} = \frac{\text{sin. A} \cdot \text{cos. B} - \text{sin. B} \cdot \text{cos. A}}{\text{cos. A} \cdot \text{cos. B}} = \frac{\text{sin.}(\text{A} - \text{B})}{\text{cos. A} \cdot \text{cos. B}}$.

$\text{Cotang. B} - \text{cot. A} = \frac{\text{cos. B}}{\text{sin. B}} - \frac{\text{cos. A}}{\text{sin. A}} = \frac{\text{sin. A} \cdot \text{cos. B} - \text{sin. B} \cdot \text{cos. A}}{\text{sin. B} \cdot \text{sin. A}} = \frac{\text{sin.}(\text{A} - \text{B})}{\text{sin. B} \cdot \text{sin. A}}$.

3844. $\frac{\text{sin.}(\text{A} + \text{B})}{\text{sin.}(\text{A} - \text{B})} = \frac{\text{tang. A} + \text{tang. B}}{\text{tang. A} - \text{tang. B}}$, puisque cette valeur revient (3842, 3843) à $\frac{\text{sin.}(\text{A} + \text{B})}{\text{cos. A} \cdot \text{cos. B}} \times \frac{\text{cos. A} \cdot \text{cos. B}}{\text{sin.}(\text{A} - \text{B})} = \frac{\text{sin.}(\text{A} + \text{B})}{\text{sin.}(\text{A} - \text{B})}$.

3845. LES ÉQUATIONS du troisieme degré peuvent se résoudre

par le moyen de ces expressions trigonométriques, comme l'ont fait voir M. Mauduit, M. Trembley, et surtout M. Cagnoli (pag. 201); une équation du troisieme degré, $x^3+px+q=0$, a pour racine $x=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}$, (comme on le voit dans tous les livres d'algebre) . . . . $=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\frac{1}{2}q\sqrt{1+\frac{4p^3}{27q^2}}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\frac{1}{2}q\sqrt{1+\frac{4p^3}{27q^2}}}$. On fera $\frac{4p^3}{27q^2}=\text{tang. B}^2$, ou $\text{tang. B}=\frac{p}{3q}\times 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$; et parceque $\sqrt{(1+\text{tang.}^2)}=\text{séc.}=\frac{1}{\text{cos.}}$ (3806), on aura $x=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q\left(1-\frac{1}{\text{cos. B}}\right)}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q\left(1+\frac{1}{\text{cos. B}}\right)}$. Faisons $R=2\sqrt{\frac{1}{3}p}$, ou $p=\frac{3}{4}R^2$; tang. B $=\frac{R^3}{4q}$, et $q=\frac{R^3}{4\,\text{tang. B}}$. Par là $x=\sqrt[3]{-\frac{R^3}{8\,\text{tang. B}}\times\frac{\text{cos. B}-1}{\text{cos. B}}}+\sqrt[3]{-\frac{R^3}{8\,\text{tang. B}}\times\frac{\text{cos. B}+1}{\text{cos. B}}}=\frac{1}{2}R\left(\sqrt[3]{\frac{1-\text{cos. B}}{\text{sin. B}}}-\sqrt[3]{\frac{1+\text{cos. B}}{\text{sin. B}}}\right)$, en mettant sin. pour tang. cos. Mais $\text{tang.}\frac{1}{2}B=\frac{1-\text{cos. B}}{\text{sin. B}}$ (3824), donc $x=R\frac{\sqrt[3]{\text{tang.}\frac{1}{2}B}-\sqrt[3]{\text{cot.}\frac{1}{2}B}}{2}=-R\frac{\sqrt[3]{\text{cot.}\frac{1}{2}B}-\sqrt[3]{\text{tang.}\frac{1}{2}B}}{2}$; et parceque cot. B $=\frac{\text{cot.}\frac{1}{2}B-\text{tang.}\frac{1}{2}B}{2}$ (3829), si l'on fait $\text{tang. A}=\sqrt[3]{\text{tang.}\frac{1}{2}B}$, on aura $x=-R\cdot\text{cot. } 2A$, ou $-\text{cot. } 2A\cdot 2\sqrt{\frac{1}{3}p}$. Nous en avons fait usage pour les cometes (3116).

On trouvera plusieurs autres formules semblables dans l'introduction d'Euler, dans les ouvrages que je citerai (3996), et sur-tout dans la Trigonométrie de M. Cagnoli, où ces expressions sont rangées en tableaux, d'une maniere très commode pour les calculateurs.

3846. Soient deux cercles concentriques QARFQ, MKENM, (FIG. 317); une ligne NQM tangente au cercle intérieur en Q, avec des perpendiculaires QF, NE sur la tangente; une ligne QR tirée à volonté dans le petit cercle; une ligne NK tirée de l'extrémité N de la ligne MQN, parallèlement à QR, et une autre ligne NL faisant un angle LNE égal à l'angle ENK avec la ligne NE parallele au diametre QCF : on aura NK+NL=2QR; car, ayant abaissé sur les lignes NK, etc. des perpendiculaires C*a*, C*b*, CZ, CO, MY, MV, QX et QT, on aura QZ=QO, NT=NX, à cause de l'égalité des angles supposés. La ligne N*a*, qui est la moitié de NK, $=Xa+NX+\frac{QR}{2}+\frac{NY}{2}$; ainsi la ligne entiere NK=QR+NY; de même

N*b*, moitié de NL, est $=\text{T}b-\text{NT}=\frac{\text{QR}}{2}-\frac{\text{NY}}{2}$, et la ligne entiere NL $=$ QR $-$ NY; donc la somme de NK et de NL est égale à 2 QR [a].

3847. De là il suit que si ces deux cercles devenoient des ellipses, comme dans la fig. 310, la même propriété auroit lieu; car si l'on incline sur le plan des deux ellipses, des cercles dont les diametres soient égaux aux grands axes des ellipses, et que le cosinus de l'inclinaison des cercles sur le plan de projection soit au sinus total comme le petit axe de chaque ellipse est au grand, ce qui a lieu toutes les fois que ces cercles se meuvent autour de la même ligne, on pourra considérer ces ellipses comme les projections de ces cercles (1814); et les lignes QR, NK (FIG. 317), formeront, par leurs projections, des lignes qui auront entre elles le même rapport, puisque toutes les lignes paralleles à QF diminueront comme le cosinus de l'inclinaison et que les lignes également inclinées à celle-là diminuent dans le même rapport: donc ce qui est vrai des cercles sera également vrai pour les ellipses, et l'on aura NK $+$ NL $=$ 2QR. Nous en avons fait usage (3750).

3848. DANS un triangle rectiligne rectangle MPF (FIG. 318), dont l'angle PFM est divisé en deux parties égales par une ligne FH, la tangente de la moitié de l'angle PFM sera égale à $\frac{\text{PM}}{\text{PF}+\text{FM}}$; car ayant pris FA $=$ FM, on aura l'angle A égal à la moitié de l'angle MFP, et la tangente de l'angle A $=\frac{\text{PM}}{\text{PA}}$ (3804) $=\frac{\text{PM}}{\text{PF}+\text{FM}}$. Nous en avons fait usage (1240).

De là il suit que $\frac{\sin.\text{F}}{1+\cos.\text{F}}=\text{tang.}\,\frac{1}{2}\text{F}$; mais $\frac{\sin.\text{F}}{1+\cos.\text{F}}=\frac{1-\cos.\text{F}}{\sin.\text{F}}$; donc $\frac{1-\cos.\text{F}}{\sin.\text{F}}=\text{tang.}\,\frac{1}{2}\text{F}$ (1198); et $\frac{1}{\sin.\text{F}}-\text{tang.}\,\frac{1}{2}\text{F}=\text{cotang.}\,\text{F}$.

3849. Dans un triangle rectiligne tel que FOM, dont on connoît deux côtés FO et FM, avec l'angle compris OFM, pour avoir le troisieme côté OM, on abaisse la perpendiculaire MH sur le côté FO, prolongé en H, et l'on a $\text{OM}^2=\text{MH}^2+\text{OH}^2=$ (parceque $\text{OH}=\text{FH}-\text{FO}$), $\text{FH}^2-2\,\text{FH}\cdot\text{FO}+\text{FO}^2+\text{MH}^2=\text{FM}^2+\text{FO}^2-2\,\text{FH}\cdot\text{FO}=\text{FM}^2+\text{FO}^2-2\,\text{FM}\cdot\text{FO}\cdot\cos.\text{F}$; donc $\text{MO}=\sqrt{(\text{FM}^2+\text{FO}^2-2\,\text{FM}\cdot\text{FO}\cdot\cos.\text{F})}$. Nous en avons fait usage (3425).

Si l'on abaisse la perpendiculaire OG sur FM, on aura $\text{OG}^2=\text{MO}^2-\text{MG}^2$, et mettant pour MG sa valeur FM $-$ FG, $\text{OG}^2=\text{MO}^2-\text{FM}^2-\text{FG}^2+2\,\text{FM}\cdot\text{FG}=\text{FO}^2-\text{FG}^2$, ou $\text{FM}^2+\text{FO}^2=\text{OM}^2+2\,\text{FM}\cdot\text{FG}$. On en a vu l'usage (3556).

[a] Cette démonstration de M. Charles, toute simple qu'elle est, n'a été trouvée que par le calcul des sinus, comme la plupart des théorêmes de cette espece, que l'on présente ensuite sous une forme synthétique, parcequ'elle est plus abrégée.

3850.

3850. Étant données deux quantités inégales MP, PF, si l'on fait cette proportion, la plus petite est à la plus grande comme le rayon est à la tangente d'un angle PMF, et qu'on ôte 45° de l'angle PMF, en prenant PN=PM, et tirant la ligne MN, le rayon sera à la tangente du reste, ou de NMF, comme la somme des deux quantités est à leur différence. Ayant tiré par le point F une perpendiculaire FI sur MN, prolongée en I, et MD parallele à PF, MD sera la somme des deux quantités, et FN leur différence : or DM : FN :: ID ou MI : IF; donc, etc.

La somme des deux sinus est à leur différence, ou la somme des deux côtés d'un triangle rectiligne est à leur différence, comme la tangente de la demi-somme des angles opposés est à celle de leur demi-différence (3837); ainsi la tangente de FMI, étant multipliée par celle du demi-supplément de l'angle compris entre les deux côtés, donnera la tangente d'une quantité qui, étant ajoutée à ce demi-supplément, formera le plus grand des deux angles inconnus. Nous en avons fait usage pour trouver les lieux des planetes (1141, 3124), et dans les tables, *pag.* 114.

3851. Dans un triangle PTS (FIG. 55), dont on connoît deux côtés SP, ST, et l'angle compris S, on a cotang. $T = \frac{ST}{SP \sin. S} - \cot. S$: car imaginant sur ST une perpendiculaire $PX = SP \cdot \sin. S$, on a cotang. $S = \frac{SX}{PX} = \frac{SX}{SP \times \sin. S}$, et cotang. $T = \frac{TX}{PX} = \frac{TX}{SP \times \sin. S}$: ainsi cot. $T + \cot. S = \frac{SX + TX}{SP \times \sin. S} = \frac{ST}{SP \times \sin. S}$; donc cot. $T = \frac{ST}{SP \times \sin. S} - \cot. S$. Si l'angle S est obtus, cot. S change de signe. Si c'est une planete supérieure, la formule est la même. Cette formule est employée dans les tables de Berlin, T. II, *pag.* 256, pour calculer le lieu d'une planete; et l'usage en seroit fort commode, si l'on avoit les tables des sinus naturels, et des tangentes de 10 en 10 secondes (4103); mais notre méthode (1141) est préférable par l'usage des logarithmes.

3852. Dans un triangle rectiligne rectangle STN (FIG. 319), si l'angle T est supposé très petit, la différence entre le grand côté TN et l'hypoténuse TS sera égale à la moitié du carré de la fraction qui exprime SN par rapport à TN. Soit $TN = 1$, $SN = \alpha$, en sorte que α soit une petite fraction de l'unité ou de TN; on aura $TS^2 = 1 + \alpha^2$; et, élevant $1 + \alpha^2$ à la puissance $\frac{1}{2}$ (3421), l'on aura $TS = 1 + \frac{1}{2}\alpha^2$, en négligeant les autres termes qui seroient beaucoup plus petits que α^2. Si par exemple SN est $\frac{1}{10}$ de TN, on aura $\frac{1}{200}$ de TN pour l'excès de l'hypoténuse TS sur le côté TN.

De là il suit que si NS est infiniment petite par rapport à TS, la

différence de TS à TN sera un infiniment petit du second ordre, et devra se négliger totalement, comme on l'a déja vu (3492).

De la Trigonométrie sphérique.

3853. Nous sommes obligés en donnant un traité complet d'astronomie d'y comprendre la trigonométrie sphérique [a]; mais nous l'abrégerons, en passant sous silence tout ce qui n'intéresse pas spécialement l'astronomie : on trouvera le reste dans la *Trigonométrie* de M. Cagnoli, la plus complete de toutes.

3854. UNE FIGURE PLANE est celle dont la surface peut être traversée en tout sens par une ligne droite. On ne sauroit trouver une définition plus exacte du mot de *plan* ou de *figure plane* (1120).

3855. Le plan d'une orbite, d'un cercle, ou d'une figure plane quelconque, est proprement la surface de cette figure : dans l'astronomie on conçoit tous les plans prolongés indéfiniment dans l'immensité du ciel; alors le *plan* d'un cercle est formé par l'assemblage de tous les diametres de ce cercle prolongés sans bornes au-delà de sa circonférence.

LE PLAN est donc une surface infinie qui est le prolongement de la surface propre du cercle, et dont celle-ci fait partie.

3856. Supposons que DBA (FIG. 315) soit l'étendue de l'équateur terrestre, bornée par la grandeur de la Terre DHAPF; son plan doit se concevoir sans bornes : une étoile O, à une distance quelconque de la Terre, sera toujours dans le plan de l'équateur de la Terre, pourvu qu'il y ait un des diametres de l'équateur qui aille passer par l'étoile, et l'on dira que cette étoile est dans l'équateur. Si cette étoile O, au lieu d'être dans la surface, dans le plan même de notre figure, se conçoit relevée au-dessus de la figure, alors le diametre DA ne pourra point passer par l'étoile, et l'étoile ne sera plus dans le plan de l'équateur.

3857. Lorsqu'on dit en astronomie qu'un astre est dans l'équateur, dans l'écliptique, dans l'horizon, il faut toujours entendre les plans de tous ces cercles; ainsi quand le Soleil et la Lune se levent ensemble, ils sont tous deux dans l'horizon, parceque le même plan qui borne notre vue s'étend jusqu'à eux, quoique le Soleil soit 400 fois plus loin de nous que la Lune.

3858. Il faut cependant excepter de cette regle les paralleles, ou petits cercles de la sphere, dont les plans ne peuvent se prolonger

[a] La trigonométrie sphérique est la véritable science de l'astronome, cependant il y en a plusieurs qui l'évitent quand ils le peuvent : seroit-ce parcequ'elle ne leur est pas familiere? c'est un inconvénient dont il faut se préserver de bonne heure.

sans restriction, parcequ'ils appartiennent à des cônes qui ont leur sommet au centre de la sphere (3861).

3859. Parmi les premieres définitions du onzieme livre d'Euclide, on trouve celle-ci : *L'inclinaison d'un plan sur un autre plan est l'angle aigu que renferment les deux lignes tirées sur les deux plans, et perpendiculaires à leur commune section.* Puisque cette vérité a paru assez claire aux anciens géometres pour n'avoir pas besoin d'explication, nous pourrions nous dispenser d'en parler plus au long; cependant, comme c'est une vérité essentielle, un principe fondamental auquel nous renverrons souvent, il est nécessaire de le bien concevoir. Présentons une feuille de papier sur une autre, dans une situation inclinée; la commune section de ces deux plans est la ligne sur laquelle une des feuilles rencontre et touche l'autre: pour juger de l'angle d'inclinaison, on verra bien qu'il faut former un angle dont les deux lignes soient l'une dans un plan et l'autre dans l'autre plan, mais toutes deux perpendiculaires à la commune section; car si l'on tiroit ces lignes obliquement l'on formeroit des angles plus petits, ou plus grands, qui n'auroient aucun rapport fixe avec l'angle des deux plans, et qui, en faisant mouvoir les deux plans, n'auroient point une marche uniforme ou égale à celle des plans; la ligne perpendiculaire est la seule qui decrit un cercle. Enfin si l'on imagine les deux plans perpendiculaires l'un à l'autre, en sorte qu'ils fassent un angle droit, les lignes qui doivent mesurer leur angle doivent être perpendiculaires entre elles, ce qui n'arriveroit pas si elles n'étoient perpendiculaires à la commune section des deux plans; donc, pour mesurer l'angle de deux plans, il faut tirer dans chaque plan une ligne perpendiculaire à la commune section; ces lignes feront, dans leur point de rencontre avec cette commune section, un angle égal à l'inclinaison des deux plans (1122).

3860. La trigonométrie sphérique consiste à résoudre les triangles formés sur la surface d'un globe par trois arcs de grands cercles. Considérons, par exemple, sur un globe, l'écliptique, l'équateur et le méridien: la plus grande distance des premiers étant de $23°\frac{1}{2}$ à $90°$ du point de réunion ou de l'équinoxe, supposons qu'on demande combien ils seront écartés à moitié chemin, ou à $45°$ de l'équinoxe; on trouve $16°\frac{1}{3}$; c'est bien plus que la moitié de $23°\frac{1}{2}$, que l'on trouveroit pour leur distance, si c'étoit un triangle rectiligne, c'est-à-dire que l'écliptique et l'équateur fussent des lignes droites.

La premiere trigonométrie sphérique consista probablement à mesurer les écartemens sur le globe, avec un compas; mais, vers l'an 250 avant J.-C., ou plus anciennement peut-être, on remarqua que,

la déclinaison ou la distance entre l'écliptique et l'équateur ne suit pas la proportion des arcs, qu'elle suivroit si ces côtés étoient des lignes droites; on ne trouve la même proportion que dans leurs sinus ou dans les lignes droites qui mesurent leurs hauteurs au-dessus du diametres, ou leurs courbures : en employant ces sinus au lieu des arcs, on a les mêmes regles que dans la trigonométrie rectiligne. En effet, quand le sinus ou la hauteur de l'arc de longitude du Soleil est réduit à moitié, le sinus ou la hauteur de l'arc de déclinaison est aussi diminué de moitié, parceque, comme on le verra bientôt, ces deux hauteurs forment un triangle qui est toujours semblable à lui-même, et dont toutes les dimensions diminuent proportionellement, depuis le solstice jusqu'à l'équinoxe. C'est là le fondement de toute la trigonométrie sphérique ; ainsi elle se réduit à la trigonométrie rectiligne, au moyen de trois théorêmes que nous démontrerons de la maniere la plus simple, après que nous aurons donné quelques notions des propriétés générales des triangles sphériques.

3861. On ne considere ici que les arcs de grands cercles (29), comme nous l'avons dit (30), parceque la plus courte distance d'un point à un autre sur la surface d'une sphere est un arc de grand cercle; au lieu qu'on pourroit, par deux points donnés, tirer une infinité d'arcs de petits cercles, de toutes les grandeurs, et d'un nombre quelconque de degrés, sans qu'il y eût jamais aucune regle pour connoître la longueur des côtés et la grandeur des angles, si l'on ne s'étoit pas borné à ne considérer que les grands cercles.

3862. D'ailleurs nous ne pouvons mesurer dans le ciel que des arcs de grands cercles, parceque nous sommes au centre de tous les grands cercles, et non au centre d'aucun des petits cercles; ainsi nos instrumens ne nous donnent jamais que des arcs de grands cercles. C'est donc nécessairement ceux-là qu'il faut employer; les petits cercles ne se présentent qu'indirectement et par occasion dans l'astronomie, mais on ne les emploie point et on les réduit à de grands cercles (3877).

3863. Nous avons expliqué au commencement de cet ouvrage ce que c'est que l'axe d'un grand cercle (17 et 18) : nous avons dit que les poles sont les extrémités de l'axe; ainsi les poles sont également éloignés de tous les points de la circonférence de leur cercle ; et lorsqu'on a pris un point comme pole, on peut avec un compas courbe décrire le cercle dont il est le pole, pourvu qu'on prenne une ouverture de compas qui soit de 90°, ou d'un quart de la circonférence du globe sur lequel on veut décrire le cercle.

Deux grands cercles quelconques, décrits sur la surface d'une

sphere, se coupent nécessairement en deux parties égales (30); on le verra aisément sur un globe. Au reste on ne peut espérer de comprendre bien la trigonométrie sphérique sans s'exercer à tracer sur un globe des triangles de différentes formes et pour les différens cas; on aura pour lors plus de facilité à les représenter sur le papier.

3864. Si deux grands cercles se coupent à angles droits, chacun des deux cercles passe par les poles de l'autre; car les poles sont sur un axe perpendiculaire au plan de leur cercle; donc ils sont dans un plan perpendiculaire au plan du cercle, et qui passe par son centre; donc ils sont sur le cercle qui lui est perpendiculaire. Il en est de même de deux ou de plusieurs arcs qui seroient perpendiculaires à un autre arc; car ils iroient tous concourir au pole de celui-ci, ou à 90° de distance de cet arc : réciproquement un arc qui coupe deux ou plusieurs autres arcs à 90° de distance de leur intersection, les coupe tous perpendiculairement, puisque tous ces cercles passent par ses poles. Ces propriétés des triangles sphériques sont importantes.

3865. Soit BCF (FIG. 322) le diametre d'un globe ou d'une sphere sur la circonférence de laquelle on ait décrit deux grands cercles BLF, BMF, qui se coupent en deux parties égales en B et en F; si l'on décrit un autre arc LM à 90° des points B et F, il aura pour poles les points B et F; il sera la mesure de la distance des points L et M; égal à l'angle que formeroient au centre C de la sphere les rayons menés aux points L et M; il sera donc égal à l'angle que forment les plans des deux cercles BAFCB, BLFCB, ou égal à l'angle que formeroient au point B deux tangentes au cercles BM et BL, c'est-à-dire à l'angle sphérique LBM; donc pour avoir la mesure d'un angle sphérique LBM, il faut décrire un cercle à 90° de distance du sommet B de l'angle donné; l'arc LM, compris entre les côtés de l'angle, en sera la mesure, en même temps qu'elle aura pour pole le sommet B du même angle.

3866. *Dans tout triangle sphérique rectangle, les angles obliques sont de même espece que les côtés opposés;* c'est-à-dire qu'un angle aigu est toujours opposé à un côté aigu, et un angle obtus à un côté obtus. Soit le triangle FKI rectangle en K, dont le côté FK et l'hypoténuse FI soient prolongés jusqu'au point B opposé au point F; les arcs FKB, FIB, seront de 180° chacun. Du point F ou B, comme pole, décrivez LM; cet arc sera la mesure de l'angle F ou B supposé aigu; donc LM est aigu; donc, et à plus forte raison, IK est aigu; donc il est de même espece que l'angle opposé B ou F; donc le côté opposé à un angle aigu est toujours aigu dans un triangle rectangle.

Les arcs IK et LM sont perpendiculaires au même demi-cercle FBM; donc ils ne se rencontreront qu'au pole de ce cercle FMB, c'est-à-

dire à 90° de M et de K; donc il faudroit prolonger ML et IK pour qu'ils se coupassent; donc la perpendiculaire abaissée de I sur FMB tombe dans le quart FM; donc FK est aigu comme FI; donc BK est obtus; donc BIK est aussi obtus : car si BIK étoit aigu, BK le seroit aussi, comme nous venons de le démontrer; donc KIF est aigu. Ainsi, dans un triangle rectangle, l'angle opposé à un côté aigu est toujours aigu.

Si un angle BIK est obtus, son supplément KIF sera aigu, ainsi que le côté KF; donc BK sera obtus; donc, dans un triangle rectangle, l'angle opposé à un côté obtus est aussi obtus.

Si un arc BK est obtus, son supplément KF est aigu ainsi que KIF; donc KIB est obtus; donc, dans un triangle rectangle, le côté opposé à un côté obtus est aussi obtus; donc en général, *dans un triangle rectangle, l'angle et le côté opposé sont de même espece.*

3867. Si les côtés d'un triangle sphérique rectangle sont de même espece, c'est-à-dire tous deux aigus ou tous deux obtus, l'hypoténuse sera toujours aiguë; et s'ils sont de différente espece, l'hypoténuse sera toujours plus grande que 90° [a].

Démonstration. Dans le triangle sphérique FIK rectangle en K, dont les côtés FK et KI sont aigus, il est clair que l'hypoténuse FI est aussi aiguë; car ayant pris FM de 90°, on aura FL aussi de 90°, parceque l'arc LM aura pour pole le point F; donc FI est plus petite que 90°. Supposons que dans le triangle BIK les côtés BK et BI soient obtus, et que l'angle B devienne un angle droit, alors l'hypoténuse KI sera aiguë : car, si BK et BI surpassent 90°, leurs supplémens FK et FI seront moindres que 90°; donc dans le triangle KFI également rectangle en F, on aura l'hypoténuse IK plus petite que 90°, suivant la premiere partie de notre démonstration; or l'hypoténuse KI est commune aux deux triangles; donc le triangle BKI, rectangle en B et dont les côtés sont tous deux obtus, a aussi son hypoténuse aiguë.

3868. Si les côtés sont de différente espece, comme dans le triangle BIK supposé rectangle en K, où BK est plus grand que 90°, et KI plus petit, l'hypoténuse BI est nécessairement plus grande que 90°, puisqu'alors son supplément IF est aigu, comme nous l'avons démontré.

3869. En considérant de même les triangles FKI, BKI, rectangles en K, on voit aisément, au moyen de ce qui précede, les six vérités suivantes; 1°. si les deux angles obliques F et I sont de même es-

[a] Cette regle et celle des deux articles suivans peuvent être remplacées par la regle seule du changement de signes qui a lieu pour les cosinus, tangentes et cotangentes des angles obtus.

pece, l'hypoténuse est moindre que 90°, comme dans le triangle FKI où les deux angles sont aigus; 2°. si les deux angles obliques sont d'espece différente, comme dans le triangle BKI, hypoténuse BI est plus grande que 90°, car les deux côtés seront aussi de différente espece; 3°. si l'hypoténuse est aiguë, les angles et les côtés sont de même espece; 4°. si l'hypoténuse est plus grande que 90°, les deux angles sont de différente espece, et les deux côtés sont aussi l'un aigu et l'autre obtus, comme dans le triangle BIK dont l'angle I est obtus, aussi-bien que le côté BK et l'hypoténuse BI, tandis que l'angle B et le côté IK sont aigus; 5°. si l'hypoténuse et l'un des côtés sont de même espece, l'autre côté avec son angle opposé sont nécessairement aigus; comme dans le triangle BIK; 6°. l'hypoténuse et l'un des côtés IK étant d'especes différentes, l'autre côté BK et son angle opposé I seront toujours plus grands que 90°.

3870. La même figure suffit pour faire reconnoître dans les triangles sphériques rectangles tous les cas douteux, c'est-à-dire ceux où l'on ne peut trouver un côté et un angle à moins qu'on ne sache auparavant s'ils sont aigus ou obtus. Les triangles FKI, BKI, tous deux rectangles en K, ont le côté IK commun; l'angle F de l'un est égal à l'angle B de l'autre: mais quoique ces deux quantités soient les mêmes de part et d'autre, toutes les autres different, car dans l'un, l'hypoténuse FI est aiguë, dans l'autre l'hypoténuse BI est obtuse; le côté FK est aigu, le côté BK est obtus; l'angle FIK est aigu, l'angle BIK est obtus; ainsi *étant donnés un angle et son côté opposé, on ne sauroit trouver les trois autres parties d'un triangle sphérique rectangle, sans savoir si elles sont au-dessus ou au-dessous de 90°*; c'est à quoi se réduisent tous les cas douteux dans les triangles rectangles (3902 et suiv.). Au reste il y a des cas où l'indétermination cesse: on sait presque toujours en astronomie, par l'état de la question qu'on se propose de résoudre, si les quantités qu'on cherche sont plus petites que 90°; par exemple, si l'on cherche le lieu du Soleil par le moyen de sa déclinaison observée et de l'obliquité de l'écliptique (869), on sait bien si le Soleil étoit dans le premier ou dans le second quart de l'écliptique. Il y a aussi des cas douteux dans les triangles obliques (3921); ils sont analogues à ceux que je viens d'expliquer, et l'on en verra la démonstration (3932).

3871. On peut transformer un triangle sphérique en un autre, tel que les angles de celui-ci soient les supplémens des côtés du premier, et réciproquement. Soit le triangle ABC (FIG. 326), dont les côtés soient prolongés jusqu'à 90°, de maniere que ACG, ABH, BAI, BCL, CAN et CBM, soient des quarts-de-cercle; par les extrémités

de ces six arcs de 90° on tirera des arcs FE, ED, DF, qui formeront un triangle DFE, appellé *triangle polaire* ou *supplémentaire.* Le point A est le pole de l'arc FGHE, puisque AG et AH sont l'un et l'autre de 90° (3865); de même le point B est le pole de l'arc DILF, et le point C est le pole de l'arc DNME. De là suit que le point F est le pole du côté AB; car le point A est éloigné de 90° des points F, G, H, et le point B est éloigné de 90° des points F, L, I; donc les points A et B sont éloignés de 90° du point F; donc le point F est le pole de l'arc IABH (3864); l'arc FH est donc de 90°. On démontreroit de même que le point E est le pole de GCAN; d'où il suit que EG est de 90°; donc $EG + FH = 180° = EG + FG + GH = EF + GH$; or GH est la mesure de l'angle A (3864); donc l'angle A ajouté avec le côté EF est égal à 180°; donc l'angle A du triangle donné est le supplément du côté EF du triangle polaire. De même l'angle B est le supplément de DF et l'angle C le supplément de DE. Par la même raison l'angle E du triangle polaire, mesuré par l'arc GCAN, est le supplément du côté CA; car $AG = 90° = CN$; donc $GN = 180° - CA$. Ainsi le triangle polaire DEF est tel que ses côtés sont les supplémens des angles donnés du triangle ABC, et ses angles les supplémens des côtés.

3872. Aussitôt que les premiers astronomes eurent imaginé deux ou trois cercles dans le ciel, l'horizon, le méridien, l'équateur et l'écliptique (art. 11, 15, 19, 64), ils durent chercher un moyen de mesurer l'écartement de ces cercles à diverses distances des points de réunion; et de là naquit la trigonométrie sphérique (3860): c'est même encore le problême fondamental et le premier, dont je vais donner la solution par une méthode plus simple qu'on ne le fait dans les livres ordinaires.

3873. *Dans tout triangle sphérique* BAD (FIG. 321) *rectangle en* A, *le rayon est au sinus de l'hypoténuse* BD *comme le sinus d'un des angles* B *est au sinus de son côté opposé.*

DÉMONSTRATION. Soit C le centre de la sphere, sur la surface de laquelle sont tracés les arcs BA, AD et DB; soit CB la commune section des deux plans CBD et CBA; du point D, supposé relevé au-dessus de la figure, il faut concevoir une ligne DF abaissée perpendiculairement sur le plan BCA du côté BA: cette perpendiculaire tombe en un point F, et du point F on tire une ligne FE perpendiculaire sur la commune section CB; du point D on tirera au point E une troisieme ligne DE. Le plan du triangle DFE est perpendiculaire à la commune section CB, puisqu'une de ses lignes EF est perpendiculaire à CB, et que le triangle lui-même DFE est perpendiculaire au plan CAB,

CAB, à cause de la ligne DF abaissée perpendiculairement sur ce plan CAB : ainsi la ligne DE est aussi perpendiculaire à CB ; donc l'angle DEF est égal à l angle de deux plans CBA et CBD, par conséquent égal à l'angle sphérique DBA (3859, 3865). Dans le triangle DFE rectiligne rectangle en F, on a, par les principes de la trigonométrie rectiligne, la proportion suivante : le sinus total est à ED comme le sinus de l'angle E est à DF ; mais ED est le sinus de l'arc BD, puisque c'est la perpendiculaire abaissée de l'extrémité D de l'arc sur le rayon CB qui passe par l'autre extrémité ; et DF est le sinus de l'arc DA par la même raison : enfin l'angle DEF est égal à l'angle sphérique B ; donc la proportion se réduit à celle-ci, R : sin. BD :: sin. B : sin. DA : les mêmes lignes DE et DF fournissent elles seules les quatre termes de la proportion ; donc enfin le sinus total est au sinus de l'hypoténuse BD comme le sinus de l'angle B est au sinus du côté opposé AB. C. Q. F. D. Cette analogie a servi (899, 908).

3874. Donc si un triangle isoscele est partagé en deux triangles rectangles égaux (2267), on aura cette proportion : le sinus total est au sinus d'un côté, comme le sinus de la moitié de l'angle est au sinus de la moitié de la base.

3875. De là il suit encore que la distance DA de deux cercles BA et BD en différens points, mesurée perpendiculairement à l'un des cercles, comme BA, est proportionelle au sinus de la distance BD au point d'intersection, mesurée sur l'autre cercle, ainsi que nous l'avons supposé (2965).

3876. Un petit arc DA de la sphere céleste (FIG. 322) se présente dans le calcul et se considere nécessairement sous deux formes différentes, suivant les circonstances. Il est vrai que nous ne mesurons jamais qu'un arc de grand cercle, tel que LM ou AD (3862) ; mais la mesure du temps nous donne AD sous la forme d'un arc de petit cercle, qui seroit parallele au grand cercle LM qui est l'équateur : sous ce point de vue, il contient plus de minutes du petit cercle, et cela d'autant plus qu'il fait partie d'un plus petit parallele ; ou, ce qui revient au même, il contient autant de minutes du petit cercle qu'il y en a sur l'équateur LM, en y rapportant l'arc AD dont il s'agit par des cercles perpendiculaires BDL, BAM.

3877. LA RÉDUCTION à un grand cercle est une opération qui se fait continuellement dans l'astronomie, et pour laquelle je vais entrer dans un certain détail, parcequ'elle tient à l'intelligence de tous les calculs astronomiques.

Supposons deux grands cercles PSD, PCB (planche III, FIG. 27), qui fassent entre eux un angle P assez petit pour qu'on puisse con-

sidérer l'arc qui en est la mesure, comme une ligne droite, c'est-à-dire un angle au plus d'un degré; que PB soit de 90 degrés, en sorte que BD soit la mesure du petit angle P; qu'à une distance quelconque du sommet P, on tire un autre arc de grand cercle SC, perpendiculaire sur PCB : cet arc est aussi regardé comme une ligne droite, et en même temps PS est sensiblement égal à PC: dans le triangle PSC rectangle en S et en C, on a cette proportion (3873): le rayon est au sinus de l'hypoténuse PS, comme le sinus du petit angle P est au sinus du petit arc SC, ou, à cause de leur petitesse, comme l'angle P lui-même est à l'arc SC (parceque les petits arcs sont égaux à leurs sinus), ou comme l'arc BD est à l'arc SC. Ainsi, prenant l'unité pour rayon ou sinus total, on aura 1 : sin. PS :: DB : SC; donc SC = BD · sin. PS; donc en général, *un arc, tiré au dedans d'un très petit angle sphérique, perpendiculairement aux côtés, est égal à ce petit angle multiplié par le sinus de la distance de l'arc au sommet de l'angle.*

3878. Si la petite ligne CS est considérée comme un arc d'un petit cercle GCSF, décrit du même pole P et parallele au cercle BDE, par exemple, à l'équateur, à l'écliptique ou à l'horizon; alors cet arc contient autant de minutes du petit cercle que DB contient de minutes du grand cercle BE; mais il y en a moins si l'on se sert du grand cercle qui passe par CS; ainsi on réduit les minutes du petit cercle en minutes du grand cercle, en les multipliant par le sinus de la distance du petit cercle au pole P de ce petit cercle, qui est aussi le pole du grand cercle EB: si PS est de 30°, son sinus étant la moitié du rayon, l'arc CS considéré comme portion du grand cercle ne contiendra que la moitié des minutes qu'il contiendroit si on le considéroit comme portion du petit cercle CSF : dix minutes de ce petit cercle répondent à dix minutes de l'arc DB du grand cercle auquel il est parallele, mais ne font que cinq minutes sur le grand cercle qui passe par CS dans la région de l'astre S; c'est cependant celui-ci qui regle la véritable valeur de l'arc CS, tel que nous l'observons.

3879. De là il suit qu'un petit arc de l'équateur, une petite différence d'ascension droite multipliée par le cosinus de la déclinaison de l'astre qu'on observe, donnera l'effet qui en résulte dans la région de l'astre, ou le vrai petit arc de grand cercle compris dans cet endroit-là entre les deux cercles de déclinaison PA, PS. Voilà pourquoi, si l'on trouvoit 2 minutes de temps pour la différence des passages des deux bords du Soleil, ce qui fait 30′ de degré, il faudroit multiplier les 30′ du diametre solaire, trouvées pour la différence d'ascension droite, c'est-à-dire BD, par le cosinus de la déclinaison BC, pour avoir CS, qui seroit le véritable diametre du Soleil en arc de grand cercle.

3880. En effet dans l'espace de 2′ que le Soleil CS emploie à traverser le méridien, le cercle horaire PB passe en PD, l'arc BD de l'équateur est de 30′, l'arc CS vaut aussi 30′ du petit cercle CSF parallele à l'équateur; mais il ne vaut pas 30′ de l'arc du grand cercle confondu avec CS; et c'est celui-ci que l'on cherche quand on demande quelle est la valeur du diametre CS du Soleil, puisque nous ne mesurons jamais que des arcs de grands cercles, dont nous occupons le centre (3862), et non des arcs de petits cercles, si ce n'est les paralleles à l'équateur, qui correspondent aux parties de l'équateur lui-même.

3881. Ces réductions sont d'un grand usage dans l'astronomie; et nous y avons renvoyé souvent, quelquefois même sans en avertir. Par exemple, on divise un petit arc de longitude par le cosinus de la latitude d'un astre, pour avoir l'effet que ce petit arc produit quand il est rapporté sur l'écliptique par deux cercles qui partent du pole de l'écliptique, embrassent ce petitarc, et vont marquer la différence de longitude qui en résulte : on fait alors, par rapport à l'écliptique, ce que nous venons de démontrer pour les ascensions droites par rapport à l'équateur. Nous avons donné une table de la quantité qu'il faut ôter de la différence de longitude suivant les différentes latitudes de l'astre, du moins jusqu'à 5° 15′ (*pag.* 101 des tables) : on feroit de même par rapport à l'horizon, si l'on vouloit avoir une différence d'azimut réduite à l'horizon par le moyen d'une petite distance mesurée horizontalement dans la région de l'étoile, ou parallèlement à l'horizon telle que nous l'avons employée (1888, 2127).

3882. *Dans tout triangle sphérique rectangle, le rayon est au sinus d'un côté, comme la tangente de l'angle adjacent à ce côté est à la tangente du côté opposé.* C'est ici le second théorême fondamental de la trigonomètrie sphérique.

Démonstration. Soit le triangle sphérique BAD (fig. 322) rectangle en A; du point A l'on abaissera la perpendiculaire AE sur la commune section CEB des deux plans CBA et CBD : on concevra aussi une ligne AG élevée du point A perpendiculairement sur les lignes AE et AC, et perpendiculairement au plan de la figure jusqu'à la rencontre du rayon CDG, qui passe par l'autre extrémité D du côté AD ; alors AG sera la tangente de l'arc AD, qui est l'un des côtés du triangle. Du sommet G de cette tangente on tirera une ligne au point E; cette ligne GE sera aussi perpendiculaire à la commune section CB, puisque le triangle GAE lui est perpendiculaire. Le point G, étant sur le rayon CD prolongé, est aussi dans le plan du cercle CBD; ainsi la ligne GE est dans le même plan CBDG; l'angle GEA est

donc formé par deux lignes qui sont perpendiculaires à la commune section des plans CBA, CBD, et qui sont chacune dans un de ces plans; donc cet angle GEA est égal à l'angle des deux plans (3859), ou à l'angle sphérique B. Dans le triangle rectiligne AEG rectangle en A, si l'on prend EA pour rayon, le côté AG devient la tangente de l'angle AEG qui est égal à l'angle sphérique B; donc on a cette proportion, AE : AG :: R : tang. AEG, ou R : AE :: tang. AEG : AG; c'est-à-dire què le rayon est au sinus du côté AB comme la tangente de l'angle B est à la tangente du côté opposé AD. On s'est servi de cette proposition dans les articles 895, 899, etc. Le troisieme théorême fondamental sera démontré plus bas (3976); il ne sert en astronomie que dans un seul cas (3937).

3883. Par le moyen des deux théorêmes (3873, 3882), on démontre facilement quatre autres analogies nécessaires pour la résolution des triangles sphériques rectangles. Soit le triangle BCD (FIG. 323) rectangle en D, dont l'hypoténuse et les côtés soient prolongés jusqu'à la valeur de 90°, en sorte que BE, BF et DA, soient des quarts-de-cercles; par les points A et F on tirera l'arc AEF; alors on aura le triangle ACE rectangle en E, dans lequel AC est le complément de CD, CE le complément de BC, AE le complément de EF ou de l'angle B; enfin l'angle A, qui a pour mesure DF, est le complément de BD. Ce triangle AEC sert à démontrer les quatre autres propriétés du triangle donné BCD.

3884. Le nouveau triangle AEC rectangle en E donne cette proportion (3882), R : sin. AE :: tang. A : tang. CE, c'est-à-dire R : cos. B :: cot. BD : cot. BC; donc, dans le triangle primitif BCD, *le rayon est au cosinus d'un angle, comme la cotangente du côté adjacent est à la cotangente de l'hypoténuse*, ou comme la tangente de l'hypoténuse est à la tangente du côté adjacent. On en fait usage dans les articles 895, 1130, etc.

3885. Le triangle AEC donne cette proportion (3873), R : sin. AC :: sin. C : sin. AE, ou R : cos. CD :: sin. C : cos. B; donc *le rayon est au cosinus d'un côté, comme le sinus de l'angle adjacent à ce côté est au cosinus de l'autre angle.* On s'en est servi dans les articles 895, etc.

3886. Dans le triangle AEC l'on a (3873) R : sin. AC :: sin. A : sin. CE; donc R : cos. CD :: cos. BD : cos. BC; c'est-à-dire que *le rayon est au cosinus d'un côté, comme le cosinus de l'autre côté est au cosinus de l'hypoténuse.* On l'a employée dans les articles 899, 903, etc.

3887. Dans le triangle AEC l'on a enfin cette proportion (3882),

R : sin. CE : : tang. C : tang. AE, ou R : cos. BC : : tang. C : cot. B ; donc *le rayon est au cosinus de l'hypoténuse*, *comme la tangente d'un des angles est à la cotangente de l'autre angle.* Cette analogie est en usage dans les articles 910, etc.

Ces quatre proportions, réunies à celles des deux premiers théorêmes (3873, 3882), suffisent pour les seize cas qui peuvent se présenter dans la solution des triangles sphériques rectangles, et que je vais détailler de la maniere qui est la plus commode pour l'usage : on en trouvera un exemple à l'article des logarithmes (4109).

3888. Je n'y ai point donné de regle pour trouver si la quantité que l'on cherche est plus grande que 90° : les articles 3866 et suivans fournissent des regles pour le savoir, dans tous les cas où cela est déterminé. On peut aussi employer la regle des signes (3794) : un angle aigu a tout positif, sinus, cosinus, tangente et cotangente : un angle obtus n'a de positif que le sinus, tout le reste est négatif. Si dans l'opération on a employé une ou trois quantités négatives, le résultat est négatif.

Cependant, pour plus de facilité, j'ajouterai ici l'explication d'une figure, où l'on voit la maniere de déterminer l'espece des inconnues dans les articles suivans.

Soit un cercle entier AGDEA (FIG. 342); un demi-cercle ACFD formant un angle aigu FAG ou FDG sur le plan AGDEA ; l'arc FG, décrit de A ou D comme pole, partagera en deux également les demi-cercles AGD, AFD, et sera la mesure des angles GAF, GDF : par le point B je mene le demi-cercle BCPE perpendiculaire au cercle entier AGDEA, et qui passera par le pole P de ce cercle. Les angles PEA, PED, seront droits, ainsi que PBA, PBG ; on aura AB = DE et AE = BD : l'arc BC étant aigu, CE sera obtus ; les demi-cercles, par leurs différentes combinaisons, forment quatre triangles sphériques rectangles ABC, AEC, DEC, DBC, et ces quatre triangles offrent toutes les variétés possibles, et font voir la verité des propositions démontrées ci-dessus pour déterminer l'espece des différentes parties des triangles. Cette figure peut même dispenser de connoître ces propositions en montrant directement l'inconnue elle-même et son espece. Supposons, par exemple, qu'on connoisse deux côtés, et que l'on demande les autres parties : si ces côtés sont tous deux aigus, je les appelle AB et BC ; je vois que tout est aigu dans le triangle. Si ces côtés sont obtus, je les appelle AE et CE ; je vois que tout le reste est obtus, sauf l'hypoténuse. Les côtés sont-ils de différente espece, je les appelle BD et BC ; je vois que l'hypoténuse BD est obtuse, ainsi que BCD opposé à BD, tandis que D, opposé à BC, est

aigu. On auroit pu également, dans ce cas, se servir de DEC. Ainsi, quelsque soient les deux données, on trouvera toujours un des quatre triangles, qui en présentera deux d'espece pareille et semblablement placées.

Table des Analogies qui satisfont aux seize cas des triangles sphériques rectangles.

3889. Connoissant les deux côtés, trouver l'hypoténuse. Le rayon est au cosinus d'un côté, comme le cosinus de l'autre côté est au cosinus de l'hypoténuse (3886).

3890. Connoissant les deux côtés, trouver les angles. Le rayon est au sinus du côté adjacent à l'angle cherché, comme la cotangente de l'autre côté est à la cotangente de l'angle cherché (3882).

3891. Connoissant un côté et l'angle adjacent, trouver l'hypoténuse. Le rayon est au cosinus de l'angle, comme la cotangente du côté adjacent est à la cotangente de l'hypoténuse (3884).

3892. Connoissant un côté et l'angle adjacent, trouver l'autre côté. Le rayon est à la tangente de l'angle, comme le sinus du côté est à la tangente du côté opposé à l'angle donné (3882).

3893. Connoissant un côté et l'angle adjacent, trouver l'autre angle. Le rayon est au cosinus du côté connu, comme le sinus de l'angle adjacent est au cosinus de l'angle opposé à ce côté (3885).

3894. Connoissant l'hypoténuse et un côté, trouver l'angle opposé à ce côté. Le sinus de l'hypoténuse est au rayon, comme le sinus du côté connu est au sinus de l'angle opposé (3873).

3895. Connoissant l'hypoténuse et un côté, trouver l'angle adjacent à ce côté. Le rayon est à la cotangente de l'hypoténuse, comme la tangente du côté est au cosinus de l'angle adjacent (3884).

3896. Connoissant l'hypoténuse et un côté, trouver l'autre côté. Le cosinus du côté connu est au rayon, comme le cosinus de l'hypoténuse est au cosinus de l'autre côté (3886).

3897. Connoissant l'hypoténuse et un angle, trouver l'autre angle. Le rayon est au cosinus de l'hypoténuse, comme la tangente de l'angle connu est à la cotangente de l'autre angle (3887).

3898. Connoissant l'hypoténuse et un angle, trouver le côté opposé à cet angle. Le rayon est au sinus de l'hypoténuse, comme le sinus de l'angle est au sinus du côté opposé à cet angle (3873).

3899. Connoissant l'hypoténuse et un angle, trouver le côté adjacent à cet angle. Le rayon est au cosinus de l'angle, comme la tan-

gente de l'hypoténuse est à la tangente du côté adjacent à l'angle donné (3884).

3900. Connoissant les deux angles, trouver l'hypoténuse. Le rayon est à la cotangente d'un des angles, comme la cotangente de l'autre est au cosinus de l'hypoténuse (3887).

3901. Connoissant les deux angles, trouver les côtés. Le sinus de l'angle adjacent au côté cherché est au rayon, comme le cosinus de l'autre angle est au cosinus du côté cherché (3885).

3902. Connoissant un côté et son angle opposé, trouver l'hypoténuse. Le sinus de l'angle connu est au rayon, comme le sinus du côté connu est au sinus de l'hypoténuse (3873). Il faut savoir d'ailleurs si elle est plus ou moins grande que 90° (3870).

3903. Connoissant un côté et son angle opposé, trouver l'autre côté. Le rayon est à la tangente du côté donné, comme la cotangente de l'angle connu est au sinus du côté cherché (3882). Il faut savoir d'ailleurs s'il est aigu ou obtus (3870).

3904. Connoissant un côté et son angle opposé, trouver l'autre angle. Le cosinus du côté connu est au rayon, comme le cosinus de l'angle connu est au sinus de l'autre angle (3885). Il faut savoir si cet angle est aigu ou obtus (3870).

3905. Neper réduit ces seize cas des triangles rectangles à une seule regle en deux parties, dont les Anglois font usage. Si des six parties d'un triangle il y en a une qui soit de 90°, et qu'on prenne les deux qui sont adjacentes à celle de 90° et les complémens des trois autres, on a cinq parties circulaires, dont deux étant données, on trouve facilement les trois autres; car le rayon et le sinus d'une des cinq parties sont moyens proportionels entre les tangentes des parties qui lui sont adjacentes; ou si cette partie est plus éloignée des deux autres, le rayon et le sinus de cette partie sont moyens proportionels entre les cosinus des parties opposées (*Trig. britannica* 1633, pag. 83).

M. Pingré a donné des regles analogues pour les triangles obliquangles (*Mém.* 1756, pag. 301).

DES TRIANGLES SPHÉRIQUES OBLIQUANGLES.

3906. Les six propriétés des triangles sphériques rectangles démontrées jusqu'ici sont suffisantes pour démontrer six propriétés des triangles sphériques en général, c'est-à-dire des triangles obliques, et pour résoudre les douze problêmes qui peuvent se présen-

ter dans un triangle. Parmi les douze cas de la trigonométrie sphérique, il y en a dont je ne connois aucune application dans l'astronomie ; tel est le cas des trois angles donnés (3941). Je ne laisserai pas de les expliquer tous succinctement, mais je ferai remarquer ceux dont l'usage est le plus fréquent.

C'est souvent en divisant un triangle sphérique obliquangle par une perpendiculaire qu'on parvient à le résoudre. Il n'y a que quatre cas où la perpendiculaire soit inutile (3921, 3932, 3937, 3941) ; mais il y en a huit où l'on a coutume de l'employer : on peut cependant s'en passer par les analogies de Neper (3981). Pemberton (*Philos. Trans.* 1760, p. 928),

3907. *Dans tout triangle sphérique les sinus des angles sont comme les sinus des côtés opposés.* Soit le triangle MON (fig. 324) divisé en deux triangles rectangles par un arc perpendiculaire OP ; l'on aura (3873) :

R : sin. OM :: sin. M : sin. OP } ; donc sin. OM : sin. ON ::
R : sin. ON :: sin. N : sin. OP } sin. N : sin. M.

Si l'on abaissoit la perpendiculaire de chacun des autres angles, on démontreroit la même chose pour tous les côtés comparés deux à deux avec les angles.

3908. L'arc perpendiculaire OP, tiré du sommet d'un angle O sur le côté opposé MN forme deux segmens MP , PN, sur ce côté MN ; si cette perpendiculaire tombe au dehors du triangle, comme dans la figure 325, les segmens PM et PN ne sont pas des parties de l'arc MN , mais on ne laisse pas d'étendre la signification du mot segment même à ce cas-là. L'angle duquel on abaisse la perpendiculaire MN (fig. 324) se trouve divisé en deux parties MOP, PON, que nous appellerons les *angles verticaux.* Si la perpendiculaire OP tombe au dehors du triangle, comme dans la figure 325, la somme des deux angles verticaux ne sera pas égale à l'angle donné MON, mais ce sera leur différence ; les angles formés par la perpendiculaire OP, avec les deux côtés OM, ON, seront également compris sous le nom d'angles verticaux, et les démonstrations suivantes s'y appliqueront également. On appelle angles à la base les angles M et N adjacens au côté MN sur lequel tombe la perpendiculaire OP, soit que ce côté soit prolongé , ou non.

3909. On a plusieurs manieres de distinguer si la perpendiculaire OP (fig. 325) tombe hors du triangle ; mais comme il peut y avoir de la difficulté dans certains cas, M. de Lambre considere la chose d'une maniere qu'on n'avoit point employée, et qui fournit des regles analogues

gues à celles de l'analyse. Il appelle perpendiculaire l'arc abaissé du sommet sur la base, lequel sera toujours opposé à l'angle donné sur cette base et jamais à son supplément, soit que l'angle donné soit aigu, soit qu'il soit obtus ; en sorte que la perpendiculaire tombera toujours, ou sur la base elle-même au-dedans du triangle, ou bien sur le prolongement de cette base, mais dans le supplément de l'autre angle à la base. Ainsi connoissant N et NO, la perpendiculaire tombera, ou sur NM, ou sur son prolongement MX, jamais sur le prolongement NR. Au contraire, si nous prenons pour données M et OM, la perpendiculaire tombera sur MN ou NR et jamais sur MX ; en deux mots la perpendiculaire sera toujours opposée à l'angle donné, jamais à son supplément : cela posé, il est incontestable que la perpendiculaire tombera dehors, c'est-à-dire sur le prolongement MX, 1°. si le vertical PON est donné par le calcul plus grand que MON ; 2°. si le premier segment NP est donné par le calcul plus grand que MN.

D'après cette considération, M. de Lambre a établi les regles que l'on verra bientôt (3915 et suiv.) pour déterminer l'espece de l'inconnue dans les triangles obliquangles. En tous les cas qui exigent deux analogies (3915 et suiv.) on connoît, pour le premier triangle rectangle, l'hypoténuse et l'angle adjacent, qu'on appelle *côté et angle donnés*, et l'on cherche un des côtés qu'on appelle premier segment, ou l'angle opposé qu'on appelle premier angle vertical : or on a vu (3869) que si l'hypoténuse et un côté sont de $\left\{\begin{matrix}\text{même}\\ \text{différente}\end{matrix}\right\}$ espece, l'autre côté et son angle opposé sont nécessairement $\left\{\begin{matrix}\text{aigus}\\ \text{obtus}\end{matrix}\right\}$; mais l'angle et le côté opposé dans un triangle rectangle sont toujours de même espece; nous pouvons donc substituer le mot angle à celui de côté dans la regle précédente, et dire que : si l'hypoténuse et un angle sont de $\left\{\begin{matrix}\text{même}\\ \text{différente}\end{matrix}\right\}$ espece, l'autre angle et son côté opposé sont nécessairement $\left\{\begin{matrix}\text{aigus}\\ \text{obtus}\end{matrix}\right\}$; ou, ce qui revient au même, dans la résolution du premier des deux triangles rectangles, si les deux données sont de $\left\{\begin{matrix}\text{même}\\ \text{différente}\end{matrix}\right\}$ espece, le premier segment et le premier angle vertical seront nécessairement $\left\{\begin{matrix}\text{aigus}\\ \text{obtus}\end{matrix}\right\}$; c'est la regle que nous emploierons (3915, 3918, 3923, 3925, 3927, 3930, 3933, 3936).

Après avoir ainsi déterminé la valeur et l'espece du premier segment et du premier vertical, on prend la différence entre la base et le premier segment, ou la différence entre l'angle au sommet et le premier vertical. Si la base ou l'angle au sommet se trouvent plus grands que le premier segment ou que le premier vertical, la perpendiculaire tombe dans le triangle ; sinon elle tombe dehors. Pour reconnoître l'exactitude de ces préceptes, il suffit de considérer le triangle NOM (FIG. 324 et 325), dans lequel NO et l'angle N sont les deux données de la premiere analogie, NM la base, NOM l'angle au sommet, NP le premier segment, NOP le premier angle vertical.

Les deux triangles rectangles NOP, POM, qui servent à résoudre le triangle obliquangle NOM, ont un côté commun qui est la perpendiculaire OP. Si cette perpendiculaire est $\left\{\begin{matrix}\text{aiguë}\\ \text{obtuse}\end{matrix}\right\}$, le côté NO et le 1[er] segment seront de $\left\{\begin{matrix}\text{même}\\ \text{différente}\end{matrix}\right\}$ espece ; il suffit pour s'en convaincre de jeter les yeux sur la figure 322 : on y voit que si la perpendiculaire est aiguë comme IK, l'hypoténuse et le côté sont de même espece, c'est-à-dire tous deux aigus, comme IF, KF, ou tous deux obtus comme IB, KB. Si la perpendiculaire est obtuse, comme BK dans le triangle IBK, l'hypoténuse BI et le côté IK seront de différente espece.

On dira de même dans le triangle POM, si la perpendiculaire est $\left\{\begin{matrix}\text{aiguë}\\ \text{obtuse}\end{matrix}\right\}$, le côté MO et le second segment MP seront de $\left\{\begin{matrix}\text{même}\\ \text{différente}\end{matrix}\right\}$ espece ; donc, à cause de la perpendiculaire commune OP, si le 1[er] côté et le premier segment sont de $\left\{\begin{matrix}\text{même}\\ \text{différente}\end{matrix}\right\}$ espece, le second côté et le second segment seront aussi de $\left\{\begin{matrix}\text{même}\\ \text{différente}\end{matrix}\right\}$ espece.

On peut dans cette regle substituer le mot *vertical* au mot *segment*, puisqu'ils sont toujours opposés l'un à l'autre, et par conséquent de même espece.

On pourroit encore énoncer ainsi cette double regle : si les deux côtés NO, MO, sont de $\left\{\begin{matrix}\text{même}\\ \text{différente}\end{matrix}\right\}$ espece, les 2 segmens et les 2 verticaux seront aussi de $\left\{\begin{matrix}\text{même}\\ \text{différente}\end{matrix}\right\}$ espece, et réciproquement.

Ces regles nous serviront aux articles 3915, 3923, 3925 et 3927, pour déterminer l'espece de l'inconnue.

La regle qui nous a servi à distinguer si la perpendiculaire tombe en dedans ou au dehors du triangle, fait aussi connoître si les deux angles sur la base sont de même ou de différente espece. Cette remarque servira à faire connoître l'espece du second angle sur la base dans les articles 3918 et 3930 ; elle fait connoître s'il faut prendre la somme ou la différence des angles verticaux pour avoir l'angle cherché (3934), et s'il faut prendre la somme ou la différence des segmens pour avoir le côté cherché (3936).

Ainsi voilà toutes les regles des triangles obliquangles démontrées ; il reste à démontrer quatre regles qui servent pour leur application.

3910. Dans les triangles MOP, PON (FIG. 324 et 325), on a les proportions suivantes (3886) ; R : cos. OP :: cos. PM : cos. OM ; et R : cos. OP :: cos. PN : cos. ON ; donc cos. PN : cos. PM :: cos. ON : cos. OM, c'est-à-dire que *les cosinus des segmens sont comme les cosinus des côtés adjacens.*

Quand un côté est de 90°, son cosinus est zéro ; mais on peut se servir dans ces cas-là du triangle suplémentaire (3871). Cependant M. de Lambre préfere les deux formules suivantes :

Si le côté connu ON est de 90°, on a aussi PN = 90°, de plus l'arc OP = l'angle N ; MP = MN — 90°, ou bien M'P = 90° — M'N ; le triangle MOP donne cos. MO = cos. PM · cos. PO = sin. MN · cos. N ; le triangle POM' donne cos. M'O = cos. N · sin. M'N.

On a encore cotang. M = sin. PM · cot. PO = — cos. MN · cot. N, et cot. PM'O = — cot. OM'N = sin. PM · cot. OP = cos. M'N · cot. N ; donc cotang. OM'N = — cos. M'N · cot. N. Ainsi, dans tous les cas, cotang. angle cherché = — cos. base · cotang. angle connu, et cos. côté cherché = sin. base · cos. angle connu.

Pour ne point parler des signes algébriques, on dira que le côté cherché est toujours de même espece que l'angle connu, et que l'angle cherché et l'angle connu sont de même espece.

3911. Dans les triangles MOP, PON, on a les proportions suivantes (3882) ; R : sin. PM :: tang. M : tang. OP, ou R : cot. OP :: sin. PM : cot. M, et R : cot. OP :: sin. PN : cot. N ; donc sin. PN : sin. PM :: cot. N : cot. M ; c'est-à-dire que *les sinus des segmens sont comme les cotangentes des angles à la base*, ou en raison inverse des tangentes des angles à la base.

3912. Par les mêmes triangles MOP, PON, on a aussi (3885) :

R : cos. OP :: sin. POM : cos. M } ; donc sin. POM : sin. PON
R : cos. OP :: sin. PON : cos. N } :: cos. M : cos. N.

Donc les sinus des angles verticaux sont comme les cosinus des angles à la base.

3913. Enfin l'on a ces deux proportions (3884);

R : cos. POM :: cotang. OP : cot. OM,

R : cos. PON :: cotang. OP : cot. ON;

donc cos. POM : cos. PON :: cot. OM : cot. ON; ainsi *les cosinus des angles verticaux sont comme les cotangentes des côtés adjacens.*

3914. Quand on abaisse une perpendiculaire OP, on a encore cette proportion; tang. $\frac{1}{2}$MN : tang. $\frac{OM+ON}{2}$ :: tang. $\frac{OM-ON}{2}$: tangente $\frac{PN-PM}{2}$. En effet cos. ON : cos. OM :: cos. PN : cos. PM (3910); donc cos. ON + cos. OM : cos. ON — cos. OM :: cos. PN + cos. PM : cos. PN — cos. PM. Et mettant pour le rapport des sommes et des différences de cosinus celui qui a été démontré (3840), on aura cot. $\frac{ON+OM}{2}$: tang. $\frac{ON-OM}{2}$ :: cot. $\frac{NP+PM}{2}$ ou $\frac{MN}{2}$: tang. $\frac{PN-PM}{2}$; ce qui revient à la proportion énoncée ci-dessus. On s'en sert pour résoudre un triangle dont on connoît les trois côtés (3937), et même un triangle rectiligne, en prenant les côtés au lieu des tangentes (1974).

3915. *Connoissant deux côtés et l'angle compris, trouver le troisieme côté.* L'on abaissera une perpendiculaire de l'extrémité du plus petit côté donné sur l'autre côté donné en le prolongeant, et l'on fera cette proportion (3884);

Le rayon
Est au cosinus de l'angle donné,
Comme la tangente du plus petit côté donné
Est à la tangente du premier segment.

Ce premier segment sera aigu si l'angle et le côté donnés sont de même espece; il sera obtus s'ils sont d'especes différentes. On prendra la différence entre ce premier segment et le côté entier; pour avoir le second segment, et l'on fera la seconde proportion;

Le cosinus du premier segment
Est au cosinus du second segment,
Comme le cosinus du petit côté donné
Est au cosinus du côté cherché.

Le côté cherché sera de même espece que le côté donné, si les deux segmens sont de même espece; sinon il sera d'une espece différente; ou, ce qui revient au même, le côté cherché sera obtus, si les arcs obtus sont en nombre impair dans les trois premiers termes. Ces regles ne sont au fond qu'une traduction des formules de M. Cagnoli.

3916. M. Cagnoli (pag. 269) préfere d'employer les formules dont les signes rendent ces regles générales plus simples. Imaginons un triangle ABC (FIG. 326), et une perpendiculaire AX, nous aurons tang. BX = tang. AB · cos. B ; ensuite CX = BC ∾ BX ; ce signe ∾ indique qu'on peut ôter indifféremment l'un de l'autre ; enfin cos. AC = cos. AB · $\frac{\text{cos. CX}}{\text{cos. BX}}$: alors, pour savoir si ce côté AC est obtus, il suffit d'avoir égard aux signes + et — dans le calcul de ces équations, et se souvenant que + par — donne —, et — par — donne +, et que pour un angle obtus, le cosinus, la tangente et la cotangente sont négatifs; alors on n'a pas besoin de savoir si la perpendiculaire tombe en dehors du triangle; et faute d'avoir eu égard à ces regles des signes, plusieurs bons auteurs, tels que la Caille, Bezout, etc., ont donné des regles qui quelquefois sont en défaut.

Malgré l'avantage de cette méthode, je conserverai les regles syntétiques dont on vient de voir un premier exemple, et qui plaisent à certaines personnes.

Ce problême est un des plus utiles dans l'astronomie, parcequ'il sert à trouver la hauteur d'un astre pour un moment quelconque (1036), la distance de la Lune aux étoiles (4177), comme sur la Terre la distance d'un lieu à un autre, le mouvement d'une comete sur son orbite (3142), etc.

3917. Ces analogies, qui renferment des cosinus, sont sujettes à quelque défaut de précision, quand par un cosinus fort petit on en cherche un qui est très grand. Voici donc une formule qui ne renferme que des sinus, et que nous appliquerons au triangle PZS (FIG. 35), pour trouver la distance au zénit (1036) (*Murdoch, Philos. Trans.* 1758, p. 540) : sin. $\frac{1}{2}$ZS² = sin. PZ · sin. PS · sin. $\frac{1}{2}$P² + sin. $\frac{1}{2}$(PZ — PS)² ; on en verra la démonstration avec un exemple (4180).

3918. *Connoissant deux côtés et l'angle compris, trouver l'un des deux autres angles opposés aux côtés donnés.* Abaissez la perpendiculaire sur le côté connu adjacent à l'angle cherché, et calculez le premier segment par cette proportion (3884) ;

Le rayon
Est au cosinus de l'angle donné,
Comme la tangente du côté opposé à l'angle cherché
Est à la tangente du premier segment.

Ce premier segment est obtus si l'angle et le côté donnés sont de différente espece.

Prenez dans tous les cas la différence entre la base et ce premier

segment, vous aurez le second segment; ensuite vous ferez cette proportion (3911);

Le sinus du second segment
Est au sinus du premier segment,
Comme la tangente de l'angle donné
Est à la tangente de l'angle cherché.

L'angle cherché sera d'une autre espece que l'angle donné, si le premier segment s'est trouvé plus grand que la base.

3919. Pour savoir si cet angle est obtus, on peut employer la regle des signes dans les équations suivantes, où l'on suppose connus C, AC et BC. On a d'abord tang. CX = cos. C · tang. AC, ensuite BX = BC — CX, enfin tang. B = $\frac{\text{tang.C} \cdot \text{sin. CX}}{\text{sin. BX}}$. Si CX est plus grand que BC, on aura sin. BX négatif.

3920. Si l'on avoit besoin des deux angles à la fois, on pourroit employer l'élégante méthode de Neper, qui donne la somme et la différence de ces deux angles (3984).

La tangente de la demi-différence = $\frac{\text{cot.} \frac{1}{2} \text{ang. sin. demi-dif. des côtés donnés}}{\text{sin. demi-somme des côtés}}$.

La tangente de la demi-somme = $\frac{\text{cot.} \frac{1}{2} \text{angle} \cdot \text{cos. demi-differ. des côtés}}{\text{cos. demi-somme des côtés}}$.

3921. *Connoissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, trouver l'angle opposé à l'autre côté donné.* On fera cette proportion (3907);

Le sinus du côté opposé à l'angle connu
Est au sinus du côté adjacent à l'angle connu,
Comme le sinus de l'angle connu
Est au sinus de l'angle cherché.

Cet angle peut être aigu ou obtus, et il n'est pas déterminé par les données seules (3870). Il y a en effet quelquefois deux solutions véritables; ainsi à l'article 1052, l'étoile B (FIG. 44) peut se trouver dans le vertical de l'étoile A en haut et en bas; et les angles ZPB et ZBP peuvent être aigus ou obtus. On leve quelquefois l'incertitude en considérant que si la somme des côtés donnés est moindre ou plus grande que 180°, la somme des angles opposés est aussi moindre ou plus grande.

3922. M. de Lambre, dans un mémoire sur cette matiere, qui sera dans les mémoires d'Upsal, a remarqué qu'on peut aussi reconnoître les cas vraiment douteux par les regles suivantes: l'angle inconnu est de même espece que le côté opposé toutes les fois que la valeur d'un des côtés adjacens est renfermée entre celles du côté opposé et

du supplément de ce côté ; le côté inconnu est de même espece que l'angle opposé toutes les fois que l'un des angles adjacens a une valeur renfermée entre celles de l'angle opposé et de son supplément, ou égale à l'une de ces deux valeurs (M. Cagnoli, pag. 274 et 469). Ces regles levent l'incertitude toutes les fois qu'elle peut être levée, et c'est dans la moitié des cas ; au reste, dans l'astronomie, on n'a jamais d'incertitude à cet égard.

3923. *Connoissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, trouver le troisieme côté.* Abaissez la perpendiculaire sur le côté cherché, et faites ces deux proportions (3884, 3910).

1°. *Le rayon*
Est au cosinus de l'angle donné,
Comme la tangente du côté adjacent à cet angle
Est à la tangente du premier segment.

Ce premier segment sera obtus si l'angle et le côté adjacent sont de même espece, ou si l'angle et le côté donnés sont de même espece.

2°. *Le cosinus du côté adjacent à l'angle donné*
Est au cosinus du côté opposé à l'angle donné,
Comme le cosinus du premier segment
Est au cosinus du second segment.

Le second segment est de même espece que le premier, si les deux côtés donnés sont de même espece.

Le troisieme côté est égal ou à la somme ou à la différence des deux segmens, et le problême a deux solutions; c'est un des cas douteux (3870).

Mais le problême seroit déterminé si la somme des deux segmens surpassoit 180° ; alors il faudroit prendre leur différence, c'est-à-dire retrancher le second du premier. Il pourroit arriver aussi que le second segment fût plus grand que le premier, alors la soustraction ne pourroit se faire, il faudroit prendre la somme, et le problême seroit encore déterminé.

3924. L'expression analytique donne $\text{tang. BX} = \text{tang. AB} \cdot \text{cos. B}$; $\text{cos. CX} = \text{cos. BX} \cdot \frac{\text{cos. AC}}{\text{cos. AB}}$; et $\text{BX} \pm \text{CX} = \text{BC}$. M. Cagnoli (pag. 276).

3925. *Connoissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, trouver l'angle compris par les côtés donnés.* Abaissez la perpendiculaire de l'angle cherché, et faites ces deux proportions (3887 et 3913).

1°. *Le rayon*
Est au cosinus du côté adjacent à l'angle donné,
Comme la tangente de l'angle donné
Est à la cotangente du premier des angles verticaux.

Ce premier angle est obtus, si l'angle et le côté donnés sont d'espece différente.

2°. *La cotangente du côté adjacent à l'angle donné*
Est à la cotangente du côté opposé à l'angle donné,
Comme le cosinus du premier des angles verticaux
Est au cosinus du second angle vertical.

Si les deux côtés donnés sont de même espece, les deux angles verticaux sont aussi de même espece. Si les deux côtés donnés sont de différente espece, les deux angles verticaux le sont pareillement.

L'angle cherché est la somme des deux angles verticaux, si cette somme ne passe pas 180°. Il est encore l'excès du premier angle vertical sur le second, si celui-ci est plus petit ; en sorte que si le premier est plus grand que le second sans que la somme passe 180°, le problême a deux solutions ; c'est un des cas ambigus (3870).

3926. L'expression analytique est celle-ci : cot. BAX = cos. AB · tang. B, et cos. CAX = cos. BAX · $\frac{\text{tang. AB}}{\text{tang. AC}}$; ensuite l'on a BAX ± CAX = A.

On prendra la somme si la perpendiculaire tombe en dedans, c'est-à-dire si les deux autres angles sont de même espece entre eux. *Voyez* M. Cagnoli, pag. 274. Ce problême sert à trouver l'heure par le moyen des étoiles (1052), et la longitude d'une planete quand on a son ascension droite observée, et qu'on emploie la latitude calculée par les tables (906).

Si l'on veut faire usage des signes, on aura une regle plus générale que celle de l'article 906, en disant, cos. obl. cot. asc. dr. = cot. premier angle vertical, que l'on mettra dans le même quart que l'ascension droite; ensuite tang. obl. tang. lat. cos. angle = sin. second angle. Celui-ci sera toujours aigu, du moins pour les planetes, mais négatif si tang. lat. cos. angle a un signe négatif (M. de Lambre). On peut remarquer ici que le premier angle vertical n'est autre chose que la longitude du point de l'écliptique qui culmine avec la planete, ou qui a la même ascension droite

3927. *Connoissant deux angles et le côté compris, trouver un des autres côtés.* Abaissez la perpendiculaire d'un des angles donnés adjacens au côté cherché, et faites cette proportion (3887) :

Le

Le rayon
Est au cosinus du côté connu,
Comme la tangente de l'angle opposé au côté cherché
Est à la cotangente du premier angle vertical.

Cet angle sera obtus si les deux données sont d'especes différentes.

On prendra la différence entre le premier angle vertical et l'angle donné au sommet, en retranchant le plus petit du plus grand, et l'on aura le second angle vertical; alors on dira (3913);

Le cosinus du premier angle vertical
Est au cosinus du second angle vertical,
Comme la cotangente du côté donné
Est à la cotangente du côté cherché.

Le côté cherché est de même espece que le côté donné si les deux angles verticaux sont de même espece.

3928. On peut aussi recourir aux formules suivantes : soient les données A, C et AC (FIG. 326), et le côté cherché AB; la perpendiculaire étant AX; on fera cot. CAX = tang. C · cos. AC, et BAX = A $\backsim$ CAX; alors tang. AB = tang. AC · $\frac{\text{cos. CAX}}{\text{cos. BAX}}$; et l'on observera la regle des signes (3916).

3929. Si les angles sont fort petits, leurs cosinus varieront fort peu; l'on n'aura pas besoin de les connoître avec beaucoup de précision pour bien déterminer AB.

3930. *Connoissant deux angles et le côté compris, trouver le troisieme angle.* On abaissera la perpendiculaire d'un des angles connus sur le côté opposé que nous appellerons la base, et l'on fera cette analogie (3887);

Le rayon
Est au cosinus du côté connu,
Comme la tangente de l'angle sur la base
Est à la cotangente du premier angle vertical.

Cet angle sera obtus si les deux données sont d'especes différentes.

On aura le second angle vertical en prenant la différence entre le premier angle vertical et l'angle connu, le plus petit étant ôté du plus grand; et l'on fera cette seconde proportion (3912);

Le sinus du premier angle vertical
Est au sinus du second angle vertical,
Comme le cosinus de l'angle donné sur la base
Est au cosinus de l'angle cherché.

Si le premier angle vertical est plus grand que l'angle connu au sommet, l'angle donné sur la base et l'angle cherché seront d'especes différentes.

3931. On peut faire aussi cot. BAX = cos. AB · tang. B, et CAX = A — BAX; alors on a cos. C = cos. B · $\frac{\sin. CAX}{\sin. BAX}$. Si la seconde équation donne CAX négatif, on prendra négativement sin. CAX dans la troisieme équation.

Si les angles sont fort petits, comme cela arrive pour les satellites de Jupiter (3001), il vaut mieux employer les formules 3946 ou 3968. *V.* M. Cagnoli, p. 273.

3932. *Connoissant deux angles et un côté opposé à l'un d'eux, trouver le côté opposé à l'autre angle connu.*

On fera cette proportion (3907);

Le sinus de l'angle opposé au côté connu
Est au sinus de l'autre angle connu,
Comme le sinus du côté connu
Est au sinus du côté cherché.

Ce côté peut être aigu ou obtus; les données ne suffisent pas pour l'indiquer (3870). Les cas des problêmes 3921, 3923, 3925, indiquent ici trois cas semblables; car si on forme autour du triangle donné un triangle polaire (3871), on verra que deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux produisent ici deux angles et le côté opposé à l'un de ces angles. Nous avons rapporté (3922) les regles qui peuvent lever l'incertitude toutes les fois que cela est possible. Opposez le plus grand côté au plus grand angle, et rejetez les solutions qui n'y satisferoient pas. Si le côté cherché satisfait de deux manieres à cette regle, le cas est ambigu. Pour avoir la preuve de l'ambiguïté, on partira de la perpendiculaire DX (FIG. 322); on prendra XK de 90°; au-dessus et au-dessous du point K on fera KA = KR: alors l'angle DRX et l'angle DAX seront exactement de la même quantité; le côté DR sera le supplément de DA; le second angle vertical ADX sera aigu; mais XDR sera obtus et en sera le supplément. Il ne faut, pour en sentir la vérité, que prolonger les arcs DLF et DR jusqu'à ce qu'ils se rencontrent en N, à 180° du point D, et abaisser la perpendiculaire NO: elle sera égale à la perpendiculaire DX; car elles sont à même distance des deux intersections opposées des cercles DRN et BFO; de plus OR = AX, puisque KO = KX = 90°, et KR = KA; donc le triangle ORN est égal au triangle ADX; ainsi R = A; et DA = RN, supplément de DR. L'angle vertical XDA est égal à l'angle

RNO ; l'angle XDR, qui est le supplément de RNO, est aussi le supplément de XDA : enfin le segment XR, supplément de OR, est aussi le supplément du segment XA ; ainsi le triangle BDA et le triangle BDR satisfont également au côté donné BD, à l'angle B et à l'angle A ou R.

Cela se verra encore bien aisément dans la figure 43, planche IV, si l'on prend HD = OL, et que l'on tire les arcs PDC, PLAC, de 180° chacun ; on verra que le triangle HDC est égal au triangle PLO, les angles O et H étant des angles droits, PO = CH, et OL = HD. Ainsi l'angle HDC est égal à l'angle PLO, et CD = PL ; donc PD est le suplément de PL, comme il est celui de CD ; de plus l'angle DCH est égal à l'angle LPO ; mais il est aussi égal à l'angle DPH, supplément de DPO ; donc l'angle DPO est le supplément de LPO. Ainsi le triangle PDO satisfait aussi bien que PLO aux conditions du problème, en partant de la perpendiculaire PO, et de l'angle PLO = PDO.

3933. *Connoissant deux angles et un côté opposé à l'un d'eux, trouver le troisieme angle.* On abaissera la perpendiculaire de l'angle cherché sur son côté opposé, que j'appelle la base, et l'on fera ces proportions (3887, 3912) ;

1°. *Le rayon*
Est au cosinus du côté donné,
Comme la tangente de l'angle donné sur la base, *adjacent au côté connu*,
Est à la cotangente du premier angle vertical.

Cet angle est obtus si les deux données qui l'ont fait trouver sont de différentes especes.

2°. *Le cosinus de l'angle donné sur la base*, *adjacent au côté connu*,
Est au cosinus de l'angle opposé au côté connu,
Comme le sinus du premier angle vertical
Est au sinus de l'autre angle vertical.

Cet angle peut être aigu ou obtus ; il n'est pas déterminé par les données (3870, 3921).

3934. Ces proportions reviennent à cot. CAX = cos. AC · tang. C, et sin. BAX = sin. CAX · $\frac{\cos. B}{\cos. C}$, et l'on a A = CAX ± BAX. L'angle BAX a deux valeurs ; mais la plus grande est à rejeter si elle donne une somme plus grande que 180°, ou si elle donne la différence négative. *Voyez* M. Cagnoli, pag. 278. Ainsi l'on ajoutera ces deux angles verticaux, si les deux angles donnés sur la base sont de même espece ; sinon l'on prendra leur différence, et l'on aura l'angle cher-

ché. Si, en faisant le second angle vertical obtus, la somme des deux angles verticaux passoit 180°, ce seroit une preuve que le second est aigu Si le second vertical obtus surpassoit le premier vertical, ce seroit encore une preuve que le second vertical est aigu.

3935. *Connoissant deux angles et le côté opposé à l'un d'eux, trouver le côté compris entre les deux angles.* On abaissera la perpendiculaire de l'angle inconnu sur le côté cherché, et l'on fera ces deux proportions (3884, 3911);

1°. *Le rayon*
Est au cosinus de l'angle adjacent au côté donné,
Comme la tangente de ce côté
Est à la tangente du premier segment.

2°. *La tangente de l'angle opposé au côté donné*
Est à la tangente de l'angle adjacent au côté donné,
Comme le sinus du premier segment
Est au sinus du second segment.

Le premier segment est aigu, si les deux données qui ont servi à le trouver sont de même espece.

3936. Dans la forme algébrique, on a $\text{tang. } CX = \text{tang. } AC \times \cos. C$, $\sin. BX = \sin. CX \cdot \frac{\text{tang. } C}{\text{tang. } B}$, $BC = CX \pm BX$.

Si les deux angles donnés sont de même espece, on ajoutera ensemble les deux segmens; car alors la perpendiculaire AX tombera au-dedans du triangle; sinon l'on prendra leur différence pour avoir le côté cherché BC.

3937. L'espece du second segment BX est douteuse. Si les côtés opposés aux angles donnés sont de même espece, les segmens sont aussi de même espece; mais un des côtés est inconnu. Des deux valeurs du second segment la plus grande est à rejeter si elle donne la somme plus grande que 180°, ou si elle donne la différence négative, comme M. Boscovich l'a remarqué. *V.* M. Cagnoli, pag. 277.

On trouvera dans l'*Astronomie des marins* de Pezenas des exemples de tous les cas de la trigonométrie appliqués à un seul et même triangle, ce qui est assez commode; mais il y a quelques fautes pour les cas ambigus, par exemple, aux pages 40 et 44. Dans la trigonométrie de Rivard, tous les cas sont détaillés avec exactitude; mais on ne peut pas dire la même chose de tous les autres auteurs qui ont traité de la trigonométrie: la confusion est venue de ce que les auteurs ont fait tomber la perpendiculaire tantôt dans l'angle donné et tantôt dans son supplément. Rivard a choisi de la faire tomber toujours dans

l'angle aigu; par là il a obtenu des préceptes plus simples et plus exacts; mais il n'a pas remédié à l'inconvénient qu'il y a de prendre tantôt la somme et tantôt la différence des angles verticaux ou des segmens. Il étoit plus naturel d'opposer toujours la perpendiculaire à l'angle donné ; c'est l'idée qui a fourni à M. de Lambre les regles des articles précédents 3915, etc.

3938. *Connoissant les trois côtés d'un triangle sphérique, trouver un des angles.* On peut d'abord abaisser une perpendiculaire sur un côté adjacent à l'angle cherché, et faire cette proportion (3914) : la tangente de la moitié de ce côté est à la tangente de la demi-somme des deux autres, comme la tangente de leur demi-différence est à la tangente de la demi-différence des segmens. Connoissant ainsi les segmens avec les côtés, on emploiera, pour trouver les angles, l'art. 3894.

3939. Si l'on veut éviter les segmens, on prendra la demi-somme des trois côtés, et l'on en retranchera successivement les deux côtés qui comprennent l'angle cherché : on aura deux différences ; après quoi l'on fera cette proportion; *Le produit des sinus des deux côtés, qui comprennent l'angle cherché, est à l'unité, comme le produit des sinus des deux différences est au carré du sinus de la moitié de l'angle cherché.* Voyez la démonstration (3976) et l'exemple (1018). Ce problême est d'un très grand usage en astronomie pour calculer le lever et le coucher des astres, et pour connoître l'heure par le moyen de la hauteur d'un astre (1018, 4206).

3940. Il y a une formule qui donne le cosinus de la moitié de l'angle, et qui est même un peu plus commode (3977). Enfin il y en a une qui donne la tangente de la moitié de l'angle cherché (3980).

3941. Connoissant les trois angles, on trouveroit un côté par cette analogie, qui se déduit de la précédente quand on transforme le triangle donné (3871). Le produit des sinus des angles adjacens au côté cherché est au produit des cosinus des deux excès de la demi-somme des trois angles sur chacun des angles adjacens au côté cherché, comme l'unité est au carré du cosinus de la moitié du côté cherché. Mais cette analogie n'a été employée dans aucun problême de notre astronomie.

3942. La proportion (3939), en mettant les côtés au lieu de leurs sinus, sert à résoudre les triangles rectilignes dont on connoît les trois côtés : le produit des deux côtés qui comprennent l'angle cherché, est à 1, comme le produit des deux différences de ces côtés à la demi-somme des trois, est au carré du sinus de la moitié de l'angle compris. On trouveroit aussi la tangente (3980), et nous en avons fait une application (1259).

Autres Propriétés des Triangles sphériques.

3943. Je n'ai démontré jusqu'ici que les propriétés nécessaires pour la résolution des triangles : il y en a d'autres dont on fait usage dans l'astronomie : je vais les rapporter ici, et j'y ajouterai ensuite les démonstrations.

Dans un triangle sphérique ABC (FIG. 326) l'on a toujours les équations suivantes :

3944. $\text{Cos. A} = \frac{\text{cos. BC} - \text{cos. AC} \cdot \text{cos. AB}}{\text{sin. AC} \cdot \text{sin. AB}} = \text{cos. BC} \cdot \text{sin. B} \cdot \text{sin. C} - \text{cosin. B} \cdot \text{cos. C}$. Nous l'avons employée art. 3732, etc. On s'en sert pour démontrer une propriété fondamentale des triangles sphériques (3976). La démonstration se trouvera ci-après (3966, 3968).

3945. $\text{Cos. B} = \frac{\text{cos. AC} - \text{cos. AB} \cdot \text{cos. BC}}{\text{sin. AB} \cdot \text{sin. BC}} = \text{cos. AC} \cdot \text{sin. C} \cdot \text{sin. A} - \text{cos. C} \cdot \text{cos. A}$.

3946. $\text{Cos. C} = \frac{\text{cos. AB} - \text{cos. AC} \cdot \text{cos. BC}}{\text{sin. AC} \cdot \text{sin. BC}} = \text{cos. AB} \cdot \text{sin. A} \cdot \text{sin. B} - \text{cos. A} \cdot \text{cos. B}$.

3947. $\text{Cos. AB} = \text{cos. C} \cdot \text{sin. AC} \cdot \text{sin. BC} + \text{cos. AC} \cdot \text{cos. BC} = \frac{\text{cos. C} + \text{cos. A} \cdot \text{cos. B}}{\text{sin. A} \cdot \text{sin. B}}$. On verra la démonstration 3965 et 3971 ; on a vu l'usage 3258 et 3312.

3948. $\text{Cos. AC} = \text{cos. B} \cdot \text{sin. AB} \cdot \text{sin. BC} + \text{cos. AB} \cdot \text{cos. BC} = \frac{\text{cos. B} + \text{cos. C} \cdot \text{cos. A}}{\text{sin. C} \cdot \text{sin. A}}$.

3949. $\text{Cos. BC} = \text{cos. A} \cdot \text{sin. AC} \cdot \text{sin. AB} + \text{cos. AB} \cdot \text{cos. AC} = \frac{\text{cos. A} + \text{cos. B} \cdot \text{cos. C}}{\text{sin. B} \cdot \text{sin. C}}$.

3950. $\text{Sin.} \tfrac{1}{2}\text{C} = \sqrt{(\text{cos.} \tfrac{1}{2} \cdot \overline{\text{A} + \text{B}}^2 + \text{sin. A} \cdot \text{sin. B} \cdot \text{sin.} \tfrac{1}{2}\text{AB}^2)}$. Voyez la démonstration (3969).

3951. $\text{Tang. A} = \frac{\text{sin. B}}{\text{cot. BC} \cdot \text{sin. AB} - \text{cos. AB} \cdot \text{cos. B}} = \frac{\text{sin. C}}{\text{cot. BC} \cdot \text{sin. AC} - \text{cos. AC} \cdot \text{cos. C}}$.
Voyez la démonstration (3972). Cette expression est d'un grand usage (2726, 4032, etc.). On peut s'en servir pour trouver la longitude quand on connoît l'ascension droite et la déclinaison (905).

3952. $\text{Tang. B} = \frac{\text{sin. C}}{\text{cot. AC} \cdot \text{sin. BC} - \text{cos. BC} \cdot \text{cos. C}} = \frac{\text{sin. A}}{\text{cot. AC} \cdot \text{sin. AB} - \text{cos. AB} \cdot \text{cos. A}}$.

3953. $\text{Tang. C} = \frac{\text{sin. B}}{\text{cot. AB} \cdot \text{sin. BC} - \text{cos. BC} \cdot \text{cos. B}} = \frac{\text{sin. A}}{\text{cot. AB} \cdot \text{sin. AC} - \text{cos. AC} \cdot \text{cos. A}}$.

3954. $\text{Tang. AB} = \frac{\text{sin. BC}}{\text{cot.C} \cdot \text{sin.B} + \text{cos.BC} \cdot \text{cos.B}} = \frac{\text{sin. AC}}{\text{cot.C} \cdot \text{sin.A} + \text{cos.AC} \cdot \text{cos.A}}.$
Nous en avons fait usage (2988).

3955. $\text{Tang. AC} = \frac{\text{sin. BC}}{\text{cot.B} \cdot \text{sin.C} + \text{cos.BC} \cdot \text{cos.C}} = \frac{\text{sin. AB}}{\text{cot.B} \cdot \text{sin. A} + \text{cos.AB} \cdot \text{cos.A}}.$

3956. $\text{Tang. BC} = \frac{\text{sin. AC}}{\text{cot. A} \cdot \text{sin.C} + \text{cos.AC} \cdot \text{cos.C}} = \frac{\text{sin. AB}}{\text{cot. A} \cdot \text{sin.B} + \text{cos. AB} \cdot \text{cos.B}}.$

3957. $\text{Cot. A} = \frac{\text{cot.BC} \cdot \text{sin. AB}}{\text{sin.B}} - \text{cos. AB} \cdot \text{cot. B} = \frac{\text{cot. BC} \cdot \text{sin. AC}}{\text{sin. C}} -$ $\text{cos. AC} \cdot \text{cot. C}$. Voyez la démonstration (3974).

3958. $\text{Cot. B} = \frac{\text{cot. AC} \cdot \text{sin.BC}}{\text{sin. C}} - \text{cos. BC} \cdot \text{cot. C} = \frac{\text{cot.AC} \cdot \text{sin. AB}}{\text{sin. A}} -$ $\text{cos. AB} \cdot \text{cot.A}$.

3959. $\text{Cot. C} = \frac{\text{cot. AB} \cdot \text{sin. AC}}{\text{sin. A}} - \text{cos. AC} \cdot \text{cot.A} = \frac{\text{cot. AB} \cdot \text{sin.BC}}{\text{sin.B}}$ $- \text{cos. BC} \cdot \text{cot. B}$.

3960. $\text{Cot. AB} = \frac{\text{cot.C} \cdot \text{sin.B}}{\text{sin. BC}} + \text{cos. B} \cdot \text{cot. BC} = \frac{\text{cot. C} \cdot \text{sin. A}}{\text{sin. AC}} +$ $\text{cot. AC} \cdot \text{cos. A}$. Voyez la démonstration 3975, et l'usage 3734.

3961. $\text{Cot. AC} = \frac{\text{cot.B} \cdot \text{sin.C}}{\text{sin. BC}} + \text{cos. C} \cdot \text{cot. BC} = \frac{\text{cot. B} \cdot \text{sin. A}}{\text{sin. AB}} +$ $\text{cot. AB} \cdot \text{cos. A}$.

3962. $\text{Cot. BC} = \frac{\text{cot. A} \cdot \text{sin. C}}{\text{sin. AC}} + \text{cos. C} \cdot \text{cot. AC} = \frac{\text{cot. A} \cdot \text{sin. B}}{\text{sin. AB}} +$ $\text{cot.AB} \cdot \text{cos. B}$.

3963. De là on tire $\text{tang. AB} = \frac{\text{sin. AC} \cdot \text{tang. C}}{\text{sin. A} + \text{cos.AC} \cdot \text{tang. C} \cdot \text{cos. A}}.$

3964. $\text{Tang. AC} = \frac{\text{sin. AB} \cdot \text{tang. B}}{\text{sin. A} + \text{cos. AB} \cdot \text{tang. B} \cdot \text{cos. A}}.$

3965. Pour démontrer les formules 3944-3949, j'abaisse une perpendiculaire CX (FIG. 327) sur un des côtés adjacens à l'angle A; j'ai cette proportion (3910), cos. BX : cos. AX :: cos. BC : cos. AC; donc $\text{cos.} = \text{CB} \frac{\text{cos. AC} \cdot \text{cos. BX}}{\text{cos. AX}}$; mais $\text{cos. BX} = \text{cos. (AB} - \text{AX)} =$ $\text{cos. AB} \cdot \text{cos. AX} + \text{sin. AB} \cdot \text{sin. AX}$ (3812); donc $\text{cos. BC} =$ $\frac{\text{cos. AC} \cdot \text{cos. AB} \cdot \text{cos. AX} + \text{sin. AB} \cdot \text{sin. AX} \cdot \text{cos. AC}}{\text{cos. AX}} = \text{cosin. AC} \cdot \text{cosin. AB} +$ $\text{sin.AB} \cdot \frac{\text{sin. AX}}{\text{cos. AX}} \text{cos. AC}$; mais $\text{tang. AC} \cdot \text{cos. A} = \text{tang. AX}$ (3884); donc $\text{cos. BC} = \text{cos. AC} \cdot \text{cos. AB} + \text{sin. AB} \cdot \text{sin. AC} \cdot \text{cos. A}$. C'est la premiere partie de la formule 3949; on démontreroit de même 3947 et 3948.

3966. De cette équation l'on tire $\text{cosin.A} = \frac{\text{cos. BC} - \text{cos. AC} \cdot \text{cos.AB}}{\text{sin.AB} \cdot \text{sin.AC}}$;

c'est la premiere partie de la formule 3944. On démontreroit de même les deux suivantes.

3967. La formule 3944, en ajoutant de part et d'autre sin. AB $\times$ sin. AC, donne sin. AB · sin. AC — sin. AB · sin. AC · cosin. A = sin. AB · sin. AC + cos. AB · cosin. AC — cosin. BC ; et substituant cos. (AB — AC) à la place des deux produits (3812), on en tire cette proportion ; sin. AB · sin. AC : 1 : : cos. (AB — AC) — cos. BC : 1 — cos. A ; ou sin. AB · sin. AC : 1 : : sin. ver. BC — sin. ver. (AB — AC) : sin. ver. A. Nous en ferons usage (4192).

3968. Pour démontrer la seconde partie des articles 3944-3946, où cos. C = cos. AB · sin. B · sin. A — cos. B · cos. A, soit la tangente de BAX = h (FIG. 326) ; son sinus sera $\frac{h}{\sqrt{(1+hh)}}$, et son cosinus $\frac{1}{\sqrt{(1+hh)}}$ (3806) ; soit le sinus de l'angle A = a, et son cosinus égal à b, on aura (3811) sin. XAC = sin. BAC · cos. XAB — sin. XAB · cos. BAC = $\frac{a-hb}{\sqrt{(1+hh)}}$; mais sin. BAX : sin. XAC : : cos. B : cos. C (3912), ou $\frac{h}{\sqrt{(1+hh)}} : \frac{a-hb}{\sqrt{(1+hh)}}$: : cos. B : cos. C ; donc cos. C = $\frac{a-hb}{h}$ · cos. B = $\frac{\text{sin. A} \cdot \text{cos. B}}{\text{tang. BAX}}$ — cos. B · cos. A : mais $\frac{\text{cos. B}}{\text{tang. BAX}}$ = cos. AB · sin. B ; car dans le triangle CBX l'on a cos. BA : 1 : : cot. B : tang. BAX (3887) ; donc tang. BAX $\frac{\text{cot. B}}{\text{cos. BA}} = \frac{\text{cos. B}}{\text{cos. BA} \cdot \text{sin. B}}$; donc $\frac{\text{cos. B}}{\text{tang. BAX}}$ = cos. BA · sin. B ; substituant cette valeur dans l'expression de cos. C, elle deviendra sin. A · cos. BA · sin. B — cos. B · cos. A. On démontreroit de même la seconde partie des formules 3944 et 3945. Dans l'article 3732 les signes étoient changés, parceque la perpendiculaire tomboit hors du triangle.

3969. Pour démontrer la formule 3950, qui est nécessaire, si l'angle cherché est très petit (3001), on prendra cos. C = cos. AB $\times$ sin. A · sin. B — cos. A · cos. B ; l'on aura donc — cos. (A + B) — cos. C = 2 sin^2. $\frac{1}{2}$AB · sin. A · sin. B (3810, 3819) = — 1 + 2 sin^2. $\frac{1}{2}$(A + B) — 1 + 2 sin^2. $\frac{1}{2}$C. Donc sin. $\frac{1}{2}$C = $\sqrt{}$[cos^2. $\frac{1}{2}$(A + B) + sin. A · sin. B · sin^2. $\frac{1}{2}$AB] = cos. $\frac{1}{2}$(A + B) · $\sqrt{\left(1 + \frac{\text{sin. A} \cdot \text{sin. B} \cdot \text{sin}^2. \frac{1}{2}\text{AB}}{\text{cos}^2. \frac{1}{2}(\text{A}+\text{B})}\right)}$.

3970. Pour pouvoir faire usage de cette valeur avec les logarithmes, on fera $\frac{\text{sin.} \frac{1}{2}\text{AB}}{\text{cos.} \frac{1}{2}(\text{A}+\text{B})} \times \sqrt{\text{sin. A} \cdot \text{sin. B}}$ = tang. M, et l'on aura (3808) sin. $\frac{1}{2}$C = $\frac{\text{cos.} \frac{1}{2}(\text{A}+\text{B})}{\text{cos. M}}$ (M. Cagnoli, pag. 273).

3971. Pour démontrer la seconde partie de l'article 3947, il suffit de

de dégager cos. AB dans la seconde partie de l'article 3946 ; car puisque cos. C = cos. AB · sin. A · sin. B — cos. A · cos. B, on a cos. AB = $\frac{\cos. C + \cos. A \cdot \cos. B}{\sin. A \cdot \sin. B}$.

3972. Pour démontrer les formules 3951 - 3953, on aura (FIG. 326) tang. C : tang. B :: sin. BX : sin. CX (3911) :: sin. BX : sin. (BC — BX) :: 1 : $\frac{\sin. (BC - BX)}{\sin. BX}$: mais $\frac{\sin. (BC - BX)}{\sin. BX} = \frac{\sin. BC \cdot \cos. BX - \sin. BX \cdot \cos. BC}{\sin. BX}$ (3811) = sin. BC · cot. BX — cos. BC, ou (3884) $\frac{\sin. BC \cdot \cot. AB}{\cos. B}$ — cosin. BC, donc tangente C = $\frac{\text{tang. } B \cdot \text{cosin. } B}{\sin. BC \cdot \text{cotang. } AB - \text{cosin. } BC \cdot \text{cosin. } B} = \frac{\sin. B}{\sin. BC \cdot \cot. AB - \cos. BC \cdot \cos. B}$; c'est la formule 3953. On démontreroit de même 3951 et 3952.

3973. Les formules 3954 - 3956 se démontrent (3951) en transformant le triangle. Supposons autour du triangle ABC un triangle supplémentaire DEF (3871) que nous appellerons *abc*, en sorte que l'angle *b* réponde au même côté que l'angle B du triangle ABC ; alors, au lieu de tang. A = $\frac{\sin. B}{\cot. BC \cdot \sin. AB - \cos. B \cdot \cos. AB}$ (3951), on aura — tang. $bc = -\frac{\sin. ac}{-\text{cotang. } a \cdot \sin. c - \text{cosin. } ac \cdot \text{cosin. } c}$. J'ai mis deux fois le signe —, parceque, dans le triangle polaire, les côtés sont les supplémens des angles du triangle donné; or les cosinus, tangentes et cotangentes changent de signes (3795) ; mais les deux cosinus changent à la fois, et le signe reste le même; ainsi l'on aura tang. $bc = \frac{\sin. ac}{\cot. a \cdot \sin. c + \cos. ac \cdot \cos. c}$; c'est la formule 3956. On démontreroit de même 3954 et 3955.

3974. La formule 3957, cot. A, etc., est l'inverse de 3951, en mettant cot. B à la place de $\frac{\cos. B}{\sin. B}$; car cot. A = $\frac{1}{\text{tang. } A} = \frac{\cot. BC \cdot \sin. AB}{\sin. B} - \frac{\cos. B \cdot \cos. AB}{\sin. B} = \frac{\cot. BC \cdot \sin. AB}{\sin. B}$ — cos. AB · cot. B. On démontreroit de même 3958 et 3959.

3975. La formule 3960 est l'inverse de 3954, en mettant cot. BC à la place de $\frac{\cos.}{\sin.}$. Cette formule 3960 pourroit aussi se mettre sous la forme suivante, cot. AB = $\frac{\sin. A \cdot \cos. C + \cos. A \cdot \sin. C \cdot \cos. AC}{\sin. C \cdot \sin. AC}$, en mettant au lieu de cot. C sa valeur $\frac{\cos. C}{\sin. C}$, et au lieu de sin. AC · cot. AC sa va-

leur cos. AC. C'est celle qui est employée pour la nutation (3734).

3976. Il me reste à démontrer une formule qui a été employée pour résoudre les triangles dont on connoît trois côtés (3939) ou trois angles (3941); c'est le troisieme et le dernier théorême fondamental de la trigonométrie sphérique, et la sixieme propriété des triangles sphériques en général. Dans tout triangle ABC l'on a $\text{sin.}\,\frac{1}{2}A^2 = \frac{\text{sin.}(\frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AB - \frac{1}{2}AC)\cdot\text{sin.}(\frac{1}{2}BC - \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AC)}{\text{sin.}\,AB\cdot\text{sin.}\,AC}$; car $2\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}A^2 = 1 - \text{cos.}\,A$ (3819); si l'on met à la place de cos. A sa valeur (3944), on aura $2\,\text{sin.}\,\frac{1}{2}A^2 = \frac{\text{sin.}\,AB\cdot\text{sin.}\,AC + \text{cosin.}\,AB\cdot\text{cosin.}\,AC - \text{cosin.}\,BC}{\text{sin.}\,AB\cdot\text{sin.}\,AC} = \frac{\text{cosin.}\,(AB - AC) - \text{cosin.}\,BC}{\text{sin.}\,AB\cdot\text{sin.}\,AC}$ (3812). Cela revient au même que l'expression proposée, car la différence des cosinus de AB — AC et de BC est la même chose que deux fois le produit des sinus de la demi-somme et de la demi-différence des mêmes arcs AB — AC et BC (3839) : nous avons donné un exemple du calcul (1018).

Il y a des démonstrations fort élégantes de cette même formule par Pemberton (*Philos. Trans.* 1760) et dans M. Boscovich (T. V, pag. 438); il y en a une plus anncienne et aussi synthétique dans la trigonométrie de Rivard (1747, art. 184).

3977. Cette regle revient à celle de Regiomontanus, *de Triangulis*, pag. 119), dont tous les auteurs se sont servis : c'est aussi celle de Neper (*Mirifici canonis logar. descriptio*, L. II, c. 6); mais il en donna encore une autre qui fait trouver le cosinus de la moitié de l'angle, et qui est un peu plus commode, parcequ'elle exige une soustraction de moins : *Le produit des sinus des deux côtés qui comprennent l'angle cherché est au rayon, comme le produit des sinus de la demi-somme des trois côtés et de cette demi-somme moins le côté opposé est au carré du cosinus de la moitié de l'angle :* nous allons bientôt la démontrer.

Gellibrand en ajouta une troisieme (*Trigon. britannica* pag. 75). Le produit des sinus de la demi-somme et de cette demi-somme moins le côté opposé est au produit des différences entre la demi-somme et les deux côtés adjacens, comme le rayon est au carré de la tangente de la moitié de l'angle. Pemberton a démontré aussi ces deux analogies. Je me sers en général de celle du sinus (1018) : si l'angle est très petit, la regle du cosinus donne moins de précision; si l'angle étoit très obtus, la regle du sinus auroit le même inconvénient, tandis que celle des tangentes ne l'a dans aucun cas; mais elle est un peu plus longue.

3978. Pour démontrer la regle qui fait trouver le cosinus, je prends $\cos. A = \frac{\cos. BC - \cos. AC \cdot \cos. AB}{\sin. AC \cdot \sin. AB}$ (3944), d'où l'on tire $1 + \cos. A = \frac{\sin. AC \cdot \sin. AB - \cos. AC \cdot \cos. AB + \cos. BC}{\sin. AC \cdot \sin. AB}$. Le numérateur de cette fraction revient à $\cos. BC - \cos. (AB + AC)$ (3810), et par conséquent (3839) à $2 \sin. \frac{1}{2}(AB + AC - BC) \times \sin. \frac{1}{2}(AB + AC + BC)$; et parce-qu'en général $\cos. \frac{1}{2}A^2 = \frac{1 + \cos. A}{2}$ (3820), l'on aura $\text{cosin.} \frac{1}{2}A^2 = \frac{\sin. \frac{1}{2}(AB + AC - BC) \times \sin. \frac{1}{2}(AB + AC + BC)}{\sin. AC \cdot \sin. AB}$.

3979. Si le triangle devenoit rectiligne, et qu'on fît $AB = n$, $AC = y$ et $BC = m$, on auroit $\cos. \frac{1}{2}A^2 = \frac{y^2 + n^2 - m^2 + 2ny}{4ny}$. Nous en avons fait usage (1197).

On en peut déduire aussi la valeur de $\text{cosin.} A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 AB \cdot AC}$, dont on a également besoin (1197). En effet $\text{cosin.} \frac{1}{2}A^2$ est égal à $\frac{(AB + AC - BC) \times (AB + AC + BC)}{4 AB \cdot AC}$; donc cosin. A, ou (3820) $2 \text{ cosin.} \frac{1}{2}A^2 - 1 = \frac{(AB + AC - BC) \times (AB + AC + BC)}{2 AB \cdot AC} - 1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{AB + AC + BC} \times \overline{AB + AC - BC} - 2 AB \cdot AC}{AB \cdot AC}\right) = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 AB \cdot AC}$.

3980. Pour avoir l'angle A par le moyen de sa tangente (3977), il suffit de considérer que $\text{tang.} \frac{1}{2}A^2 = \frac{\sin. \frac{1}{2}A^2}{\cos. \frac{1}{2}A^2}$; ainsi divisant la valeur de $\sin. \frac{1}{2}A^2$ (3976) par celle de $\cos. \frac{1}{2}A^2$ (3978), on aura celle de $\text{tang.} \frac{1}{2}A^2 = \frac{\sin. \frac{1}{2}(BC + AB - AC) \times \sin. \frac{1}{2}(BC - AB + AC)}{\sin. \frac{1}{2}(AB + AC - BC) \times \sin. \frac{1}{2}(AB + AC + BC)}$; c'est la regle de Gellibrand (3940, 3977).

On déduit de cette formule une regle pour résoudre un triangle rectiligne dont on connoît les trois côtés, c'est-à-dire chercher un angle : la demi-somme des trois côtés multipliée par la différence entre cette demi-somme et le côté opposé à l'angle cherché, est au produit des différences entre la demi-somme et les deux côtés adjacens, comme le carré du rayon est au carré de la tangente de la moitié de l'angle (1259).

3981. Les regles de Neper pour trouver à la fois deux angles ou deux côtés sont souvent très commodes, et je vais les démontrer à l'exemple de M. Mauduit, après que j'aurai établi quelques formules préliminaires.

Lorsque dans un triangle ABC (FIG. 326) l'on abaisse une perpendiculaire AX, l'on a, pour la différence des angles verticaux, $\tan. \frac{1}{2}(BAX - CAX) = \tan. \frac{1}{2}A \cdot \tan. \frac{1}{2}(B - C) \cdot \tan. \frac{1}{2}(C + B) = \cot. \frac{1}{2}A \cdot \frac{\sin.(AB - AC)}{\sin.(AB + AC)}$; car cos. B : cos. C :: sin. BAX : sin. CAX (3912); ainsi cos. B + cos. C : cosin. B — cosin. C :: sin. BAX + sin. CAX : sin. BAX — sin. CAX; donc (3836, 3840) $\frac{\tang. \frac{1}{2}(BAX + CAX)}{\tang. \frac{1}{2}(BAX - CAX)} = \frac{\cot. \frac{1}{2}(B + C)}{\tang. \frac{1}{2}(B - C)}$, et $\tang. \frac{1}{2}(BAX - CAX) = \tang. \frac{1}{2}A \cdot \tang. \frac{1}{2}(B - C) \cdot \tang. \frac{1}{2}(B + C)$.

3982. Pour démontrer le second membre, on a tan. AB : tan. AC :: cosin. CAX : cosin. BAX (3913); donc on a tang. AB + tang. AC : tang. AB — tang. AC :: cos. CAX + cos. BAX : cos. CAX — cos. BAX, et $\frac{\tang. AB + \tang. AC}{\tang. AB - \tang. AC} = \frac{\cos. CAX + \cos. BAX}{\cos. CAX - \cos. BAX}$, ou (3844, 3840), $\frac{\sin.(AB + AC)}{\sin.(AB - AC)} = \frac{\cot. \frac{1}{2}(CAX + BAX)}{\tan. \frac{1}{2}(CAX - BAX)}$; donc $\tang. \frac{1}{2}(CAX - BAX) = \cot. \frac{1}{2}A \cdot \frac{\sin.(AB - AC)}{\sin.(AB + AC)}$; c'est la seconde partie de la formule préliminaire qu'il falloit démontrer.

3983. Ainsi l'on a sin. (AB + AC) : sin. (AB — AC) :: cot. $\frac{1}{2}$A : tang. $\frac{1}{2}$(BAX — CAX), ou (3817) 2 sin. $\frac{1}{2}$(AB + AC) · cosin. $\frac{1}{2}$(AB + AC) : 2 sin. $\frac{1}{2}$(AB — AC) · cos. $\frac{1}{2}$(AB — AC) :: cot. $\frac{1}{2}$A : tang. $\frac{1}{2}$(BAX — CAX).

3984. Connoissant deux côtés CB, CA et l'angle compris C, trouver les autres angles. On a d'abord sin. AB : sin. AC :: sin. C : sin. B, ou sin. AB + sin. AC : sin. AB — sin. AC :: sin. C + sin. B : sin. C — sin. B; donc (3836) tang. $\frac{1}{2}$(AB + AC) : tang. $\frac{1}{2}$(AB — AC) :: tang. $\frac{1}{2}$(C + B) : tang. $\frac{1}{2}$(B — C) : nous nous servirons bientôt de cette proportion.

Deplus $\tang. \frac{1}{2}(C + B) = \frac{\tang. \frac{1}{2}(BAX - CAX)}{\tang. \frac{1}{2}A \cdot \tang. \frac{1}{2}(B - C)}$ (3981); il faut substituer cette valeur, et l'on aura tang. $\frac{1}{2}$(AB + AC) : tang. $\frac{1}{2}$(AB — AC) :: $\frac{\tang. \frac{1}{2}(BAX - CAX)}{\tan. \frac{1}{2}A \cdot \tan. \frac{1}{2}(B - C)}$: tang. $\frac{1}{2}$(B — C), ou tangente $\frac{1}{2}$(AB + AC) : tang. $\frac{1}{2}$(AB — AC) :: cotang. $\frac{1}{2}$A · tang. $\frac{1}{2}$(BAX — CAX) : $\tang^2. \frac{1}{2}(B - C)$; mais (3983) 2 sin. $\frac{1}{2}$(AB + AC) × cos. $\frac{1}{2}$(AB + AC) : 2 sin. $\frac{1}{2}$(AB — AC) × cosin. $\frac{1}{2}$(AB — AC) :: cotang. $\frac{1}{2}$A : tang. $\frac{1}{2}$(BAX — CAX); multipliant terme à terme,

$\sin^2.\frac{1}{2}(AB+AC) : \sin^2.\frac{1}{2}(AB-AC) :: \cot^2.\frac{1}{2}A : \tang^2.\frac{1}{2}(B-C)$; donc $\tang.\frac{1}{2}(B-C) = \cot.\frac{1}{2}A\cdot\frac{\sin.\frac{1}{2}(AB-AC)}{\sin.\frac{1}{2}(AB+AC)}$; c'est la demi-différence des angles inconnus. Mais on a ci-dessus une proportion qui donne aussi $\tang.\frac{1}{2}(B-C)$; et égalant les deux valeurs, on a $\frac{\tang.\frac{1}{2}(AB-AC)\times\tang.\frac{1}{2}(C+B)}{\tang\frac{1}{2}(AB+AC)} = \cotang.\frac{1}{2}A\times\frac{\sin\frac{1}{2}(AB-AC)}{\sin.\frac{1}{2}(AB+AC)}$; donc $\tang.\frac{1}{2}(C+B) = \cot.\frac{1}{2}A\times\frac{\cos.\frac{1}{2}(AB-AC)}{\cos.\frac{1}{2}(AB+AC)}$: ainsi la tangente de la demi-différ. des angles inconnus $= \frac{\text{cot.}\frac{1}{2}\text{angle donné}\times\text{sin. demi-dif. des côtés}}{\text{sin. demi-somme des côtés}}$, et la tang. demi-som. $= \frac{\text{cot.}\frac{1}{2}\text{ang. donné}\times\text{cos. demi dif. des côtés}}{\text{cos. demi-somme des côtés}}$; l'on a donc facilement les deux angles; et l'on n'a que 7 logarithmes à chercher : nous en avons fait usage (1663, 1677).

3985. Quand on connoît deux angles et le côté compris, on peut trouver de même les deux autres côtés par les deux formules de Neper, que nous allons démontrer après avoir établi trois équations préliminaires.

Premièrement, $\tang.\frac{1}{2}(BX-CX) = \tang.\frac{1}{2}(AB+AC)\cdot\tang.\frac{1}{2}(AB-AC)\cdot\cot.\frac{1}{2}BC$. En effet, $\cos.AB : \cos.AC :: \cos.BX : \cos.CX$ (3910); donc $\cos.AB+\cos.AC : \cos.AB-\cos.AC :: \cos.BX+\text{cosin}.CX : \cos.BX-\cos.CX$; mais (3840) $\frac{\cot.\frac{1}{2}(AB+AC)}{\tan.\frac{1}{2}(AB-AC)} = \frac{\cot.\frac{1}{2}(BX+CX)}{\tan.\frac{1}{2}(BX-CX)} = \frac{\cot.\frac{1}{2}(BC}{\tang.\frac{1}{2}(BX-CX)}$; donc $\tang.\frac{1}{2}(BX-CX) = \tang.\frac{1}{2}(AB+AC)\times\tang.\frac{1}{2}(AB-AC)\cdot\cot.\frac{1}{2}BC$.

Secondement, $\tang.\frac{1}{2}(BX-CX) = \tang.\frac{1}{2}BC\cdot\frac{\sin.(B-C)}{\sin.(B+C)}$; car $\tang.B : \tang.C :: \sin.CX : \sin.BX$ (3911), ou $\tang.B+\tang.C : \tang.B-\tang.C :: \sin.CX+\sin.BX : \sin.CX-\sin.BX$; donc (3844, 3836) $\sin.(B+C) : \sin.(B-C) :: \tang.\frac{1}{2}BC : \tang.\frac{1}{2}(BX-CX) = \tang.\frac{1}{2}BC\cdot\frac{\sin.(B-C)}{\sin.(B+C)}$.

3986. Troisièmement, $\tang.\frac{1}{2}(AB+AC) : \tang.\frac{1}{2}(AB-AC) :: \tang.\frac{1}{2}(C+B) : \tang.\frac{1}{2}(B-C)$; car on a $\sin.AB : \sin.AC :: \sin.C : \sin.B$; donc (3836) $\frac{\tan.\frac{1}{2}(AB+AC)}{\tan.\frac{1}{2}(AB-AC)} = \frac{\tang.\frac{1}{2}(C+B)}{\tang.\frac{1}{2}(B-C)}$, ce qui revient à la proportion indiquée.

3987. Nous pouvons actuellement trouver la demi-somme et la demi-différence des côtés AB et AC, et démontrer que $\tang.\frac{1}{2}(AB$

$- AC) = \text{tang.} \frac{1}{2} BC \cdot \frac{\sin. \frac{1}{2}(B - C)}{\sin. \frac{1}{2}(C + B)}$, et que $\text{tang.} \frac{1}{2}(AB + AC) = \text{tang.} \frac{1}{2}BC \cdot \frac{\cos. \frac{1}{2}(B - C)}{\cos. \frac{1}{2}(C + B)}$. En effet on a d'abord $\text{tang.} \frac{1}{2}(AB + AC) : \text{tang.} \frac{1}{2}(AB - AC) :: \text{tang.} \frac{1}{2}(C + B) : \text{tang.} \frac{1}{2}(B - C)$ (3986); on y substituera la valeur de $\text{tan.} \frac{1}{2}(AB - AC) = \frac{\text{tan.} \frac{1}{2}(BX - CX) \text{ tan.} \frac{1}{2}BC}{\text{tang.} \frac{1}{2}(AB + AC)}$ (3985), et l'on aura $\text{tang.} \frac{1}{2}(AB + AC) : \frac{\text{tang.} \frac{1}{2}(BX - CX) \cdot \text{tang.} \frac{1}{2}BC}{\text{tang.} \frac{1}{2}(AB + AC)} :: \text{tang.} \frac{1}{2}(C + B) : \text{tang.} \frac{1}{2}(B - C)$; ou $\text{tang}^2. \frac{1}{2}(AB + AC) : \text{tang.} \frac{1}{2}(BX - CX) \cdot \text{tan.} \frac{1}{2}BC :: \text{tan.} \frac{1}{2}(C + B) : \text{tan.} \frac{1}{2}(B - C)$; mais $\text{tan.} \frac{1}{2}(BX - CX) = \text{tang.} \frac{1}{2}BC \times \frac{\sin.(B - C)}{\sin.(B + C)}$ (3985) $= \text{tang.} \frac{1}{2}BC \times \frac{\sin. \frac{1}{2}(B - C) \times \cos. \frac{1}{2}(B - C)}{\sin. \frac{1}{2}(B + C) \times \cos. \frac{1}{2}(B + C)}$ (3817); substituant cette valeur dans la derniere proportion, l'on trouvera celle-ci; $\text{tang}^2. \frac{1}{2}(AB + AC) : \text{tan}^2. \frac{1}{2}BC \cdot \frac{\sin. \frac{1}{2}(B - C) \times \cos. \frac{1}{2}(B - C)}{\sin. \frac{1}{2}(B + C) \times \cos. \frac{1}{2}(B + C)} :: \text{tan.} \frac{1}{2}(C + B) : \text{tan.} \frac{1}{2}(B - C) :: \frac{\sin. \frac{1}{2}(C + B)}{\cos. \frac{1}{2}(C + B)} : \frac{\sin. \frac{1}{2}(B - C)}{\cos. \frac{1}{2}(B - C)}$, ou $\text{tang.} \frac{1}{2}(AB + AC) = \text{tang.} \frac{1}{2}BC \cdot \frac{\cos. \frac{1}{2}(B - C)}{\cos. \frac{1}{2}(B + C)}$. On substituera dans cette équation $\text{tang.} \frac{1}{2}(AB + AC) = \frac{\text{tang.} \frac{1}{2}(AB - AC) \times \text{tang.} \frac{1}{2}(B + C)}{\text{tang.} \frac{1}{2}(B - C)}$ (3984), l'on aura $\text{tan.} \frac{1}{2}(AB - AC) = \text{tang.} \frac{1}{2}BC \cdot \frac{\cos. \frac{1}{2}(B - C)}{\cos. \frac{1}{2}(B + C)} \times \frac{\text{tang.} \frac{1}{2}(B - C)}{\text{tang.} \frac{1}{2}(B + C)} = \text{tang.} \frac{1}{2}BC \cdot \frac{\sin. \frac{1}{2}(B - C)}{\sin. \frac{1}{2}(B + C)}$. Ainsi la tangente de la demi-différence des côtés cherchés est égale à $\frac{\text{tang. demi-côté donné} \times \text{sin. demi-diff. des angles adjacens}}{\text{sin. demi-somme des mêmes angles}}$; et la tang. demi-somme $= \frac{\text{tang. demi-côté} \times \text{cos. demi-dif. des angles}}{\text{cos. demi-somme des angles}}$. Connoissant la demi-somme et la demi-différence, on aura chacun des côtés. Nous en avons fait un usage pour la rotation du Soleil (3259).

De là il suit que l'on peut avoir aussi le côté BC par le moyen des côtés AB, AC, et des angles B et C; puisque la tangente de la moitié du côté BC = tang. demi-diff. des côtés $\times \frac{\text{sin. demi-somme des angles B et C}}{\text{sin. demi-diff. des angles}}$, ou = tang. demi-somme des côtés $\times \frac{\text{cos. demi-somme des angles}}{\text{cos. demi-differ.}}$.

3988. *Trouver par approximation la différence entre l'hypoténuse et le côté d'un triangle sphérique rectangle*, en supposant que l'angle adjacent ne surpasse pas 7 à 8°, en sorte que la différence cherchée puisse être supposée égale à sa tangente : soit le triangle BCD (FIG. 323) rectangle en D, dans lequel on cherche la différence entre BC et BD; on a d'abord cette proportion (3884); R : cos. B ::

tang. BC : tang. BD; ainsi tang. BD = cos. B · tang. BC ; et si l'on appelle s le sinus verse de l'angle B, $1 - s$ son cosinus, z la tangente de l'arc BC, l'on aura tang. BD $= (1 - s)z$; donc la tangente de la différence entre les arcs BC et BD, ou la différence elle-même, si elle est assez petite pour être sensiblement égale à sa tangente, sera (3828) $\frac{z-(1-s)z}{1+z(1-s)z} = \frac{sz}{1+zz-szz} = \frac{sz}{(1+zz)\cdot\left(1-\frac{szz}{1+zz}\right)}$;

mais $\frac{1}{1-\frac{szz}{1+zz}}$, en faisant la division actuelle, est égal à $1 +$ $\frac{szz}{1+zz}$ (3422) à cause de la petitesse de $\frac{szz}{1+zz}$; donc la différence des deux arcs BC et BD est $\frac{sz}{1+zz} \times \left(1 + \frac{szz}{1+zz}\right)$, ou $\frac{sz}{1+zz} +$ $\frac{sz \times szz}{(1+zz)\times(1+zz)} = \frac{sz}{\sqrt{1+zz}} \times \frac{1}{\sqrt{1+zz}} + \frac{s^2zz}{1+zz} \times \frac{z}{\sqrt{1+zz}} \times$ $\frac{1}{\sqrt{1+zz}}$; mais lorsque z est la tangente d'un arc BC, que j'appellerai A, son sinus est $\frac{z}{\sqrt{1+zz}}$, et $\frac{1}{\sqrt{1+zz}}$ en est le cosinus (3806); donc la différence des arcs BC et BD sera $s \cdot$ cos. A · sin. A $+ s^2 \cdot$ sin.A^2 · sin. A · cos. A, et développant ces produits (3817, 3818), l'on a $\frac{1}{2}s \cdot$ sin. 2 A $+ \frac{1}{4}s^2 \cdot$ sin. 2 A $- \frac{1}{8}s^2 \cdot$ sin. 4 A. C'est la réduction à l'écliptique, en supposant que A soit l'argument de latitude.

Si l'on n'employoit que le premier terme de cette formule, on pourroit se tromper de 3″ pour la réduction de Mercure ; en effet le sinus ver. de 7°, multiplié par l'arc égal au rayon (1242, 3499), est égal à 25′ 38″, dont la moitié est 12′ 49″; or la réduction pour 45° est 12′ 51″6. Mais pour des orbites peu inclinées, il suffit de multiplier la plus grande réduction par le sinus du double de l'argument de latitude ; cette regle est exacte et commode.

Pour dresser une table de la réduction, on pourroit se servir avec avantange de la formule de M. de la Grange (Mémoires de Berlin 1776) : appellant I l'inclinaison et L l'argument de latitude, la réduction est égale à tang. $\frac{1}{2}I^2$ · sin. 2 L $- \frac{1}{2}$ tang. $\frac{1}{2}I^4$ · sin. 4 L $+$ $\frac{1}{3}$ tang. $\frac{1}{2}I^6$ · sin. 6 L, etc. ; on en trouvera aussi la démonstration dans l'Essai de M. Trembley. Le premier terme seul suffit pour Mercure, à 1″ près.

Le lieu et la quantité de la plus grande réduction se trouvent par des formules simples et élégantes de M. de Lambre. Soit L l'argument de latitude et A l'argument réduit, R leur différence ou la ré-

duction. On a d'abord $\text{tang. A} = \text{cosin. I} \cdot \text{tang. L}$ (3884), et $\text{tang. L} - \text{tang. A} = \text{tang. L} - \text{cos. I} \cdot \text{tang. L} = \text{tang. L} \cdot (1 - \text{cosin. I}) = 2\,\text{sin}^2.\,\tfrac{1}{2}\text{I} \cdot \text{tang. L}$ (3819); mais $\text{tang. L} - \text{tang. A} = \frac{\text{sin.}(\text{L} - \text{A})}{\text{cos. L} \cdot \text{cos. A}}$ (3843); donc $\text{sin.}(\text{L} - \text{A})$ ou $\text{sin. R}, = 2\,\text{sin}^2.\,\tfrac{1}{2}\text{I} \cdot \text{cos. L} \cdot \text{tang. L} \cdot \text{cosin. A} = 2\,\text{sin}^2.\,\tfrac{1}{2}\text{I} \cdot \text{sin. L} \cdot \text{cosin. A} = 2\,\text{sin}^2.\,\tfrac{1}{2}\text{I} \cdot \text{sin. L} \cdot \text{cosin.}(\text{L} - \text{R})$.

Pour trouver le lieu de la plus grande réduction, il faut différentier cette expression (3446), et l'on aura $\delta\text{R} \cdot \text{cosin. R} = 2\,\text{sin}^2.\,\tfrac{1}{2}\text{I} \cdot \text{cosin. L} \cdot \text{cosin.}(\text{L} - \text{R})\,\delta\text{L} - 2\,\text{sin}^2.\,\tfrac{1}{2}\text{I} \cdot \text{sin. L} \cdot \text{sin.}(\text{L} - \text{R}) \cdot (\delta\text{L} - \delta\text{R})$. Faisant $\delta\text{R} = 0$ (3437), et divisant par $2\,\text{sin}^2.\,\tfrac{1}{2}\text{I}\,\delta\text{L}$, on a $0 = \text{cosin. L} \cdot \text{cosin.}(\text{L} - \text{R}) - \text{sin. L} \cdot \text{sin.}(\text{L} - \text{R}) = \text{cot.}(\text{L} - \text{R}) - \text{tang. L}$; donc $\text{L} - \text{R} = 90° - \text{L}$; $\text{R} = 2\text{L} - 90°$, ou $\text{L} = 45° + \tfrac{1}{2}\text{R}$; donc il suffit d'ajouter à 45° la moitié de la plus grande réduction.

Puisque $\text{sin. R} = -\text{sin.}(90° - 2\text{L}) = -\text{cos.}\,2\text{L}$, on a $\text{sin. R} = 2\,\text{sin}^2.\,\tfrac{1}{2}\text{I} \cdot \text{sin. L} \cdot \text{cos.}(\text{L} - \text{R}) = 2\,\text{sin}^2.\,\tfrac{1}{2}\text{I} \cdot \text{sin}^2.\,\text{L} = -\text{cos.}\,2\text{L} = 2\,\text{sin}^2.\,\text{L} - 1$; donc $2\,\text{sin}^2.\,\text{L} - 2\,\text{sin}^2.\,\tfrac{1}{2}\text{I} \cdot \text{sin}^2.\,\text{L} = 1$; donc $\text{sin}^2.\,\text{L} = \frac{1}{2 - 2\,\text{sin}^2.\,\frac{1}{2}\text{I}} = \frac{1}{2(1 - \text{sin}^2.\,\frac{1}{2}\text{I})} = \frac{1}{2\,\text{cos}^2.\,\frac{1}{2}\text{I}}$, et $\text{sin. L} = \frac{1}{\text{cos.}\,\frac{1}{2}\text{I}\,\sqrt{2}} = \frac{\text{sin. } 45°}{\frac{1}{2}\,\text{cos. I}}$. Donc on a encore le lieu de la plus grande réduction en divisant le sinus de 45° par le cosinus de la demi-inclinaison, ce qui donne le sinus de la longitude cherchée.

Le sinus de la plus grande réduction est égal au carré de la tangente de la demi-inclinaison; car $\text{sin. R} = 2\,\text{sin.}^2\,\tfrac{1}{2}\text{I} \cdot \text{sin.}^2\,\text{L} = \frac{2\,\text{sin}^2.\,\frac{1}{2}\text{I}}{2\,\text{cos}^2.\,\frac{1}{2}\text{I}} = \text{tang.}^2\,\tfrac{1}{2}\text{I}$. M. de Lambre a trouvé encore d'autres formules analogues; elles sont dans les mémoires de l'académie de Turin, Tom. IV.

Il s'ensuit que la plus grande réduction pour 1° d'inclinaison est 15″7 à 45° 0′ 8″; pour 7° elle est 12′ 51″6, à 45° 6′ 25″; et pour 23° 28′, de 2° 28′ 20″, 6. Celle-ci est la différence entre la longitude et l'ascension droite du Soleil; elle change de 4″,3 pour 20″ de diminution dans l'obliquité de l'écliptique.

On peut conclure de ce qui précede la différence entre l'hypoténuse et le côté, lorsque l'angle est très petit; mais nous la démontrerons d'une maniere plus directe (4046).

3989. Si l'on abaisse un arc DKn (FIG. 322) perpend. sur BC, BK sera plus petit que BD, par la même raison que BD est plus petit que BC ; ainsi la différence entre BC et BK, ou l'arc CK, sera sensiblement le double de la réduction, sur-tout si l'angle B est fort petit ; il sera donc égal à $s \cdot \sin. 2A$; c'est la différence entre l'opposition et le milieu de l'éclipse (1758), qui a lieu pour les éclipses de Lune, et même pour celles des satellites de Jupiter, en la diminuant de moitié (2951).

3990. On peut de même trouver une expression du côté opposé à l'angle donné, dont on a besoin dans les calculs de la théorie de la Lune. Soit TNS (FIG. 319) le plan de l'écliptique, et TNV le plan de l'orbite de la Lune, sur lequel on abaisse du centre S du Soleil la perpendiculaire SV ; supposons SN et VN perpendiculaires à TN, l'angle NSV sera égal à l'inclinaison des deux plans (3859), l'angle STV sera égal à la latitude du Soleil par rapport à l'orbite de la Lune, $\frac{TV}{TS}$ en sera le cosinus (3803) ; supposant $TN = 1$, $NS = zz$ et $\cos. SNV = 1 - s$, on a $TS = \sqrt{1 + zz}$, $NV = (1 - s)$, car $R : \cos. N :: NS : NV$ (3801) ; donc l'hypoténuse TV du triangle TNV sera $\sqrt{1 + (1 - s)^2 zz} = \sqrt{1 + zz - (2s - s^2) zz} = \sqrt{1 + zz} \times \sqrt{1 - \frac{(2s - ss) zz}{1 + zz}}$; donc $\frac{TV}{TS} = \sqrt{1 - \frac{(2ss - ss) zz}{1 + zz}}$, et réduisant ce binome en série (3421) $= 1 - \frac{(s - \frac{1}{2} ss) zz}{1 + zz} - \frac{\frac{1}{2} s^2 z^4}{(1 + zz)^2}$; mais lorsque z est la tangente d'un angle STN, que j'appellerai A, son sinus est $\frac{z}{\sqrt{(1 + zz)}}$ (3806), le carré $\frac{zz}{1 + zz} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{cosin.} 2A$ (3818) ; donc $\frac{z^4}{(1 + zz)^2} = \sin. A^4 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \text{cosin.} 2A + \frac{1}{8} \text{cosin.} 4A$ (3832) ; donc $\frac{TV}{TS}$ ou le cosinus de l'angle STV, c'est-à-dire le cosinus du petit côté d'un triangle sphérique dont A seroit l'hypoténuse et $1 - s$ le cosinus du petit angle, sera $= 1 - \frac{1}{2} s + \frac{1}{16} s^2 + \frac{1}{2} s \cdot \cos. 2A - \frac{1}{16} s^2 \cdot \cos. 4A$. Clairaut a fait usage de ce théorême dans sa théorie de la Lune ; c'est pourquoi j'ai cru devoir en donner ici la démonstration, que l'auteur avoit supprimée pour abréger : j'en ai indiqué l'usage (3629).

3991. *Connoissant deux hauteurs d'un astre et l'intervalle des deux observations avec la hauteur du pole, trouver la déclinaison et l'angle horaire* ; et si l'on connoît la déclinaison, *trouver la hauteur du pole et l'angle horaire*. Ce problême peut se résoudre par de fausses positions,

ce qui est souvent le plus commode, parceque l'on connoît toujours à très peu près la hauteur du pole et la déclinaison de l'astre qu'on observe : soit P le pole (planche XXXIX, FIG. 272), E le zénit, TB le parallele de l'astre; supposons d'abord sa distance PT au pole à-peu-près connue ; on a donc les trois côtés d'un triangle PET, on cherchera l'angle P. Avec la même distance au pole, augmentée s'il est nécessaire du mouvement en déclinaison dans l'intervalle des deux observations, c'est-à-dire PB, l'on résoudra le triangle EPB, dont on connoît encore les trois côtés, et l'on trouvera l'angle au pole ; la somme ou la différence de cet angle et du précédent, convertie en temps, doit être égale à l'intervalle des observations ; si l'on trouve quelque erreur, on fera varier la déclinaison ou la distance au pole, et l'on verra bientôt quelle est celle qui satisfait à l'intervalle observé.

Le cas le plus avantageux pour cette espece d'observation est celui où l'une des hauteurs est voisine du méridien, et l'autre vers le point où la hauteur change le plus (946).

3992. On peut aussi trouver la hauteur du pole en observant deux hauteurs d'un astre à des intervalles de temps connus, comme l'avoient deja remarqué Nonnius, Collins, etc. Les navigateurs peuvent faire usage de cette méthode, en supposant connue la déclinaison de l'astre ; et il suffit de faire varier PE au lieu de PT ou de PB. Dans le *Nautical Almanac* de 1771, il y a une table fort ample par laquelle on trouve plus facilement que par la méthode précedente, la hauteur du pole par le moyen de deux hauteurs du Soleil, et de l'intervalle des deux observations, quand on a la déclinaison du Soleil et la hauteur du pole estimée. *Voy.* les observations de M. Maskelyne sur cette méthode (*British Mariner's* Guide, pag. 67). Il cite Pemberton, Philos. Trans. 1760.

On trouve des méthodes pour ce problême dans l'Astronomie nautique de Maupertuis, dans l'Astronomie des marins de Pézenas, 1766, p. 357, dans le Nautical Almanac de 1778, dans les Mémoires de Pétersbourg de 1779, dans les Ephémérides de Berlin 1787, 1789, 1790.

3993. La méthode que Douwes donna en 1754 dans le premier volume des mémoires de Harlem, n'est qu'une approximation quand on ne connoît pas la hauteur du pole ; mais elle est commode, et aussi exacte qu'on peut le desirer ; elle est rigoureuse pour trouver l'heure quand on connoît la hauteur du pole ; elle a été adoptée dans le Nautical Almanac de 1771 et de 1781: en voici la démonstration : il y en a une de Pemberton dans les Trans. Philos., tom. 51 ; mais elle est beaucoup plus compliquée.

Soit P le pole (FIG. 320), QV l'équateur, HG le rayon du parallele HDE que décrit le Soleil ou l'étoile ; soient D et E les lieux du Soleil, AI et BL les sinus des hauteurs observées, et HK le sinus de la hauteur méridienne que l'on cherche. Supposons la latitude à-peu-près connue, on aura $AB = \frac{AC}{\text{sin. B}} = \frac{AC}{\text{cos. lat.}}$, et en parties du rayon du parallele, $\frac{AC}{\text{cos. lat} \times \text{cos. déclin.}} = DN$.

L'arc DE du parallele mesure l'intervalle des deux hauteurs observées ; ainsi la corde $DE = 2 \text{ sin. } \frac{1}{2} \text{interv.}$ L'angle DEN = l'angle MGH, qui exprime l'ang. hor. moy., ou l'ang. hor. m pour le milieu de l'intervalle ; $DE = \frac{DN}{\text{sin. DEN}} = \frac{AB}{\text{sin. ang. hor. } m} = 2 \text{ sin. } \frac{1}{2} \text{intervalle}$; donc $2 \text{ sin. } m = \frac{AB}{\text{sin. } \frac{1}{2}\text{interv.}} = \frac{AC}{\text{cos. lat.} \times \text{cos. décl.} \times \text{sin. } \frac{1}{2}\text{interv.}}$.

Connoissant l'angle horaire moyen MH et l'intervalle, on a le plus petit angle horaire HE, dont le sinus verse en parties du rayon du grand cercle, ou multiplié par le cosinus de la déclinaison, donnera AH ; mais HF = AH · sin. A = AH · cosin. latit. ; donc HF = sin. vers. DH · cos. décl. × cos. lat. Cette quantité, ajoutée avec AI sinus de la plus grande hauteur, donnera le sinus HK de la hauteur méridienne.

Comme la quantité cherchée HF n'est jamais fort grande, l'erreur commise sur la latitude estimée devient beaucoup plus petite par ce calcul ; on la rendroit encore moindre s'il étoit nécessaire, en recommençant le calcul avec la nouvelle latitude trouvée.

3994. Pour faciliter l'usage de cette formule, Douwes calcula, en 1760, des tables où l'on trouve pour chaque demi-minute de temps écoulé entre les deux observations, les complémens du logar. sin. du demi-intervalle, et le logarith. de 2 sin. MH : il nomme le premier le log. du demi-temps écoulé, et le second logar. du milieu du temps. Pour avoir HF, il a aussi calculé une table des logarithmes sinus verses des arcs DH donnés en temps de 30″ en 30″, qu'il nomme *log. élév.* Les Anglois ont calculé ces tables de 10″ en 10″ de temps (*Tables requisite*, 1781, pag. 58-80). Il y a aussi des tables pareilles dans le Guide du navigateur de M. Levêque, dans les Tables de Harrison (*A new set of logarithmic solar tables*, 1759), dans les Tables d'Edward, 1769.

On pourroit employer les hauteurs pour trouver les longitudes en mer (2580, 4211), et dans l'astronomie pour une comete qu'on ne pourroit pas rapporter à une étoile (3218). Les tables que j'ai fait

calculer pour trouver l'heure en mer par la hauteur du Soleil (4206) peuvent aussi servir pour résoudre les mêmes problêmes.

3995. Il y a un problême plus général, qui consiste à trouver la latitude du lieu et la déclinaison de l'astre par le moyen de trois hauteurs à des intervalles connus; on en trouve cinq solutions différentes, par Daniel Bernoulli, Herman, Euler, Mayer et Krafft, dans le 4e volume des mémoires de Pétersbourg pour 1729. La Caille donna une regle d'approximation dans son Traité de navigation en 1760, *pag.* 205. Bezout la supprima dans l'édition de 1769, en faisant dire à l'auteur qu'il ne falloit point s'en servir : il en donna une plus rigoureuse dans le sixieme volume de son Cours de mathématique, *pag.* 307. D'Alembert traita cette question en 1768 dans le quatrieme volume de ses Opuscules, et M. du Séjour dans son *Traité analytique*, pag. 615; enfin M. Cagnoli (*pag.* 445) en a donné une solution plus simple. On pourroit aussi le résoudre par de fausses positions, même dans le cas où la déclinaison seroit variable, en cherchant sa variation par des observations faites deux jours de suite : mais il est inutile de nous arrêter sur un problême qui n'est pas d'usage en astronomie.

3996. On trouvera d'autres propriétés des triangles sphériques dans les auteurs qui ont traité spécialement de la trigonométrie, surtout dans celle de M. Cagnoli; on peut voir encore les Sphériques de Menelaüs, auteur du second siecle; Regiomontanus, *de Triangulis*, 1561, *in-fol.;* le Synopsis de Jones, qui contient diverses recherches de Halley sur la trigonométrie; *les Principes d'astronomie sphérique*, par M. Mauduit, publiés en 1765, et traduits en anglois par M. Crakelt en 1768; M. Jean Trembley, *Essai de Trigonométrie sphérique*, 1783; Fontana, *Disquisitiones physico-mathemat.*, 1748, *in*-4°: il réduit tous les théorêmes de l'astronomie nautique à deux théorêmes de trigonométrie sphérique; de Gua, *Mém.* 1783.

DES ANALOGIES DIFFÉRENTIELLES pour les triangles sphériques.

3997. Nous nous sommes servis en plusieurs endroits de ce livre des formules par lesquelles on détermine les rapports des petits changemens qui arrivent dans les côtés et dans les angles des triangles : M. Côtes les donna le premier dans un mémoire de 22 pages, qui a pour titre, *Æstimat. error. in mixta math., per variat. partium trian-*

guli plani et sphaerici, auctore Rogero Côtes. Ce mémoire se trouve avec d'autres opuscules de ce célebre auteur, à la suite d'un très bel ouvrage intitulé *Harmonia mensurarum*, qui parut à Cambridge en 1722 : la Caille donna ensuite ces formules en plus grand nombre et d'une maniere plus appropriée à l'astronomie (*Mém. acad.* 1741), et on les retrouve dans ses Leçons d'astronomie; Maupertuis en a donné plusieurs dans son Astronomie nautique 1743 et 1751; de même que M. Mauduit dans sa Trigonométrie; M. Boscovich dans le quatrieme volume de ses Œuvres, *pag.* 316; et M. Cagnoli dans sa Trigonométrie : celui-ci a donné non seulement les différentielles infiniment petites, mais encore les différences finies (4049), par lesquelles on voit la correspondance des différences infinitésimales et les quantités négligées dans celles-ci. Je me contenterai de donner ici les variations infiniment petites dans chaque cas, mais je ne rapporterai guere que les formules usitées dans l'astronomie.

Ces formules sont suffisantes dans la plupart des cas, lors même que les variations vont à un degré; mais les formules sont d'autant plus rigoureusement exactes que les variations sont plus petites; si elles ne sont que de peu de minutes, les formules peuvent donner des centiemes de seconde, et cela est souvent très utile.

Si ces quantités sont assez grandes pour que leur variation ne soit pas la même que dans les infiniment petits, il en résulte une inégalité du second ordre, c'est-à-dire plus petite que les premieres; comme celles-ci sont plus petites que des arcs de plusieurs degrés, qu'on a coutume de considérer dans la Trigonométrie sphérique : on fait quelquefois usage de ces différences du second ordre (4046 et 4048).

3998. *Lorsqu'un angle et son côté adjacent sont supposés constans, la différentielle de l'autre côté adjacent à l'angle constant est à la différentielle du côté opposé, comme le rayon est au cosinus de l'angle opposé au côté constant.*

Dém. Soit le triangle BAC (fig. 327), dont l'angle A et le côté adjacent CA sont constans; la différentielle de AB sera à celle de CB, comme le rayon est au cosinus de B; en effet, lorsque le côté AB augmente d'une petite quantité BD, le triangle ACB se change en un autre triangle ACD; ayant fait CE = CB, et tiré l'arc BE, qui sera sensiblement perpendiculaire sur CED, on a DE pour la différentielle du côté CB, puisque CD est plus grand que CE ou CB de cette quantité DE : de plus l'angle EDB est égal à l'angle CBA ; car le triangle EDB est supposé infiniment petit et par conséquent rectiligne; l'arc EB est aussi bien perpendiculaire sur CB que sur CE (3489); ainsi

l'angle CBE est droit; donc CBA est le complément de EBD. Mais dans le petit triangle rectiligne EBD l'angle EBD est le complément de EDB; donc l'angle EDB est égal à CBA. Or BD : DE :: R : cos. EDB ou CBA; car c'est la propriété ordinaire d'un triangle rectiligne BED rectangle en E que l'hypoténuse BD soit à un côté DE comme le rayon est au cosinus de l'angle D adjacent à ce côté; donc si l'on appelle dAB le changement BD du côté AB et dCB la différentielle ED du côté CB, suivant la marque ordinaire du calcul différentiel (3430), on aura la proportion, que l'on peut mettre sous cette forme, dAB : dCB :: R : cos. B.

Cette proportion donne le changement de latitude égal au changement de déclinaison multiplié par le cosinus de l'angle de position, quand l'ascension droite et l'obliquité de l'écliptique sont constantes : on en fait quelquefois usage. On verra le changement de longitude (4002).

3999. *Si un angle et le côté adjacent sont constans, la différentielle de l'angle adjacent au côté constant est à la différentielle de l'angle opposé comme le rayon est au cosinus du côté opposé à l'angle constant.*

Dém. Soit le triangle sphérique ABC (fig. 326), dont l'angle B et le côté AC soient constans; des points A, B, C, comme poles, on imaginera les arcs qui formeront le triangle polaire (3871), dans lequel l'angle F sera le supplément du côté AB, le côté FD sera le supplément de l'angle B, le côté FE sera le supplément de l'angle A, etc. Les différentielles des supplém. sont les mêmes que celles des arcs qui varient; ainsi, dans le triangle polaire EFD, on pourra considérer comme constans l'angle E et le côté adjacent FE; donc (3998) la différentielle du côté DE est à celle du côté FD comme le rayon est au cosinus de l'angle D; et substituant aux termes de cette proportion les termes qui leur correspondent dans le triangle ABC, qui ont les mêmes sinus et les mêmes différentielles, on trouve que la différentielle de l'angle C est à la différentielle de l'angle B comme la rayon est au cosinus du côté BC, ou dB : dC :: cos. BC : R.

De là on conclut le changement dans la hauteur du nonagésime (1685).

4000. *Si un angle et le côté adjacent sont constans, la différentielle de l'angle adjacent au côté constant sera à la différentielle du côté opposé à l'angle constant, comme la tangente de l'angle opposé au côté constant est au sinus du côté opposé à l'angle constant.*

Soient A et AC constans (fig. 327); que l'on prolonge le côté

CB jusqu'à ce que l'on ait CF = 90°, et de même CD jusqu'à ce que CG soit de 90°, le petit arc FG sera la mesure de l'angle ECB, et par conséquent sera la différentielle de l'angle C, tandis que DE est la différentielle du côté CB: il faut donc démontrer que FG : DE :: tang. B : sin. BC. On considérera que FG : BE :: R : sin. BC (3879); mais DE : BE :: R : tang. BDE ou CBA; donc DE : FG :: sin. BC : tang. B; c'est-à-dire δ BC : δ C :: sin. BC : tang. B.

De là on conclut le changement du nonagésime (1685).

4001. *Si un angle et un côté adjacent à cet angle sont constans, la différentielle du côté variable adjacent à l'angle constant sera à la différentielle de l'angle opposé au côté constant, comme la tangente du côté opposé à l'angle constant est au sinus de l'angle opposé au côté constant.*

Dém. Soit un triangle ACL (fig. 327) dont le côté AC et l'angle A sont constans, et qui se change en un triangle ACK; soient LT et KT deux tangentes qui doivent faire entre elles un angle T égal à la variation de l'angle L, ou à la différence des angles CKL, CLA; si l'on suppose que le centre de la sphere soit en un point S, et qu'on tire les rayons SL, SM, la mesure de l'angle S au centre, ou ML, = LK · sin. K; mais l'angle S : l'angle T :: le rayon de celui-ci : rayon du premier (3498) :: LT : LS :: tang. CL : R; donc LK · sin. K : T :: tang. CL : 1, en mettant l'unité pour R; donc $T = LK \cdot \frac{\text{sin. K}}{\text{tang. CL}}$; ou δ AL : δ L :: tang. CL : sin. L; donc, dans le triangle ABC, l'on a δ AB : δ B :: tang. CB : sin. B. La démonstration de Côtes est fondée sur le triangle polaire comme dans l'art. 3999. Cette proportion est d'un grand usage pour la précession des équinoxes (2727), pour les variations des étoiles (2765) et pour la nutation en ascension droite (2905).

4002. *Si un angle et un côté adjacent à cet angle sont supposés constans, la différentielle de l'angle adjacent au côté consant est à celle du côté adjacent à l'angle constant, comme le sinus de l'angle opposé au côté constant est au sinus du côté opposé à l'angle constant.*

Dém. Dans le triangle ABC (fig. 327) dont l'angle A et le côté AC sont constans, il faut démontrer que FG : BD :: sin. B : sin. BC; or BE = FG · sin. BC (3875), et dans le triangle rectiligne BED on a BE : BD :: sin. B : R (car l'angle CBA est égal à l'angle EDB); donc BE = BD · sin. B; ainsi égalant les deux valeurs de BE, nous aurons FG · sin. BC = BD · sin. B; convertissant cette équation

en proportion, $FG : BD :: \sin. B : \sin. BC$, ou $dAB : dC :: \sin. BC : \sin. B$.

De là on conclut que le changement de longitude est égal au changement de déclinaison multiplié par le sinus de l'angle de position et divisé par le cosinus de la latitude.

On a aussi $dAB : dC :: \sin. AC \cdot \sin. A : \sin^2. B$, en mettant pour sin. BC sa valeur $\frac{\sin. AC \cdot \sin. A}{\sin. B}$. Nous en avons fait usage (1685).

4003. *Si un angle* A (fig. 327) *et un côté* AC *adjacent à cet angle sont supposés constans, la différentielle de l'angle* B *opposé au côté constant sera à la différentielle du côté* BC *opposé à l'angle constant, comme la tangente de l'angle* B *opposé au côté constant* AC *est à la tangente du côté* BC *opposé à l'angle constant* A.

Dém. $\sin. A : \sin. BC :: \sin. B : \sin. AC$ (3907); or dans cette proportion les deux extrêmes sont constans; donc sin. B sera toujours en raison inverse de sin. BC; donc leurs différentielles seront aussi dans la même proportion (3433); c'est-à-dire que $d\sin. B : d\sin. BC :: \sin. B : \sin. BC$; mais $d\sin. B = dB \cdot \cos. B$ (3446), et $d\sin. BC = dBC \cdot \cos. BC$; donc $dB \cdot \cos. B : dBC \cdot \cos. BC :: \sin. B : \sin. BC$; et $dB \cdot \cos. B \cdot \sin. BC = dBC \cdot \cos. BC \cdot \sin. B$; donc $dB : dBC :: \cos. BC \cdot \sin. B : \cos. B \cdot \sin. BC$ (divisant les deux derniers termes par $\cos. B \cdot \cos. BC$) $:: \frac{\sin. B}{\cos. B} : \frac{\sin. BC}{\cos. BC} :: \text{tang. } B : \text{tang. } BC$: ainsi $dBC : dB :: \text{tang. } BC : \text{tang. } B$.

Si un côté BC (fig. 329) *et l'angle A qui lui est opposé sont constans, la différentielle d'un des autres angles C sera à celle du côté* AB *opposé à cet angle, comme la tangente de ce même angle* C *est à la tangente du côté AB opposé à cet angle.*

Dém. Supposons le triangle ABC changé en un autre triangle ADE qui en differe infiniment peu, et qui soit tel que DE soit égal à BC; l'on aura cette proportion; $\sin. C : \sin. AB :: \sin. A : \sin. BC$; et comme les deux derniers termes de la proportion sont constans, le sinus de C sera au sinus de AB en raison constante; donc $d\sin. C : d\sin. AB :: \sin. C : \sin. AB$ (3433); mais $d\sin. C = dC \cdot \cos. C$, et $d\sin. AB = dAB \cdot \text{cosin. } AB$ (3446); ainsi $dC \cdot \text{cosin. } C : dAB \cdot \text{cosin. } AB :: \sin. C : \sin. AB$; $dC \cdot \text{cosin. } C \cdot \sin. AB = dAB \cdot \text{cosin. } AB \cdot \sin. C$; donc $dC : dAB :: \text{cosin. } AB \cdot \sin. C : \cos. C \cdot \sin. AB$; divisant les deux derniers termes par $\cos. C \cdot \cos. AB$, on

on a enfin d C : d AB :: $\frac{\text{sin. C}}{\text{cos. C}}$: $\frac{\text{sin. AB}}{\text{cos. AB}}$ :: tang. C : tang. AB ; ainsi d AB : d C :: tang. AB : tang. C.

4005. Si à la place du côté AB et de l'angle C qui lui est opposé, nous prenons le côté AC et l'angle B, nous aurons, par la même raison, d AC : d B :: tang. AC : tang. B.

4006. Si A = 90°, d AC : d B :: sin. AB : R (3882). Cette formule sert à trouver la variation de déclinaison qui répond à celle de l'obliquité de l'écliptique ; elles sont entre elles comme le sinus de l'ascension droite est au rayon ; il y en a une table dans le septieme tome de mes Ephémérides.

4007. *Si un côté* BC (fig. 329) *et l'angle opposé* A *sont constans, la différentielle d'un des côtés variables* AB *est à la différentielle de l'autre côté* AC, *comme le cosinus de l'angle* C *opposé au premier côté* AB *est au cosinus de l'angle* B *opposé au second côté* AC.

Dém. Puisque le côté BC est supposé égal au côté DE, ces deux côtés se coupent nécessairement en un point H, soit au dedans du triangle, comme dans la *fig.* 329, soit au dehors, en supposant les côtés BC et DE prolongés. Du point d'intersection H on décrira par les points B et C de petits arcs BF et CG, qui couperont sur DE les arcs HG = HC et HF = HB ; les différences FD, GE, seront égales, puisqu'elles doivent se détruire pour rendre égaux les arcs BC et DE. Dans le petit triangle rectiligne BDF, on aura BD : FD :: R : sin. FBD, ou cos. BDF, ou cos. ABC ; et dans le triangle GCE, CE : GE (ou FD) :: R : sin. GCE, ou cos. ACB ; d'où l'on tire les deux équations FD = BD · cos. ABC, et FD = CE · cos. ACB ; donc d AB : d AC :: cos. C : cos. B.

4008. *Si un côté* BC (fig. 326) *et l'angle opposé* A *sont constans, la différentielle de l'angle* B *sera à la différentielle de l'angle* C, *comme le cosinus du côté* AC *opposé à l'angle* B *est au cosinus du côté* AB *opposé à l'angle* C.

Dém. Des point A, B, C, comme poles, on décrira le triangle polaire DEF (3871), dont les angles E et F seront les supplémens des côtés AC et AB du triangle donné ABC, et ainsi des autres parties. Alors l'angle D et le côté FE seront constans ; et l'on aura cette proportion (4007), d FD : d ED :: cos. E : cosin. F, ou d B : d C :: cos. AC : cos. AB.

4009. Cette analogie peut servir à trouver le changement de l'angle de l'écliptique avec le méridien pour chaque variation de l'obli-

quité de l'écliptique ; car elles sont comme le cosinus de l'ascension droite est au cosinus de la déclinaison : il y en a une table dans le huitieme volume de mes Ephémérides.

4010. *Si un côté* BC (FIG. 329) *et l'angle* A *opposé à ce côté sont constans, la différentielle d'un des côtés variables* AB *est à la différentielle de l'angle* B *adjacent à ce côté, comme le sinus de ce côté* AB *est à la tangente de l'angle* C *opposé à ce côté, multipliée par le cosinus du troisieme côté* AC.

DÉM. $dAB : dB :: dAB \cdot dC : dC \cdot dB$, en mettant la même quantité dC dans les deux termes ; mais $dAB : dC ::$ tang. AB : tang. C (4004), et $dC : dB ::$ cosin. AB : cos. AC (4008) ; donc $dAB \cdot dC : dC \cdot dB ::$ tang. AB · cos. AB : tang. C · cos. AC :: sin. AB : tang. C · cos. AC ; donc $dAB : dB ::$ sin. AB : tang. C · cos. AC.

4011. $dAB : dB ::$ cos. C · tang. AC : sin. B ; car $dAB : dB :: dAB \cdot dAC : dB \cdot dAC$; mais $dAB : dAC ::$ cos. C : cos. B (4007), et $dAC : dB ::$ tang. AC : tang. B (4005) ; donc enfin $dAB : dB ::$ cos. C · tang. AC : sin. B.

4012. $dAB : dB ::$ sin. AB : tang. C · cos. AC ; parceque cos. C · tang. AC $= \frac{\sin. C}{\text{tang. } C} \times \frac{\sin. AC}{\cos. AC}$, et $\frac{\sin. C \cdot \sin. AC}{\sin. AB} =$ sin. B (3907).

4013. Si A = 90°, l'on aura $dAB : dB ::$ tang. AC · cos. AB : R ; en mettant dans l'art. 4010 au lieu de tang. C sa valeur $\frac{\text{tang. } AB}{\sin. AC}$ (3882), pour $\frac{\sin. AB}{\text{tang } AB}$ sa valeur cos. AB (3806), et pour $\frac{\sin. AC}{\cos. AC}$ sa valeur tang. AC. Cette formule sert pour trouver le changement d'ascension droite qui répond aux variations de l'obliquité de l'écliptique (*Connois. des mouv. célest.* 1766) : il y en a une table dans le septieme volume de mes Ephémérides.

4014. On peut trouver la même variation en n'employant que l'obliquité de l'écliptique, par cette proportion, $dAB : dB ::$ sin. 2 AB : 2 cot. B : en effet ce rapport est le même que le précédent ; car tang. AC = sin. AB · tang. B (3882) ; donc tang. AC : R :: sin. AB : cot. B, et tang. AC · cos. AB : R :: sin. AB · cos. AB : cot. B :: $\frac{1}{2}$ sin. 2 AB : cot. B ; c'est le rapport entre le changement d'ascension droite et celui de l'obliquité de l'écliptique.

4015. *Dans un triangle sphérique* ABC (FIG. 328) *où deux côtés* AB, AC, *sont constans, la différentielle de l'angle compris* A *sera à la différentielle d'un des autres angles* B, *comme le sinus du troisieme côté* BC *opposé à l'angle* A *est au sinus du côté* AC *opposé à l'angle* B *multiplié par le cosinus du troisieme angle* C.

Dém. Que le triangle ABC se change en un autre triangle ABD qui ait le même côté AB, et dont le nouveau côté AD soit égal à AC; la différentielle de l'angle A, c'est-à-dire dA, sera l'angle CAD, ou l'arc FG tiré à 90° du point A, et la différentielle de l'angle B sera DBC, ou l'arc IH tiré à 90° du point B. Ayant tiré l'arc CE perpendiculaire à BCH, on aura $dA = \frac{CD}{\sin. AC}$ (3875) et $dB = \frac{CE}{\sin. BC}$; donc $dA : dB :: \frac{\sin. BC}{\sin. AC} : \frac{CE}{CD}$; mais CE est à CD comme le cos. ECD, ou ACB, est au rayon; donc $dA : dB ::$ sin. BC : sin. AC · cos. C. Nous en avons fait usage 2737 et 2753.

4016. $dA : dB ::$ sin. A : sin. B · cos. C, parceque sin. BC : sin. AC :: sin. A : sin. B. On en a vu une autre démonstration appliquée au mouvement des nœuds (2753).

On a aussi $dA : dB :: R : \sin. B^2 \cdot \cos. AB - \sin. B \cdot \cos. B \cdot \cot. A$; en substituant dans la derniere expression la seconde valeur de cos. C (3946).

4017. $dA : dB :: R : \cos. AB - \sin. AB \cdot \cos. B \cdot \cot. BC$, en mettant dans l'expression précédente la valeur de cot. A (3951), et l'unité à la place de $\sin. B^2 + \cos. B^2$. Cette formule donne la précession en ascension droite (2726), et la nutation (2911).

4018. *Si deux côtés* AB, AC (fig. 328) *sont constans, la différentielle de l'angle compris* A *est à la différentielle du côté* BC *qui lui est opposé, comme le rayon est au sinus de l'un ou de l'autre des deux autres angles, tel que* C, *multiplié par le sinus du côté constant* AC, *contigu à ce même angle.*

Dém. Il faut prouver que FG : ED :: 1 : sin. C · sin. AC; pour cela au lieu de FG on peut écrire $\frac{ED \cdot FG \cdot CD}{CD \cdot ED}$, et substituer pour $\frac{FG}{CD}$ sa valeur $\frac{R}{\sin. AC}$ (3879), et $\frac{R}{\sin. ACB}$ pour $\frac{CD}{ED}$; alors $FG = \frac{ED}{\sin. ACB \cdot \sin. AC}$; c'est-à-dire que FG : ED :: 1 : sin. C · sin. AC, ou $dA : dBC :: 1 :$ sin. AC · sin. C, ou sin. AB · sin. B.

On peut mettre aussi au lieu de sin. C sa valeur $\frac{\sin. A \cdot \sin. AB}{\sin. BC}$, et l'on aura $dBC = \frac{dA \cdot \sin. A \cdot \sin. AB}{\sin. BC}$. L'on se sert de ces valeurs pour trouver le changement de hauteur des astres en une minute de temps; la premiere donne 15′ *cos. amplit. cos. haut. du pole* (4203); la Caille s'est même servi de la seconde, *Traité de navigation*, art. 660.

La premiere sert aussi pour trouver le changement de l'obliquité de l'écliptique (2754) et la nutation (2911).

4019. En mettant PZS au lieu de ABC, on verra aussi que le changement de hauteur est proportionnel au sinus de Z et au sinus de S ; ainsi il est le plus grand quand l'astre est dans le premier vertical et quand le vertical est perpendiculaire au cercle de déclinaison, comme nous l'avons indiqué en parlant des hauteurs correspondantes (945).

4020. Si le côté BC = 90°, on trouve $\delta A = \frac{\delta BC}{\sqrt{\sin. AC^2 - \cos. AB^2}}$; AC = compl. AB = compl.

car cos. BC étant égal à zéro, l'on a (3946) $\cos. C = \frac{\cos. AB}{\sin. AC}$, ou $\sin. C = \frac{\sqrt{1 - \cos. AB^2}}{\sin. AC^2}$; donc $\delta A = \frac{\delta BC}{\sin. C \cdot \sin. AC}$ sera aussi $= \frac{\delta BC}{\sqrt{\sin. AC^2 - \cos. AB^2}}$.

Cette formule sert pour trouver la quantité dont la réfraction change le lever des astres (1029) (*Almanac de Berlin* 1750).

4021. On peut la rendre plus facile à employer avec les logarithmes, en la mettant sous cette forme : $\frac{\delta BC}{\sin. AC \cdot \sqrt{1 - \frac{\cos. AB^2}{\sin. AC^2}}}$. Si l'on cherche dans les sinus $\frac{\cos. AB}{\sin. AC}$, ou $\frac{\sin. latit.}{\cos. décl.}$, le cosinus correspondant, ôté de celui de $\frac{\delta BC}{\sin. AC}$ ou de la réfraction divisée par le cosinus de la déclinaison, donnera la valeur cherchée.

4022. Cette formule se simplifie encore en considérant que $\sin. AC^2 - \cos. AB^2 = \cos. (AB + AC) \cdot \cos. (AB - AC)$; en effet $\sin. AC^2 = 1 - \text{cosin}. AC^2$; $\text{cosin}. AB^2 = 1 - \sin. AB^2$; la différence est $\sin. AB^2 - \cos. AC^2$; or $\cos. (AB + AC) \cdot \cos. (AB - AC)$, en substituant leurs valeurs (3810, 3812), $= \text{cosin}. AC^2 \cdot \text{cosin}. AB^2 - \sin. AC^2 \cdot \sin. AB^2$, ou (parceque $\sin. AC^2 = 1 - \text{cosin}. AC^2$) $= \cos. AC^2 \cdot \cos. AB^2 - \sin. AB^2 + \sin. AB^2 \cdot \cos. AC^2 = \cos. AC^2 \times (\cos. AB^2 + \sin. AB^2) - \sin. AB^2 = \cos. AC^2 - \sin. AB^2$; donc $- \text{cosin}. (AB + AC) \cdot \cos. (AB - AC) = \sin. AB^2 - \cos. AC^2 = \sin. AC^2 - \cos. AB^2$.

Si donc on appelle h la hauteur du pole et d la déclinaison, l'on aura (*en prenant les minutes de la réfraction pour des secondes*) le changement qu'elle produit sur le lever du Soleil en secondes de temps $= \frac{4 \text{ réfractions en minutes de temps}}{\sqrt{\cos. (h + d) \times \cos. (h - d)}}$.

4023. Exemple. Soit la hauteur du pole $h = 48° 50'$, comme à

Paris ; la déclinaison d de la Lune = 25° à l'heure du lever apparent que l'on cherche (1023) ; la différence entre la réfraction et la parallaxe, 21′ 0″ ou 84″ de temps : on fera le calcul ci-joint.

Log. cos. ($h + d$)	73° 58′	944122
Log. cos. ($h - d$)	23° 42′	996173
Somme		940295
Moitié		970147
Otée du logar. de 84″		192428
Il reste le log. 167″, ou 2′ 47″		222281

C'est la quantité dont le lever de la Lune sera retardé par les 21′ de parallaxe et de réfraction.

4024. Cette formule suppose que l'effet de la réfraction est le même pour les déclinaisons australes ou boréales ; mais à de grandes latitudes, la quantité que l'on cherche n'étant pas très petite, l'erreur devient sensible : à 60° de latitude et 29° de déclinaison, on trouve 16′ 17″ de temps si la déclinaison est australe, et 21′ 52″ si elle est boréale ; dans ces cas-là on peut employer une formule que donne M. Cagnoli (pag. 368), ou bien résoudre deux triangles.

4025. Si, au lieu de la réfraction horizontale, on emploie le diametre du Soleil, on aura le temps que le Soleil emploie à se lever ou à se coucher.

4026. *Si deux côtés* AB, AC, (FIG. 328) *sont constans, la différentielle de l'un ou de l'autre des angles opposés aux côtés constans, tel que* B, *sera à la différentielle du troisieme côté* BC, *comme le rayon est à la tangente de l'autre angle* C *opposé à l'un des côtés constans* AB *multiplié par le sinus du troisieme côté, ou du côté variable* BC.

Dém. Il s'agit de trouver le rapport de HI à ED : on a d'abord $HI = \frac{ED \cdot HI \cdot EC}{ED \cdot EC}$; or $\frac{HI}{EC} = \frac{1}{\text{sin. } BC}$ (3875) ; $\frac{EC}{ED} = \text{tang. } EDC = \frac{1}{\text{tang.} ACB}$; donc $HI = \frac{ED}{\text{sin. } BC \cdot \text{tang. } ACB}$, c'est-à-dire que HI : ED ou $\delta B : \delta BC$ :: 1 : sin. BC tang. C, ou comme cot. C : sin. BC : nous en avons fait usage (933, 2265).

4027. Si le triangle devenoit très petit, les côtés seroient des lignes droites ; ainsi, en mettant BC au lieu du sinus, on auroit $\delta B : \delta BC$ :: cot. C : BC (1197).

4028. Si BC = 90°, on aura $CE = \delta B$; mais $CE = CD \cdot \text{cos.} C = \delta A \cdot \text{sin. } AC \cdot \text{cos. } C$, et $\text{cos. } C = \frac{\text{cos. } AB}{\text{sin. } AC}$ (4020) ; donc $CE = \delta A \cdot \text{cosin. } AB$; ainsi il suffira de multiplier par cosin. AB la valeur de δA (4020), et l'on aura $\delta B = \frac{\delta BC \cdot \text{cos } AB}{\sqrt{\text{sin}^2. AC - \text{cos}^2. AB}}$. Cette formule sert à trouver l'effet de la réfraction sur les amplitudes

(1045) : elle sera réduite alors à celle-ci $\frac{\text{réfract. sin. lat.}}{\sqrt{\text{cos}^2.\ \text{déclin.} - \text{sin}^2.\ \text{latit.}}}$ (*Almanac de Berlin* 1750),

4029. Cette expression peut se mettre sous une forme plus commode pour l'usage, en écrivant $\frac{d\,BC \cdot \text{cos. } AB}{\text{cos. } AB \sqrt{\frac{\text{sin}^2.\ AC}{\text{cos}^2.\ AB} - 1}}$, ou $\frac{d\,BC}{\sqrt{\frac{\text{sin}^2.\ AC}{\text{cos}^2.\ AB} - 1}}$. Ce dénominateur est l'expression d'une cotangente, le sinus étant $\frac{\text{cos. } AB}{\text{sin. } AC}$ (3307), ou l'unité divisée par la racine du premier terme du radical. Si l'on fait donc $\frac{\text{cos. } AB}{\text{sin. } AC} = \text{sin. } X$, on aura $d\,B = \frac{d\,BC}{\text{cot. } X} = d\,BC \cdot \text{tang. } X$. Mais cette formule suppose la distance au zénit de 90°, et quand on veut l'employer à 90° 33′ seulement, elle produit 26″ d'erreur pour 3′ ½ de variation dans l'azimut.

4030. Pour avoir cet effet plus exactement, M. Cagnoli (p. 371) calcule séparément l'amplitude vraie dont le sinus est $\frac{\text{sin. déclin.}}{\text{cos. latit.}}$, et l'amplitude apparente dont le sinus est $\frac{\text{sin. amplit. vr.}}{\text{cos. réfract.}}$ multiplié par $\left(1 + \frac{\text{sin. réfract.} \times \text{tang. latit.}}{\text{sin. amplit. vraie}}\right)$.

On trouve par là que 1′ de changement dans la réfraction de la Lyre en produit 4 sur l'amplitude à Paris (2227).

4031. Cette formule peut servir à trouver la correction de l'amplitude en mer, quand on observe un astre par un rayon incliné au-dessous de l'horizon rationel, et que son coucher apparent arrive plus tard que son coucher réel (2666) ; si l'on est élevé de 95 pieds, on voit l'horizon de la mer 10′ plus bas, et l'amplitude est différente de ce qu'elle seroit au véritable horizon, 10′ plus près du zénit.

4032. Les deux côtés AB, AC, étant supposés constans, on a encore $d\,B : d\,BC :: \frac{\text{cot. } AB}{\text{sin. } B} - \frac{\text{cot. } BC}{\text{tang. } B} : 1$, en mettant dans l'article 4026 au lieu de cotang. C l'unité divisée par la premiere valeur de tang. C (3953); $\frac{\text{sin. } B}{\text{cot. } AB \cdot \text{sin. } BC - \text{cos. } B\ \ \text{cos. } BC}$; au lieu de $\frac{\text{cos. } B}{\text{sin. } B}$ sa valeur $\frac{1}{\text{tang. } B}$, et à la place de $\frac{\text{cos. } BC}{\text{sin. } BC}$ sa valeur cot. BC. Cette analogie est très importante, et sert pour les hauteurs correspondantes (927); on la trouve dans beaucoup de livres : *Mém. de Pétersbourg* 1736, imprimés en 1741, T. VIII, p. 48 ; *Mém. de l'acad.* 1741, p. 242 ;

Astronomie nautique de Maupertuis, édition de 1743; *Mém. de Berlin*, T. III et VII; OEuvres du P. Boscovich, T. IV, pag. 378; M. du Séjour, *Traité analyt.*, *etc.*

4033. *Si deux côtés sont constans, tels que* AB, AC (fig. 328), *les différentielles des angles opposés aux côtés constans sont comme les tangentes de ces mêmes angles.*

Dém. Les sinus des angles opposés à des côtés constans sont en raison constante; ainsi les différentielles de ces sinus sont dans le même rapport que les sinus eux-mêmes (3433), c'est-à-dire que $d\,\sin.B : d\,\sin.C :: \sin.B : \sin.C$; mais $d\,\sin.B = dB \cdot \cos.B$ (3446), et $d\,\sin.C = dC \cdot \cos.C$; donc $dB \cdot \cos.B : dC \cdot \cos.C :: \sin.B : \sin.C$, et $dB : dC :: \frac{\sin.B}{\cos.B} : \frac{\sin.C}{\cos.C} :: \text{tang.}B : \text{tang.}C$; donc $dB : dC :: \text{tang.}B : \text{tang.}C$. Cette proportion a lieu également dans un triangle rectiligne; car si les arcs AB et AC sont très petits, le triangle devient rectiligne et cela ne change rien à la démonstration. Nous avons fait usage de cette analogie pour les rétrogradations (1187).

4034. *Si deux angles sont supposés constans, la différentielle du côté compris entre les deux angles constans sera à la différentielle d'un des autres côtés, comme le sinus du troisieme angle est au produit du sinus de l'angle opposé à ce côté et du cosinus du troisieme côté.*

Dém. Supposons le triangle ABC (fig. 326), dont les angles A et B sont constans; ayant décrit le triangle polaire EFD (3871), l'on aura les côtés FE et FD constans; alors la différentielle de l'angle compris F est à celle de l'angle D, comme le sinus du troisieme côté ED est au produit du sinus du côté EF et du cosinus du troisieme angle E (4015). Substituons dans cette proportion les quantités qui correspondent à chaque terme dans le triangle ABC, on aura la proportion cherchée : $dAB : dBC :: \sin.C : \sin.A \cdot \cos.AC$. Nous en avons fait usage pour trouver le mouvement des nœuds des planetes (1351), et pour le changement des étoiles en longitude (2752).

4035. $dAB : dBC :: \sin.AB : \sin.BC \cdot \text{cosin}.AC$, parceque $\sin.C : \sin.A :: \sin.AB : \sin.BC$. On peut dire aussi $:: 1 : \cos.B + \sin.B \cdot \cot.C \cdot \cos.BC$. En effet $\cos.AC = \cos.B \cdot \sin.AB \cdot \sin.BC + \cos.AB \cdot \cos.BC$ (3948), ou $\cos.AC - \cos.AB \cdot \text{cosin}.BC = \sin.BC \cdot \cos.B \cdot \sin.AB$; et multipliant par $\sin.BC$, $\cos.AC \cdot \sin.BC - \sin.BC \cdot \cos.AB \cdot \text{cosin}.BC = \sin.BC^2 \cdot \text{cosin}.B \cdot \sin.AB = (1 - \cos.BC^2) \cdot \cos.B \cdot \sin.AB = \text{cosin}.B \cdot \sin.AB - \text{cosin}.B \cdot \sin.AB$ =

cos. BC^2; donc sin. BC·cosin. AC — cos. B·sin. AB = cos. AB·sin. BC·cos. BC — cos. BC^2·sin. AB·cosin. B = cot. AB·sin. AB·sin. BC·cosin. BC — cosin. BC^2·sin. AB·sin. B·cotang. B; divisant par sin. AB·cosin. BC·sin. B, l'on a $\frac{\text{cot. AB} \cdot \text{sin. BC} - \text{cos. BC} \cdot \text{sin. B} \cdot \text{cot. B}}{\text{sin. B}}$ $= \frac{\text{sin. BC} \cdot \text{cos. AC} - \text{cos. B} \cdot \text{sin. AB}}{\text{sin. AB} \cdot \text{sin. B} \cdot \text{cos. BC}}$. Mais le premier membre est la valeur de cot. C (3959); ainsi cot. C·sin. AB·sin. B·cosin. BC = sin. BC·cos. AC — cos. B·sin. AB; donc $\frac{\text{sin. BC} \cdot \text{cos. AC}}{\text{sin. AB}}$ = cos. B + cot. C·cos. BC·sin. B; donc dAB : dBC :: 1 : cos. B + cot. C·cos. BC·sin. B. Nous en avons fait usage (1351).

4036. Si A = 90°... dAB : dBC :: sin. C : cos. AC; il suffit d'effacer sin. A dans l'art. 4034. De plus dAB : dBC :: cosin. B : cos. AC^2, en mettant pour sin. C sa valeur $\frac{\text{cos. B}}{\text{cos. AC}}$ (3885) : c'est l'expression du mouvement en ascension droite par le moyen du mouvement en longitude : nous avons fait usage de cette analogie pour l'équation du temps (971).

4037. Si A = 90°, l'on a encore dAB : dBC :: sin. B·sin. AB : $\frac{1}{2}$sin. 2AC; car sin. AB : sin. BC·cos. AC :: sin. AB : $\frac{\text{sin. AC} \cdot \text{sin. A}}{\text{sin. B}}$ × cosin. AC (3907), ou, parceque sin. A = 1, :: sin. B·sin. AB : sin. AC·cos. AC, ou $\frac{1}{2}$sin. 2AC (3817).

4038. Si, au lieu du côté BC, on considere la variation du côté AC, l'on aura par l'art. 4034 : dAB : dAC :: sin. C : sin. B·cos. BC, et dAB : dAC :: sin. AB : sin. AC·cos. BC.

Si AB est l'ascension droite du Soleil, AC la déclinaison et BC la longitude, on conclura de cette formule le mouvement en ascension droite par le moyen du mouvement en déclinaison (876). Mais il y a plusieurs autres expressions qui peuvent y servir.

4039. Le triangle rectangle EBA (FIG. 27) donne R : sin. EB :: tang. E : tang. AB (3882); en faisant l'ascension droite EB = A et la déclinaison AB = D, et AC, qui est le changement de déclinaison, = dD, on a sin. A = $\frac{\text{tang. D}}{\text{tang. E}}$ = tang. D·cotang. E; en prenant les différentielles (3446, 3452), nous aurons dA·cosin. A = $\frac{d\text{D} \cdot \text{cot. E}}{\text{cos.}^2 \text{D}}$, dA = $\frac{d D \cdot \text{cot. E}}{\text{cos.}^2 \text{D} \cdot \text{cos. A}}$.

Si l'on met cosin. AE pour cosin. A·cosin. D, l'on aura dA = $\frac{d\text{D} \cdot \text{cot. E}}{\text{cos. D} \cdot \text{cos. AE}}$: c'est la formule que la Caille employoit : mais la précédente est préférable en ce qu'il n'y entre que l'ascension droite,

la

la déclinaison, et l'obliquité qui sont connus nécessairement, au lieu que la longitude ne l'est pas.

4040. Si au lieu de cot. E l'on met sin. A · cot. D (3882), l'on aura encore le mouvement en ascension droite $\delta A = \frac{2 \delta D \cdot \text{tan. ascen. dr.}}{\text{sin. } 2 \text{ déclin.}}$.

4041. *Si deux angles* A *et* B (fig. 326) *sont constans, la différentielle du côté* AB, *compris entre ces deux angles, est à la différence de l'angle* C *opposé à ce côté compris* AB, *comme le rayon est au sinus d'un des côtés* BC *multiplié par le sinus de l'angle constant* B *adjacent à ce côté.*

Dém. Ayant décrit le triangle polaire EFD (3871), dans lequel FE supplément de l'angle A et FD supplément de l'angle B seront constans, on aura cette proportion (4018), la différentielle de l'angle F compris entre les deux côtés constans est à la différentielle de son côté opposé ED, comme le rayon est au sinus d'un des angles D multiplié par le sinus du côté constant FD contigu à cet angle; et substituant dans cette proportion les supplémens pris dans le triangle ABC, elle se changera en celle-ci : $\delta AB : \delta C :: 1 : \text{sin. } BC \cdot \text{sin. } B$. Nous avons employé cette proportion (1378).

4042. *Si deux angles* A et B (fig. 326) *sont constans, la différentielle d'un des côtés* BC *opposé à l'un des deux angles constans* A, *sera à la différentielle du troisieme angle* C, *comme le rayon est à la tangente de l'autre côté* AC *opposé à l'autre angle constant* B *multiplié par le sinus du troisieme angle* C.

Dém. Ayant décrit le triangle polaire EFD (3871), on aura les côtés FE et FD constans; donc (4026) $\delta D : \delta ED :: R : \text{tang. } E \cdot \text{sin. } DE$; et lorsqu'on substituera à la place de l'angle D son supplément BC, à la place de ED son supplément C, à la place de E le côté AC, la proportion deviendra celle qu'il falloit démontrer : $\delta BC : \delta C :: 1 : \text{tang. } AC \cdot \text{sin. } C$.

4043. *Si deux angles* A *et* B (fig. 326) *sont constans, les différentielles des côtés opposés aux angles constans seront entre elles comme les tangentes de ces mêmes côtés.*

Dém. Dans le triangle polaire EFD (3871), les différentielles des angles D et F seront les mêmes que celles des côtés BC et AC; ainsi l'on aura (4033) $\delta D : \delta E :: \text{tang. } D : \text{tang. } E$; donc $\delta BC : \delta AC :: \text{tang. } BC : \text{tang. } AC$.

4044. Si $A = 90°$, $\delta BC : \delta AC :: R : \text{cosin. } C$, parceque $R : \text{cos. } C :: \text{tang. } BC : \text{tang. } AC$ (3884).

Cette formule peut servir à trouver le changement de déclinaison aux environs des solstices ; il y en a une table dans le T. VIII de mes Ephémérides. Ce changement, suivant la formule, est égal au mouvement en longitude multiplié par le cosinus de l'angle de l'écliptique avec le méridien, ou bien par le sinus de l'obliquité de l'écliptique et le cosinus de l'ascension droite (3385).

On pourroit le trouver aussi par le moyen du mouvement en ascension droite (4039).

4045. Je joindrai à ces théorêmes une proposition qui est d'un assez grand usage dans l'astronomie ; elle a pour objet des quantités d'un ordre inférieur, c'est-à-dire beaucoup plus petites que les quantités que nous avons traitées comme infiniment petites ; mais il est bien des cas où ces quantités deviennent sensibles, sur-tout lorsqu'on veut donner une étendue de 30 ou 40′ aux variations infiniment petites, dont nous avons parlé dans les articles précédens.

4046. *Dans un triangle rectangle sphérique, dont un angle de même que le côté opposé sont très petits par rapport aux autres côtés, la différence entre l'hypoténuse et le grand côté est égale à la moitié du carré du petit côté multipliée par la cotangente de l'hypoténuse.*

Soit BAD (FIG. 321) un triangle sphérique rectangle en D, dont le côté AD soit comme une ligne droite très petite ; DH et AH deux tangentes en D et en A ; du point H où ces deux tangentes rencontrent le rayon CB de la sphere prolongé, l'on décrira par le point A un petit arc de cercle AG, dont HA et HG sont les rayons, dont la petite perpendiculaire AD sera le sinus, et dont GD est le sin. verse ; alors on aura $GD = \frac{AD^2}{2AH}$ (3494) ; mais AH est la tangente de l'arc BA ou BD ; donc $GD = \frac{AD^2}{2 \text{ tang. } BD} = \frac{AD^2}{2} \cdot \text{cot. } BD$. Cela suppose que les lignes GD et AD sont exprimées dans les tables en parties semblables, c'est-à-dire ou en décimales du rayon ou en secondes : mais les tangentes qu'on prend dans les tables sont en décimales du rayon ; il faut donc aussi que l'arc AD soit en décimales ; s'il est donné en secondes, il faut diviser AD^2 deux fois par 57° ou 206264″ (art. 1242, 3499) pour l'avoir en décimales ; et après avoir évalué ainsi la formule, il faudra pour avoir DG multiplier par 57° pour le réduire en secondes ; ainsi DG ou la différence entre l'hypoténuse et le côté étant exprimée en secondes, est $\frac{AD^2 \cdot \text{cot. } BD}{2 \times 57^\circ}$. Cette quantité est encore plus exactement exprimée par $\frac{1}{2} B^2 \cdot \text{sin. } 2BD$ (3988) ;

mais j'ai voulu démontrer ici l'expression dont Bouguer et d'autres se sont servis.

4047. On fait usage de cette formule pour trouver les distances entre les grands cercles et les paralleles qui les touchent en un point, par exemple, le changement de déclinaison près du solstice. On s'en sert aussi pour trouver le changement de hauteur près du méridien, et l'erreur des hauteurs prises avec des instrumens qui ne sont pas bien dans le méridien (2568, 2570).

4048. On suppose souvent rectiligne un petit triangle sphérique dont les côtés n'ont pas plus d'un degré; mais on commet une petite erreur; elle peut s'évaluer de la maniere suivante. Soit le triangle IGK (FIG. 325), dont les côtés ne passent pas un degré, formé au dedans du triangle sphérique IFK isoscele dont on suppose droits les angles I et K, à cause de la petitesse de l'angle F; si l'on abaisse sur IK la perpendiculaire GH, on aura une petite différence KH qu'il s'agit de trouver. Dans le triangle IKF on a cette proportion: R : tang. $\frac{1}{2}$KI :: cot. KF : cosin. K (3884), ou sin. HGK; ainsi le petit angle HGK sera $\frac{1}{2}$KI · cot. KF, et KH = GK · sin. HGK. En diminuant l'angle droit de la quantité HGK et le côté IK de la quantité KH, on peut traiter le triangle IGK comme rectiligne rectangle. M. Cagnoli a donné une table de l'angle HGK (*Trigon.*, pag. 306). Dans les calculs de l'article 2128, si le Soleil étoit à 2° du zénit, on se tromperoit de 25″ sur la différence de longitude en suivant les regles ordinaires; mais le calcul devient exact en faisant les corrections que je viens d'indiquer.

Des Différentielles finies.

4049. Il y a bien des cas dans l'astronomie où l'on a commis des erreurs sensibles en étendant un peu trop loin la supposition des différences infiniment petites. M. Cagnoli, pour y suppléer, a donné dans sa Trigonométrie des formules analogues, mais dont les variations ne sont point supposées infiniment petites; et il en a fait des applications curieuses: je vais en donner seulement une qui simplifie le problêmes des rotations.

Supposons un triangle ABC (FIG. 328) qui se change en un triangle ABD, AD étant égal à AC, c'est-à-dire qu'on considere le triangle ABC comme ayant deux côtés constans AB, AC, le reste variable; le changement de l'angle B est CBD que nous appellerons δ B; et la quantité dont l'angle D sera plus ou moins grand que l'angle

C s'appellera δC, quoique ces variations ne soient plus supposées très petites : alors on aura pour le changement arrivé dans l'angle C la proportion suivante : tang. $\frac{1}{2}\delta B$: tang. $\frac{1}{2}\delta C$ :: tang. ($B + \frac{1}{2}\delta B$) : tang. ($C + \frac{1}{2}\delta C$). Pour démontrer cette formule, on considérera d'abord que puisque $AC = AD$, l'on a sin. C : sin. B, ou ABC, :: sin. D : sin. ABD; donc $\frac{\text{sin. C} + \text{sin. D}}{\text{sin. C} - \text{sin. D}} = \frac{\text{sin. B} + \text{sin. ABD}}{\text{sin. B} - \text{sin. ABD}}$; donc (3836) $\frac{\text{tang.} \frac{1}{2}(C + D)}{\text{tang.} \frac{1}{2}(C - D)} = \frac{\text{tang.} \frac{1}{2}(B + ABD)}{\text{tang.} \frac{1}{2}(B - ABD)}$, ou, ce qui revient au même, tang. ($C + \frac{1}{2}\delta C$) : tang. $\frac{1}{2}\delta C$ :: tang. ($B + \frac{1}{2}\delta B$) : tang. $\frac{1}{2}\delta B$.

4050. Pour trouver la variation du côté BC ou la différence de BC à BD, c'est-à-dire δBC, l'on aura cette autre analogie : — sin. $\frac{1}{2}\delta BC$: tang. $\frac{1}{2}\delta B$ :: sin. ($BC - \frac{1}{2}\delta BC$) : cot. ($C + \frac{1}{2}\delta C$). En effet, dans le triangle BCD, on a sin. $\frac{1}{2}$(BC + BD) : sin. $\frac{1}{2}$(BC — BD) :: cot. $\frac{1}{2}$CBD : tang. $\frac{1}{2}$(BCD — BDC) (3984). Mais le triangle CAD étant isoscele, on a $BCD - BDC = ACD + ACB - (ADC - ADB) = ACD + ACB - (ACD - ADB) = ACB + ADB$, ou $C + D$; donc sin. $\frac{1}{2}$(BC + BD) : sin. $\frac{1}{2}$(BC — BD) :: cot. $\frac{1}{2}$CBD : tang. $\frac{1}{2}$(C + D), ou sin. ($BC - \frac{1}{2}\delta BC$) : sin. $\frac{1}{2}\delta BC$ :: cotang. $\frac{1}{2}\delta B$: tang. ($C + \frac{1}{2}DC$) ; donc enfin sin. $\frac{1}{2}\delta BC$: tang. $\frac{1}{2}\delta B$ :: sin. ($BC - \frac{1}{2}\delta BC$) : cot. ($C + \frac{1}{2}\delta C$) : nous l'avons employée (3259).

Résoudre les Triangles sphériques avec la regle et le compas.

4051. On peut trouver sur un globe avec le compas les arcs que la trigonométrie sphérique donne par le calcul; mais la projection orthographique dont nous avons parlé à l'occasion des éclipses (1810) fournit un moyen plus commode pour résoudre les triangles sphériques avec la regle et le compas, à un quart de degré près. Cette méthode est souvent utile dans l'astronomie pour diminuer la longueur des opérations quand on n'a besoin que d'une médiocre précision, comme cela arrive très souvent.

Pour en faire sentir la démonstration, nous la rapporterons au calcul de la hauteur, ou du triangle PZS (1033), qui doit être familier à nos lecteurs, et nous le rapporterons sur le plan du méridien pour former

la projection qu'on appelle *analemme*[a]. Soit OM (FIG. 330) la méridienne ou le diametre de l'horizon du nord au sud, B le pole, CB l'axe du monde, A le zénit, AB la distance du pole au zénit, KN le diametre d'un almicantarat ou d'un petit cercle parallele à l'horizon (185), GD le rayon du parallele diurne que décrit un astre dont CB est la distance au pole. Considérons cet astre au moment où il répond perpendiculairement au point F, étant au-dessus de la figure, et sa projection sur le plan du méridien étant en F; alors FH est le sinus de sa hauteur, FD le cosinus de son angle horaire pour le rayon GD ; QF ou CH le sinus de son azimut compté du point d'orient sur l'almicantarat, ou le cosinus de l'azimut compté du point K; CD le sinus de sa déclinaison, ou le cosinus de sa distance au pole. Si l'on tire un rayon CG, une ligne FE perpendilaire à GD et une ligne EL perpendiculaire à CEG, l'arc GL sera l'angle horaire; car FD étant le cosinus de l'ang. horaire pour le rayon GD, on aura CE égale au cosinus du même angle pour le rayon CG qui est le rayon du cercle OGM; donc l'arc GL est l'angle horaire. De même si l'on tire le rayon CK qui coupe IFR en R, et qu'on porte CR le long de CO, l'on aura CT au lieu de CH pour le cosinus de l'azimut compté du midi sur le grand cercle. Le triangle formé au pole, au zénit et au Soleil, que j'appellerai PZS, comme dans les figures 35, 42, 89, etc., a son côté PZ représenté dans la figure 330 par BA ; ZS y est représenté par AK, SP y est représenté par BG, l'angle P par GL, et l'angle Z ou son supplément a son cosinus exprimé par CT ; ainsi il n'est pas bien difficile de ramener tous les cas des triangles sphériques à la figure 330, qui répond au triangle PZS dont les astronomes font tant d'usage.

4052. *Connoissant deux côtés et l'angle compris, trouver le troisieme côté et l'un des autres angles.* On décrira un demi-cercle OAM (FIG. 330), dont C est le centre, A le sommet; on prendra l'arc AB égal au côté adjacent à l'angle cherché, BG égal au côté opposé à l'angle cherché, GL égal à l'angle donné, compris entre ces deux côtés ; on tirera le rayon CB et la perpendiculaire GD, le rayon CG et LE perpendiculaire sur CG ; par le point E on tirera EF perpen-

[a] Ce terme est tiré du mot grec ἀνάλεμμα, qui signifie *altitudo, firmamentum ;* et peut-être ce nom vient de ce que cette figure sert à calculer les hauteurs. Vitruve parle de l'analemme comme d'une figure propre à faire des cadrans (IX, 4 et 9) ; on donne aussi ce nom au trigone des signes qui sert dans la gnomonique ; enfin on a appellé analemme l'astrolabe de Royas, dans lequel l'horizon, l'équateur et l'écliptique sont représentés par des lignes droites (*Usage des astrolabes*, 1702, p. 141).

diculaire sur GD, et par le point F la ligne KFN, parallele au diametre OCM ; cette ligne coupera les arcs KA ou NA égaux au côté cherché, opposé à l'angle qui est exprimé par GL. C'est une suite naturelle des principes de la sphere ; car on peut supposer que B est le pole, A le zénit, GD le rayon du parallele d'un astre, OK sa hauteur, KN le diametre de son almicantarat ; l'astre répondra perpendiculairement au point F, FD sera le cosinus de l'angle horaire pour le rayon DG, et CE pour le rayon CG ; ainsi l'arc GL sera l'angle P du triangle PZS, en supposant AK = ZS, AB = PZ et BG = PS.

4053. Pour avoir l'angle qui est opposé au côté exprimé par BG, ou adjacent au côté représenté par AB, on tirera au point K la ligne CRK, et par le point F la ligne IFH perpendiculaire à CO, le point d'intersection de CK et de IH sera en R ; on prendra CT = CR ; et ayant élevé la perpendiculaire TV, on aura l'arc VM égal à l'angle cherché. Cela serviroit à trouver l'azimut, compté du midi, qui est le supplément de l'angle Z dans le triangle PZS.

Lorsqu'on connoît les trois côtés, on peut trouver de même un des angles, en prenant AB, BG et AK égaux aux trois côtés du triangle ; AK représentant le côté opposé à l'angle cherché, on tirera les lignes CB, GD, CG, KN, FE, EL ; et l'on aura GL pour mesure de l'angle cherché, opposé au côté dont AK est la valeur. On trouvera ci-après (4198) un exemple utile de ces opérations graphiques dans la méthode des longitudes, soit pour avoir l'heure en mer, soit pour trouver les angles à la Lune et à l'étoile, qui donnent les corrections dépendantes de la parallaxe et de la réfraction. Je vais en donner ici un autre exemple qui peut être d'usage pour un astronome.

4054. *Connoissant la longitude et la latitude d'un astre, trouver son ascension droite et sa déclinaison.* Il s'agit de résoudre le triangle PES (FIG. 41 ou 223), dans lequel on connoît l'angle E formé au pole de l'écliptique avec EP et ES (2725) ; on prendra AB (FIG. 330) égal à l'obliquité de l'écliptique = $23^\circ\frac{1}{2}$; BG égal à la distance de l'étoile au pole boréal de l'écliptique, et GL égal au complément de la distance à l'équinoxe le plus prochain, comptée sur l'écliptique, c'est-à-dire égal à la distance de l'astre au colure des solstices prise par le plus court chemin ; ayant tiré les lignes CB, CG, GD, LE, EF, KFN, IFH, CK, on aura OK égal à la déclinaison cherchée, qui sera boréale quand le point K sera au-dessus du point O. On prendra CT = CR, et ayant élevé la perpendiculaire TV, l'arc AV sera l'ascension droite cherchée, ou plutôt la distance au plus prochain équinoxe, puisque c'est le complé-

ment de l'angle P du triangle PES (FIG. 41 et 223), dont les côtés sont réprésentés par AB, BG et AK, le côté qu'exprime BG lui étant opposé. Si le point F étant au-dessus du point D, le point T se trouve, par rapport au centre C, du même côté que le point B, c'est une preuve que l'ascension droite et la longitude sont de différens côtés par rapport à l'équinoxe duquel on est parti; lorsqu'on a pris GL égal au complément de la distance à l'équinoxe le plus voisin, c'est le cas de l'art. 902.

On pourroit résoudre de même tous les autres cas de la trigonométrie sphérique; mais je me borne à ceux qui peuvent être les plus utiles. On peut voir plus de détails à ce sujet dans les Œuvres de M. Boscovich, Tom. III, pag. 209, et dans la Trigonométrie de M. Cagnoli, pag. 288.

4055. L'échelle des logarithmes, ou *échelle de Gunter*, fournit un autre moyen de résoudre sans calcul les triangles sphériques; et M. le Monnier en conseille l'usage (*Abrégé du pilotage*, 1766, pag. 192).

DES PROJECTIONS DES CARTES GÉOGRAPHIQUES.

4056. LORSQU'ON veut représenter sur un plan une portion du globe (216), on éprouve une difficulté qui vient de la différence essentielle entre une surface courbe et un plan. Il est impossible que la situation respective des différens points d'une carte soit la même que dans un globe, en prenant des longitudes et des latit. pareilles; mais on s'efforce d'en approcher. Les plus anciennes cartes étoient ptojetées fort grossièrement; les méridiens étoient des lignes droites, paralleles et égales entre elles, et les degrés de longitude égaux entre eux dans l'étendue de la carte : c'est ce qu'on appelle des *Cartes plates*. Plusieurs auteurs remarquerent le défaut de cette imitation; Ptolemée lui-même, ensuite Martin Cortese, Pierre Nonius, Coignet.

4057. Dans la grande Carte de France, en 180 feuilles, levée géométriquement et tracée par des distances à la méridienne et à la perpendiculaire, on suppose aussi la méridienne de Paris et sa perpendiculaire développées sur un plan avec leur longueur réelle: mais alors les autres perpendiculaires à la méridienne ne devroient pas être paralleles; elles sont convergentes sur le globe, et la carte en differe sensiblement. Si l'on prend deux points éloignés de Paris de quatre degrés, l'un au nord, l'autre à l'orient, leur distance sur la carte sera plus

grande de 136 toises que leur distance mesurée immédiatement sur la surface courbe de la Terre.

4058. Pour avoir la position des méridiens et des paralleles sur une carte, on a recours à des projections (1810). On peut voir sur les projections en général, Guide Ubalde, Clavius, Aguillon, Tacquet, la Caille, *Mémoires* de 1744.

4059. La projection la plus simple de toutes est la projection *orthographique* (1810); mais elle est très défectueuse pour les cartes d'une certaine étendue, parceque les sinus verses devenant très petits vers les bords de l'hémisphere, les arcs y sont représentés par de trop petites lignes : on ne peut s'en servir que pour les cartes des régions circompolaires ou pour les pays qui ont peu d'étendue.

4060. La forme la plus commode pour les cartes qui doivent contenir une grande partie du globe, et sur-tout pour les mappemondes, celle qui défigure le moins la forme naturelle des continens, est la *Projection stéréographique* (1811, 2111); c'est celle dont Ptolemée s'est servi dans son *astrolabe* [a] : on en voit un exemple dans la mappemonde de la figure 133 (planche XV), on s'en sert également dans les planispheres célestes. Les quatre parties du monde de Guillaume de l'Isle, et beaucoup d'autres cartes importantes, sont faites sur cette projection ; les méridiens et les paralleles y sont représentés par des cercles qui se coupent à angles droits comme sur le globe ; mais les distances linéaires y sont toutes diminuées ou raccourcies, excepté seulement à la circonférence de la projection. Les degrés aux environs du centre de la carte sont réduits à la moitié, en sorte que les surfaces qui devroient être les mêmes, comme sur le globe, y sont quatre fois moindres que sur les bords.

On supose que l'œil est placé à la circonférence même du globe dans la partie supérieure, et qu'il regarde l'hémisphere inférieur en rapportant tous les points de cet hémisphere sur le plan du grand cercle perpendiculaire au diametre sur lequel l'œil est placé.

4061. Par exemple, l'astrolabe planisphere de Ptolemée ou l'astrolabe polaire est une projection du globe faite sur un plan parallele à l'équateur, par des lignes tirées d'un des poles ; les méridiens y de-

[a] Le véritable astrolabe de Ptolemée étoit armillaire (2279) ; mais on a aussi donné ce nom à son planisphere. On appelloit *météoroscope* en 1500 cet astrolabe ou planisphere, qui servoit à trouver les circonstances du mouvement diurne (Schoner 1551). Gemma Frisius l'appelloit *astrolabium catholicum;* on en trouve la description dans beaucoup de livres, tels que le Cosmolabe de Besson, 1567; *Adriani Metii Opera astronomica ; Clavii Astrolabium ;* Usage des astrolabes, Bion, 1702. C'est en ce sens que le mot d'astrolabe est employé dans la plupart des auteurs du seizieme et du dix-septieme siecle.

viennent

Fig. 314. Fig. 315. Fig. 316. Fig. 317. Fig. 318. Fig. 319. Fig. 320. Fig. 321. Fig. 322. Fig. 323. Fig. 324. Fig. 325. Fig. 326. Fig. 327. Fig. 328. Fig. 329. Fig. 330.

viennent des lignes droites : mais dans les mappemondes, comme celle de la figure 133, l'œil est supposé élevé perpendiculairement sur la figure ; le plan de projection est le premier méridien ; l'œil est dans l'équateur à 90° de longitude pour le continent de l'Amérique, et à 270° pour l'ancien continent. Robert de Vaugondy a fait des cartes de Russie, où l'œil est supposé au pole, et dont le plan de projection est l'équateur; alors tous les paralleles sont concentriques et les méridiens sont des lignes droites, divisées inégalement.

4062. Pour expliquer la mappemonde ordinaire où l'œil est placé dans l'équateur, soit l'œil en Q (FIG. 317), BD le diametre du cercle de projection, BFD le demi-cercle qu'il s'agit de projeter sur le diametre BD; on conçoit des rayons visuels QF, QR, menés de l'œil Q aux différens points F, R, de cette concavité : ils rencontrent le diametre BD en autant de points C, G, qui en sont les projections. Du milieu F de la projection soit pris un arc FR de 40°, dont la projection est CG; l'angle CQG sera de 20°, c'est-à-dire la moitié de l'arc FR; et puisque QC est le rayon du cercle, CG sera égal à la tangente de 20° : ainsi, *dans la projection stéréographique*, *un arc compté du centre a pour projection la tangente de la moitié de l'arc.*

4063. La plus belle propriété de la projection stéréographique consite à représenter par des cercles tous les cercles de la sphere, grands ou petits ; et nous avons fait usage de cette propriété pour les passages de Vénus (2111). Soit un arc uH dans une positition quelconque, sur lequel nous concevrons un petit cercle de la sphere qui ait pour diametre uH, et qui soit la base d'un cône oblique scalene uQH ; je dis que la section ST de ce cône par le plan de projection sera encore un cercle. Les triangles QSt, QuH, sont semblables ; car l'angle en Q est commun, l'angle $Q t S = \frac{1}{2} DQ + \frac{1}{2} Bu = \frac{1}{2} BQ + \frac{1}{2} Bu = \frac{1}{2} Qu = uHQ$; ainsi les triangles QSt, QuH, sont semblables, de même que les cônes dont ils sont les sections ; donc la base du cône uQH étant un cercle, la base du cône tQS est également circulaire, quoique d'une grandeur différente. On verroit, en faisant d'autres figures semblables avec les mêmes lettres, que la grandeur de Hu et sa situation, même dans le demi-cercle supérieur BQD, ne changent rien à la vérité de cette proposition. Ainsi, *dans la projection stéréographique*, *tous les cercles du globe*, *quelle que soit leur position*, *sont réprésentés par des cercles.*

4064. Les méridiens dans cette projection sont des cercles d'autant moins courbes, c'est-à-dire dont les diametres sont d'autant plus grands, que les méridiens se rapprochent du centre de la projection, comme on le voit figure 133 ; pour reconnoître la valeur de leurs

diametres, soit la longitude BH ou DI d'un méridien qui passe par les points H et I diamétralement opposés ; la projection du demi-cercle HRI sera la ligne droite SP = SC + CP ; SC est la tangente de la moitié de HF (= BF — BH), qui fait la moitié du quart-de-cercle BF moins la moitié de la longitude BH ; CP est la tangente de la moitié de l'arc FI, supplément de FH ou de 45° plus la demi-longitude ; donc SP = tang. $\frac{1}{2}$FH + cotang. $\frac{1}{2}$FH = $\frac{2}{\text{sin. FH}}$ (3823) ; donc le rayon ou $\frac{1}{2}$SP = cosec. FH (3806) = séc. BH ; d'où suit cette regle générale : *Le rayon d'un méridien dans la projection stéréographique équatoriale des mappemondes est la sécante de la longitude*. Et en général la projection d'un grand cercle a pour rayon la sécante de son inclin. sur le plan de projection (M. Cagnoli, p. 472). Pour trouver le centre, on porte de C vers D la tang. de la longitude.

4065. La projection d'un parallele à l'équateur devant être un cercle (4063), il faut en déterminer le diametre. Soit IR le diametre du parallele, QF celui de l'équateur ; le point R aura sa projection en G, et CG est la tangente de la moitié de la latitude FR ou de l'angle FQR ; le point I a sa projection en P ; et CP est égale à la tangente de l'angle CQI mesuré par la moitié de FI, dont le supplément est la latitude QI ; ainsi PG = cot. $\frac{1}{2}$latit. — tang. $\frac{1}{2}$ latit. = 2 cotang. latit. (3824) ; donc le rayon de la projection d'un parallele est égal à la cotangente de sa distance à l'équateur.

4066. Dans la projection polaire des planispheres qui est faite sur le plan de l'équateur, l'œil étant supposé au pole, l'écliptique est inclinée de 23° $\frac{1}{2}$; ainsi elle a pour rayon la sécante de cette obliquité (4064). L'horizon d'un lieu quelconque, rapporté sur ces planispheres, étant aussi un cercle, on a coutume de l'y placer pour trouver le lever et le coucher des astres. Pour trouver le rayon de ce cercle, il suffit de considérer que son inclinaison sur le plan de projection est le complément de la latitude ; ainsi son rayon sera la cosécante de la latitude.

4067. Pour Paris le demi-diametre de l'horizon est de 132 $\frac{1}{2}$ en supposant le rayon de 100, ou de 397 $\frac{1}{2}$ en supposant le rayon de 300, comme fait Vaugondy dans la description de ses hémispheres : il a donné une table des rayons de l'horizon pour différentes latitudes, où il s'est glissé quelques fautes ; en voici une autre qui suppose le rayon de 10000 parties. Pour les pays situés sous l'équateur, le rayon est infini, parceque leur horizon est un méridien, et que, dans nos planispheres, tous les méridiens sont des lignes droi-

Latit.	Rayons ou Coséc. latit.
0	infini.
10	57588
20	29238
30	20000
40	15557
50	13054
60	11547
90	10000

tes qui se coupent au pole. Pour faire usage de ces horizons dont je calcule ici les rayons, il faut former en carton celui dont on a besoin, et mettre son centre au point du méridien qui marque la latitude du lieu sur le planisphere.

4068. Dans les projections équatoriales des mappemondes ordinaires, où l'œil est supposé dans l'équateur, le rayon de l'horizon est la sécante de son inclinaison et cosin. inclin. = sin. long. × cos. latit. (M. Cagnoli, pag. 461). Il donne aussi, d'après M. de Lambre, une méthode pour tracer les cercles d'illumination (2106) : j'y ajouterai une formule de M. de Lambre pour les petits cercles. Si l'on appelle I l'inclinaison d'un grand cercle sur le plan de projection, et L la distance d'un de ses paralleles, le diametre de ce petit cercle sera tang. $\left(45^\circ - \frac{I+L}{2}\right) +$ tang. $\left(45^\circ + \frac{I-L}{2}\right)$; on changera le signe de L si le parallele est plus près de l'œil que le grand cercle auquel il appartient.

4069. La Hire proposa une autre projection où les divisions sont moins inégales, l'œil étant supposé à $\frac{7}{20}$ du diametre ou à une distance du plan de projection égale au sinus de 45° (*Histoire de l'acad.* 1701).

4070. Les cartes réduites, c'est-à-dire les cartes marines de Mercator ou de Wright, sont les plus utiles qu'il y ait, à cause de leur usage pour la navigation ; on peut en regarder l'invention comme une des découvertes importantes du quinzieme siecle. Gérard Mercator publia vers l'an 1569 une carte où les degrés de latitude alloient en augmentant vers les poles; mais il n'en expliqua point les principes ; ce fut Edward Wright, Anglois, qui, vers l'an 1590, découvrit les vrais principes sur lesquels ces cartes devoient être construites : il en fit part à Jodocus Hondius, graveur, qui s'en attribua l'invention ; mais elle fut revendiquée en 1599 par Wright, dans son livre intitulé *Certain errors in navigation detected and corrected*, où il rend justice d'ailleurs à Mercator : mais on peut regarder Wright comme le véritable auteur de cette découverte.

4071. Dans ces cartes réduites, les degrés de longitude sont supposés tous égaux ; mais pour que les degrés de latitude soient dans un juste rapport aux degrés de longitude, on les augmente en raison inverse des cosinus ou en raison directe des sécantes des latitudes; en sorte qu'à 60° de latitude où les degrés des paralleles devroient être la moitié seulement de ceux de l'équateur, les degrés de latitude sont doublés, et les degrés des paralleles restent les mêmes. Par ce moyen les rumbs de vent sont représentés sur ces cartes par des lignes droi-

tes; car les méridiens étant paralleles, ils sont tous coupés sous le même angle, ce qui est commode pour les opérations du pilotage.

On objecte aux cartes réduites, que les pays y paroissent plus larges qu'ils ne sont sur le globe, dès qu'on s'éloigne de l'équateur; mais les situations respectives qu'ils ont entre eux ne s'y retrouvent pas moins, pourvu qu'on ait égard à l'échelle de la carte qui augmente à mesure qu'on approche des poles.

4072. Pour faciliter la construction de ces cartes, on a calculé des tables des latitudes croissantes, en anglois, *Tables of meridional parts*, que l'on peut voir dans les traités de navigation; par exemple, celui de Bouguer et la Caille (1760 et 1789), et celui de Robertson, en anglois. Cette table suppose que les degrés de longitude soient par-tout de 60′ de l'équateur, et l'on y trouve pour chaque degré de latitude la longueur du méridien comptée depuis l'équateur, en supposant que tous ses degrés ont augmenté comme les sécantes des latitudes : par exemple, pour 60° on trouve 4527; c'est la longueur en minutes de la ligne droite qui représente les 60 premiers degrés du méridien, en supposant que le premier degré soit de 60 minutes, le dernier étant de 120. Ainsi chaque nombre de la table des latitudes croissantes n'est que la somme des sécantes, en supposant 60 pour le sinus total; c'est aussi le chemin qu'auroit fait en longitude un vaisseau naviguant sur la ligne de 45° : pour les autres angles la longitude est comme la tangente du rumb [a].

4073. Au lieu de faire la somme des sécantes, on emploie une regle fort élégante que Henri Bond avoit déja apperçue comme par hasard en 1650 (Norwood, *Epit. de nav.*), savoir que les logarithmes des tangentes des demi-complémens des latitudes forment l'échelle des arcs du méridien ou la table des latitudes croissantes. Gregorie la démontra en 1668 (*Exercitationes geometricae*); Barrow, Wallis et Halley en donnerent d'autres démonstrations (*Philos. Trans.* 1696, n°. 219); M. le Monnier, *Abrégé du pilotage*, 1766, pag. 174. Robertson en a donné une nouvelle en 1750, *Philos. Trans.*, n°. 496; mais en voici une plus simple, pour laquelle il suffira de se rappeller les principes suivans.

1°. Lorsque les différences ou les accroissemens d'une suite de quantités sont dans le même rapport que les quantités elles-mêmes, c'est une preuve qu'elles croissent en progression géométrique, et que leurs logarithmes croissent uniformément.

[a] Les Anglois appellent *traverse table* celle où l'on met pour chaque rumb et pour chaque distance parcourue le chemin en latitude : ils appellent le chemin en longitude *departure*.

2°. Quand on a deux suites de quantités qui croissent uniformément ou en progression arithmétique, il suffit d'avoir la premiere différence de chaque suite pour avoir toutes les autres.

3°. Quand on veut faire route vers le nord-est, ou à 45° de la méridienne, en coupant tous les méridiens sous un angle de 45°, on est obligé de suivre une courbe appellée *loxodromie* [a] de 45°; et si l'on avance uniformément en longitude, les accroissemens des latitudes iront toujours en diminuant, à proportion que les degrés des paralleles diminueront; de même que si l'on avançoit également en latitude, on auroit des différences de longitudes qui iroient en croissant, parcequ'un égal progrès sur les paralleles donne une plus grande augmentation de longitude sur l'équateur quand le parallele est plus petit (4072).

4074. *Les parties du méridien dans les cartes réduites sont exprimées par les différences des logar. des tang. des demi-complémens des latitudes.* Soit P le pole (*planc.* XLIV, FIG. 335), FI un petit changement de latitude qui répond à 1° de changement en longitude sur l'équateur; FI est égal à la longueur du degré du parallele correspondant, parceque sous le rumb de 45° on fait autant de chemin vers l'orient que vers le nord. Ayant tiré la ligne AI de l'extrémité du diametre, on aura FO = FI; car dans le triangle FOI, les angles I et O sont égaux étant mesurés l'un par la moitié de l'arc IA, l'autre par la moitié d'un arc égal à AF dans le demi-cercle opposé. Puisque FI et FO sont égales au degré du parallele, ce degré FO est à son rayon FG comme un degré de l'équateur est au rayon de la sphere, c'est-à-dire en raison constante; mais FO : FG :: MR : MC; donc MR est à MC aussi en raison constante; la ligne MC est la tangente de l'angle CAM ou de la moitié de l'arc PF, c'est-à-dire du demi-complément de la latitude; donc l'accroissement RM de la tangente étant à cette même tangente en raison constante, les tangentes sont en progression géométrique; donc les logarithmes des tangentes des demi-complémens des latitudes croîtront uniformément, aussi bien que les différences de longitude le long de l'équateur, que nous avons supposées uniformes; dont la différence des logarithmes fera trouver en tout temps celle des longitudes.

En allant de 0° à 1° de latitude, on a les demi-complémens des latitudes 45° et 44° 30′, dont les logarithmes tangentes different de

[a] Λοξος *oblique*, δρομος *course*; c'est une route oblique à la méridienne, mais qui est par-tout de la même obliquité, et forme une espece de spirale autour du pole.

7580, ce qui fait 126 pour chaque minute de longitude; ainsi l'on pourra dans tous les cas prendre la 126[e] partie de la différence des logarithmes des tangentes des demi-complémens des latitudes pour avoir le nombre de minutes dont on aura avancé en longitude sur l'équateur, en suivant la loxodromie de 45°.

Mais ces progrès en longitude, qui vont en augmentant quand on avance uniformément en latitude, sont dans le même rapport que les augmentations des degrés de latitude dans les cartes réduites ; car c'est la même chose d'augmenter les longitudes en supposant les latitudes uniformes, ou d'augmenter les latitudes si les longitudes croissent également ; donc les parties du méridien dans ces cartes sont exprimées par les différences des logarith. tang. des demi-complémens des latitudes.

4075. Les méthodes particulieres employées par les géographes dans les cartes ordinaires sont fort différentes entre elles, mais toutes ont le défaut de représenter mal les distances respectives des lieux, et la plupart ont encore celui de ne pas avoir les méridiens perpendiculaires aux paralleles de latitude ; en sorte qu'un espace de la Terre qui est un quadrilatere rectangle, y est souvent représenté par un rhomboïde obliquangle, dont les diagonales sont fort éloignées de l'égalité : les distances des lieux sont ordinairement plus grandes sur les bords que sur le globe, quoique ses paralleles aient la même longueur, parceque les arcs des méridiens s'inclinent et donnent des distances plus longues. On ne laisse pas de mettre souvent des échelles fixes pour les distances, et cela cause des erreurs.

4076. Il y a des cartes où l'on a évité ce dernier inconvénient en représentant les méridiens par des lignes droites; telles sont les cartes de Schenk à Amsterdam; celle de Mayer intitulée *Germania Critica;* plusieurs cartes de Senex, de Buache, de Robert de Vaugondy, etc. Dans ces cartes les méridiens convergent vers un point, duquel comme centre l'on décrit les paralleles à l'équateur à des intervalles égaux ; on trouve une regle pour tracer ces cartes dans la préface du petit Atlas de Berlin : ainsi c'est moins une projection que le développement d'un cône que l'on suppose être circonscrit à la sphere et la toucher sur le parallele moyen qui occupe le milieu de la carte ; sa surface est toujours un peu plus grande que celle de la sphere ; mais elle en approche le plus qu'il est possible.

4077. Pour avoir le cône où la figure des pays soit plus approchante de la figure du globe sur une étendue considerable, comme de 30 ou 40°, M. Bonne a employé la méthode suivante dans sa carte de l'empire de Russie, etc. (à Paris, chez Lattré). Les paralleles à

l'équateur y sont représentés par des cercles concentriques dont le centre est au point où la tangente moyenne rencontre l'axe de la Terre; le parallele de 50° de latitude est représenté par un cercle dont le rayon est la cotangente de 50°, et ainsi des autres, qui sont tous décrits du même centre et à des distances égales.

4078. Il s'agit sur-tout de savoir quel arc il faut prendre sur ce cercle de la carte pour exprimer un degré du parallele terrestre qu'il représente : on le trouve en multipliant un degré ou 60′ par le sinus de la latitude. En effet soit P le pole de la Terre (FIG. 336), D le point qui est situé à 50° de latitude, en sorte que BD soit le cosinus de 50°, et TD la cotangente; le parallele dont BD est le rayon est plus petit que le cercle dont le rayon est TD, dans le même rapport que BD est plus petit que TD; ainsi un degré du parallele occupera sur le cercle de la carte, dont TD est le rayon, un arc égal à $60' \cdot \frac{BD}{TD} = \frac{60' \text{ cos. latit.}}{\text{cotang. latit.}} = 60' \text{sin. lat.}$, ce qui revient à 46′ pour 50° de latitude; c'est aussi la quantité dont deux méridiens sont inclinés l'un par rapport à l'autre.

4079. Ainsi l'on voit que 46′ du cercle dont TD est le rayon, et qui doit représenter sur la carte le parallele de 50°, font la valeur d'un degré de longitude; par conséquent 5° de longitude font 3° 50′ du cercle de la carte, etc. Pour décrire ce cercle sans en avoir le centre, on prendra 5° du méridien pour sinus total, on les multipliera par le cosinus de 50°, et l'on aura 3° 13′ pour la valeur de 5° sur le parallele de 50°; ainsi l'on prendra 3° 13′ du méridien pour faire 5° du parallele; on les portera sur une ligne droite perpendiculaire au méridien; l'on divisera cet espace en 67 parties (c'est la tangente de 3° 50′); on en prendra $2\frac{1}{4}$ au-dessus (c'est l'excès de la sécante de 3° 50′ sur le rayon), l'on aura un des points du parallele de 50° : on portera sur la même perpendiculaire au méridien 6° 26′ du méridien pour faire 10° du parallele; on divisera cet espace en $134\frac{2}{3}$ (c'est la tangente de 7° 40′, valeur des 10° de longitude); on prendra 9 de ces parties au-dessus de la perpendiculaire, et l'on aura un nouveau point du parallele. De même pour 15°, on portera 9° 39′ du méridien; la tangente de 11° 30′ qui font 15° étant $303\frac{1}{2}$, et la partie extérieure de la sécante $= 20\frac{1}{2}$, l'on cherchera un quatrieme point, et ainsi des autres. Quand on a ainsi plusieurs points d'un cercle, on peut le décrire sans en avoir le centre, en prenant une regle flexible et courbe, montée sur une regle droite, et dont on peut augmenter la convexité par le moyen d'une vis jusqu'à ce qu'elle s'applique sur tous les points marqués. Si la carte est assez

petite pour qu'on veuille supposer les méridiens rectilignes, il ne s'agit que de les tirer tous vers le même centre par les divisions des paralleles ; mais pour avoir sur toute l'étendue de la carte une même échelle, on préfere de prendre sur les autres paralleles des intervalles qui diminuent comme les cosinus des latitudes ; et l'on a ainsi sur ces paralleles divers points par lesquels on fait passer les méridiens avec la regle courbe et élastique.

4080. Mudorch a donné une méthode pour calculer ce développement du cône de maniere que la surface conique soit égale à la surface de la zone sphérique représentée sur la carte ; il faut pour cela que le cône, au lieu de toucher la sphere, la coupe dans son intérieur (*Philos. Trans.* 1758). M. de la Grange a donné un mémoire analytique sur les projections des cartes (*Mém. de Berlin* 1779).

4081. Flamsteed a représenté dans son Atlas céleste (722) les paralleles à l'équateur par des lignes droites et paralleles entre elles [a], dont les degrés sont (aussi bien que dans la sphere) proportionels aux sinus des distances au pole; les méridiens y prennent la forme de la courbe des sinus, dont Wallis parla autrefois dans son Traité de la Cycloïde ; les cercles de latitudes et les paralleles à l'écliptique y prennent en certains endroits des figures assez bizarres ; mais on les tire facilement par le moyen des degrés d'ascension droite et de déclinaison qui répondent à chaque degré de longitude et de latitude. Si l'on imagine le globe couvert de fils pliés sur les paralleles à l'équateur, qu'on y trace les constellations et qu'on développe les fils sur un plan, l'on aura une idée de cette espece de projection (*Hist. caelest. proleg.*, pag. 159). Il y a des cartes géographiques où l'on s'en est servi.

4082. Pour former les globes célestes et terrestres (158), on est obligé de faire graver des *fuseaux* (FIG. 337, 338), qui sont aussi une espece de projection, ou un développement du globe, semblable à celui que nous venons d'expliquer. La longueur P C de l'axe de cette courbe est égale au quart de la circonference du globe; les intervalles des paralleles sur l'axe P C sont tous égaux ; les rayons des cercles K D I, qui représentent les paralleles, sont égaux aux cotangentes des latitudes (4077) ; et les arcs de chacun, comme K I, sont égaux à-peu-près au nombre de degrés de la largeur du fuseau (qui est ordinairement de 30°), multipliés par le sinus de la latitude : ainsi l'on ne trouveroit aucune difficulté à les tracer ; mais

[a] Dans l'Uranométrie de Bayer et dans l'Uranographie britannique (725), ce sont les paralleles à l'écliptique qui sont exprimés par des lignes droites, paralleles entre elles.

l'embarras

l'embarras vient du changement qu'éprouvent les parties des fuseaux quand on les colle sur le globe; pour les ajuster à l'espace qu'elles doivent couvrir, il faut faire prêter le papier moins sur les côtés qu'au milieu, parceque les côtés sont plus longs.

4083. La méthode usitée parmi les ouvriers pour tracer les fuseaux a été décrite par Bion (*Usage des globes*, L. III), et par Robert de Vaugondy, au septieme tome de l'Encyclopédie; elle est suffisante dans la pratique. On tire sur le papier une ligne AC égale à la corde de 15°, pour faire la demi-largeur du fuseau, et une perpendiculaire CP égale à trois fois la corde de 30°, pour faire la demi-longueur; car ces papiers, dont les dimensions sont égales aux cordes, deviennent égaux aux arcs mêmes, lorsqu'on les colle sur le globe.

On divise la hauteur CP en 9 parties, si l'on veut tirer les paralleles de 10 en 10°; on divise aussi le quart-de-cercle BE en 9 parties; par chaque point G, et par le point correspondant D de la ligne droite CP, l'on tire des perpendiculaires HGF et DF, dont la rencontre en F donne un des points de la courbe BFP qui termine la circonférence du fuseau. Quand on a trouvé ainsi un assez grand nombre de points, on trace le contour PIB avec une regle courbe. Par cette construction l'on donne au fuseau des largeurs qui sont comme sur le globe en raison des cosinus des latitudes; on suppose ces largeurs prises perpendiculairement à CD, ce qui n'est pas bien exact; mais il est impossible de prescrire une opération rigoureuse pour faire un plan qui puisse couvrir une surface courbe, et qui sur une ligne droite AB fasse des lignes PA, PC, PB, égales entre elles, comme elles doivent l'être sur le globe. Pour décrire le cercle KDI qui est à 30° de l'équateur, il faut prendre au-dessus de D un point qui en soit éloigné de la valeur de la tangente de 60° prise ou dans les tables, ou sur un cercle égal à la circonférence du globe qu'on veut tracer; ce point servira de centre pour le parallele DI qui doit passer au point D; car on le suppose égal à celui du cône circonscrit au globe, et qui le toucheroit au point D.

4084. Les méridiens se tracent de 10 en 10°, en divisant chaque parallele, comme KI, en 3 parties égales aux points L et M, et tirant depuis le pole P par tous ces points de division des courbes qui représentent les méridiens intermédiaires entre PA et PB, comme BR et ST (FIG. 338).

L'écliptique AQ se trace par le moyen de la déclinaison connue des différens points de l'équateur, que l'on prend dans une table: pour 10°, elle est 3° 58′; pour 20°, 7° 50′, = BQ; pour 30°, 11° 29′, etc.

4085. En général on observe que le papier sur lequel on fait les

cartes, tel que *le colombier*, se raccourcit de $\frac{1}{72}$, ou d'une ligne sur six pouces, l'un portant l'autre, quand il est séché après l'impression (*Voyez* art. 2092); ainsi il faut encore prévenir cet inconvénient dans la gravure des fuseaux : si malgré cela les fuseaux se trouvent trop courts, on en est quitte pour ôter sur le tour un peu du blanc dont le globe est enduit; on le rend par là de la grandeur convenable aux fuseaux que l'on a fait imprimer. Mais en tirant le fuseau mouillé de colle pour l'appliquer sur le globe, l'axe GH s'alonge, et le côté AK se raccourcit, en sorte que ni la longueur du côté ACK, ni celle de l'axe GEH du fuseau ne sont précisément égales à un quart d'une circonférence de globe, quand on les considere sur le cuivre ou sur les nombres cotés dans la figure 338.

4086. M. Bonne, ayant fait diverses expériences sur les dimensions que prennent des fuseaux après qu'on y a mis la colle pour les appliquer sur le globe, sur-tout avec le papier du *nom de Jésus* qu'on a employé dans les globes d'un pied de diametre, a trouvé qu'il falloit donner aux fuseaux sur le cuivre les dimensions de la figure 338. En supposant que le rayon du globe contienne 720 parties, la demi-largeur du fuseau est AG = 188 $\frac{5}{10}$; la distance AC, pour le parallele de 10°, prise sur la ligne droite LM, est de 128,1; le petit écart du parallele de 10° dans le milieu du fuseau, où la fleche ED est de 4; la ligne ABN est droite; le rayon du parallele de 10° ou du cercle CEF est de 4083, etc. La premiere calotte circulaire qui se place au-dessous de H a pour rayon 253, au lieu de 247 qu'elle auroit si le sinus de 20° devoit en être le rayon.

4087. Je rapporterai à cette occasion les expériences faites par M. Méchain, à l'occasion des cartes du dépôt de la marine, sur la diminution du papier *grand-aigle* de France, après l'impression; il l'a mesurée sur plus de cinquante feuilles.

La planche de cuivre, sur la longueur de l'enverjure, est à la longueur du papier imprimé, comme 101723 est à 100000, ou comme 59 est à 58, à-peu-près. (ou hauteur)

La planche de cuivre sur la largeur est au papier imprimé, comme 101215 est à 100000, ou comme 83 est à 82.

D'où il suit que la diminution du papier sur la longueur est à sa diminution sur la largeur comme 199 est à 200 : ainsi, dans les plans, il faudroit graver l'échelle horizontalement et verticalement, au lieu qu'on se contente toujours d'une seule.

4088. LE PREMIER MÉRIDIEN des globes terrestres et des cartes géographiques varie beaucoup suivant les pays; j'ai déja parlé de cette diversité (48), on en trouvera les détails dans Riccioli (*Géog.*

réform., pag. 385). Pythéas de Marseille, au rapport de Strabon (L. I), regardant l'Isle de Thulé (131) comme la partie la plus occidentale qui fût connue, y plaçoit le commencement des longitudes; Eratosthene commençoit aux Colonnes d'Hercule ou au détroit de Gibraltar; Marin de Tyr et Ptolemée, les plus célebres des géographes anciens, placerent le premier méridien aux Isles Fortunées, appellées aujourd'hui les *Canaries ;* mais ils ne déterminerent point laquelle de ces isles étoit la plus occidentale et devoit servir de terme de numération. Parmi les Arabes, Alfragan, Albategnius, Nassir-Eddin et Ulug-Beg, compterent aussi des Isles Fortunées; mais Abulfeda, géographe célebre, comptoit ses longitudes d'un méridien plus oriental de 10° que celui de Ptolemée, et l'on croit que c'etoit pour le faire passer à l'extrémité occidentale d'Afrique, où étoient selon lui les Colonnes d'Hercule, ou à Cadix, devenue fameuse par la conquête des Maures en Espagne : voilà pourquoi les longitudes dans Abulfeda sont plus petites de 10° que dans les autres géographes arabes qui ont suivi Ptolemée (*V. Greaves in Hudson geog. min.*, pag. 8).

Lorsque les Açores eurent été découvertes par les Portugais en 1448, il y eut des auteurs qui compterent les longitudes de l'Isle de Tercere. Les cartes de Gerard Mercator, mort en 1594, qui forment le grand Atlas publié en 1628 par Hondius, donnent 3° de longitude à l'Isle de Fer; Jodocus Hondius, mort en 1611, lui en donne 12 dans sa carte d'Afrique insérée au même Atlas.

On trouve des cartes géographiques, même celle de Toscane, publiée à la calcographie de Rome en 1745, où les longitudes sont plus grandes de 5° $\frac{1}{3}$ que celles que l'on compte de l'Isle de Fer prise à 20° de Paris : mais dans Riccioli et dans la plupart des cartes des derniers siecles, on voit la longitude de Rome de 36° en partant de l'Isle de Fer, au lieu de 30 que nous comptons actuellement, parcequ'on se trompoit sur la position des Isles Canaries.

Guillaume Jansson Blacw, dans ses 4 parties du monde, publiées en 1624, et Jean Blacw son fils, dans son nouvel Atlas, placerent le premier méridien au Pic de Ténériffe, montagne très élevée que les navigateurs apperçoivent de loin, et qui sembloit être un point de départ fixé par la nature même. Les Hollandois s'en servent encore; mais ils comptent 2° 3′ de moins que nous en allant vers l'est, quoique le Pic soit 19° 0′ à l'occident de Paris. Jansson, dans ses hémispheres plans, Ortélius, dans sa carte universelle, Gerard Mercator le jeune, Bercius, dans son Europe abrégée, le mirent à l'Isle de Fuego ou Saint-Philippe, l'une des Isles du Cap-Verd, sur ce qu'ils

étoient persuadés qu'en cet endroit l'aiguille aimantée n'avoit aucune déclinaison ; cette isle est de 25° 52′ à l'occident de Paris.

4089. Les François comptent 20° en nombres ronds pour la longitude de Paris (49). De l'Isle, d'Anville, Buache, et M. Bonne ont suivi cette méthode : Beccaria se sert du Bourg de l'Isle de Fer (*Gradus Taurinensis*, pag. 160), ce qui fait 6′ de moins.

Le P. Boscovich compte de Rome, en supposant 30° à Rome, ce qui fait 3′ de moins que si l'on partoit du Bourg de l'Isle de Fer (*De litter. expedit.* 1755, pag. 187).

4090. Dans les cartes marines, publiées au dépôt de la marine à Paris, et qui forment le grand recueil du *Neptune françois* et celui de l'*Hydrographie françoise* par Bellin, et dans celles que M. le marquis de Chabert et M. Méchain y ont ajoutées [a], on compte les longitudes du méridien de Paris, en les distinguant par orientales et occidentales : les Anglois font la même chose par rapport au méridien de Londres, et quelquefois par rapport au méridien du Cap-Lézard, qui est de $0^h\ 29'\ 52''$, ou de 7° 32′ à l'occident de Paris, et à 49° 57′ de latitude. On réunit quelquefois ces différentes échelles, de même que celle du Pic de Ténériffe, pour se rendre utile aux différentes nations, en attendant une convention générale qu'il est difficile d'espérer.

DE LA GNOMONIQUE.

4091. LA GNOMONIQUE ou la science des cadrans solaires se réduit à la trigonométrie ou aux projections des cercles de la sphere. Il nous sera donc facile d'en renfermer toute la théorie en peu de mots, pour terminer les applications que nous avions à faire de l'astronomie.

Un cadran solaire est un plan sur lequel on a marqué les différentes sections des cercles horaires (93) qui passent par un point quelconque pris pour index, ou par une ligne parallele à l'axe du monde, prise pour style; car, dans toute sorte de cadrans, le style doit être di-

[a] Elles se trouvent chez Dézauche, rue des Noyers, ainsi que les cartes de Guillaume de l'Isle et de Buache. Parmi les meilleures cartes de géographie, on doit aussi citer les quatre parties du monde de d'Anville, les cartes de M. Bonne, à Paris chez Lattré. On peut trouver, chez les héritiers de Julien, à l'hôtel de Soubise, les cartes étrangeres les mieux choisies. Dans d'autres pays on cite principalement les héritiers de Homann à Nuremberg, Gosse à la Haye, André Dury à Londres.

rigé vers le pole du monde par où les cercles horaires passent tous sans exception.

Le cas le plus simple de la gnomonique est celui du cadran équinoxial ; c'est un cercle placé sur une ligne perpendiculaire à la méridienne, son inclinaison sur la méridienne étant égale à la hauteur de l'équateur ; le style est placé au centre du cercle, perpendiculairement au plan du cadran ou parallèlement à l'axe du monde ; il suffit que le cercle soit divisé en 24 parties égales par 24 rayons qui seront les 24 lignes horaires.

4092. Après le cadran équinoxial, le cas le plus simple de la gnomonique est celui d'un cadran horizontal, dont le style est incliné sur la méridienne d'une quantité égale à la hauteur du pole ; ce style part d'un point qu'on appelle aussi le centre du cadran : si l'on imagine un cercle perpendiculaire au style en un point quelconque de sa longueur, ce cercle sera parallele à l'équateur et formera un cadran équinoxial (4091) ; si l'on prolonge les rayons de ce cercle divisé en heures ou ses lignes horaires, elles iront rencontrer le plan horizontal en des points où aboutiront les lignes horaires tirées par le centre du cadran.

De cette simple considération il est facile de conclure que, dans un cadran horizontal, la *tangente de l'angle* de chaque ligne avec la méridienne est égale à la *tangente de l'angle horaire* multipliée par le *sinus de la latitude.* On prend le cosinus de la latitude, s'il s'agit d'un cadran vertical dirigé de l'orient à l'occident ou exposé en plein midi.

4093. On peut aussi tracer graphiquement les lignes horaires d'un cadran horizontal par le moyen d'un globe ; il ne faut que voir les points où l'horizon est coupé par les cercles horaires de 15°, 30°, 45°, etc. ; les distances de ces points au méridien marquent les angles des lignes horaires avec la ligne méridienne. En effet tous les cercles horaires se coupent dans l'axe du globe comme dans le style d'un cadran horizontal ; ils sont interceptés par l'horizon du globe comme par le plan horizontal du cadran ; leurs communes sections se rencontrent au centre du globe comme au centre du cadran ; ainsi les angles que forment les communes sections sont mesurés par la circonférence de l'horizon du globe, comme elles le seroient par un cercle décrit du centre du cadran sur le plan du même cadran : les points de l'horizon où passent ces cercles horaires sont les extrémités des sections de ces cercles sur l'horizon ; donc les distances de ces points à celui du midi expriment les angles de ces sections avec celles du méridien sur l'horizon.

4094. L'on peut avoir les angles horaires d'un cadran vertical par la même méthode, pourvu qu'on connoisse la déclinaison du plan par le moyen d'une méridienne (147) : on placera le vertical mobile du globe de la même maniere que le plan donné, c'est-à-dire qu'on l'éloignera du méridien autant que le plan en est éloigné, et l'on examinera les points où ce vertical est coupé par les cercles horaires du globe de 15 en 15 degrés : les distances de ces points au zénit du globe seront les angles des lignes horaires avec la méridienne. En effet les lignes horaires sont les intersections des plans des cercles horaires avec le plan où l'on décrit le cadran, et la ligne du zénit est l'intersection du méridien avec ce plan ; donc les distances entre le zénit et les points du vertical où les cercles horaires passent, sont les angles des lignes horaires avec la méridienne.

4095. On peut tracer un cadran sur un plan quelconque par le moyen d'un cadran équinoxial ou d'un cadran horizontal déja fait : il ne s'agit que de tracer une méridienne horizontale (19, 148), d'élever un style qui se dirige vers le pole, et qui rencontrera le plan au centre du cadran ; de placer sur ce style un cadran équinoxial, ou bien un cadran horizontal, dont le style fasse avec l'autre une seule et même ligne : on prolongera les lignes horaires de ce cadran jusques à la rencontre du plan donné ; elles marqueront les points où chaque ligne horaire doit être tirée en partant du centre du cadran. Si l'on ne peut avoir de centre, on y supplée en donnant au cadran équinoxial deux positions différentes pour avoir deux points de chaque ligne horaire sur le plan.

4096. On peut calculer par la trigonométrie sphérique les angles des lignes horaires d'un cadran quelconque, pourvu qu'on connoisse l'*inclinaison* et la *déclinaison* du cadran, c'est-à-dire l'angle que son plan fait avec le plan de l'horizon, et l'angle compris entre la méridienne et la section commune de l'horizon et du cadran : mais je supposerai, en premier lieu, que le plan passe par le zénit, puisqu'on se sert rarement des plans inclinés.

Soit IAZPC (FIG. 339) le méridien, Z le zénit, ZXL le cercle vertical dans lequel est le plan du cadran vertical déclinant ; on connoît la déclinaison, qui est égale à l'angle PZX, avec la distance du pole au zénit PZ. Dans le triangle ZPX rectangle en X, on cherche la perpendiculaire PX (3898), qui mesure l'angle de l'axe avec la *soustylaire*, c'est-à-dire avec la ligne marquée par les perpendiculaires que l'on conçoit tirées de chaque point du style sur le plan du cadran. On cherche aussi le côté ZX (3899), qui mesure l'angle de la soustylaire avec la ligne verticale ou méridienne, enfin l'angle ZPX

(3897). Si PH est un cercle horaire quelconque, par exemple, celui d'une heure qui fait un angle ZPH de 15° avec le méridien, la différence des angles ZPH, ZPX, donnera l'angle HPX; avec cet angle et le côté PX, qui est égal à l'angle du style et de la soustylaire, on trouvera (3892) l'arc HX qui mesure l'angle de la soustylaire avec la ligne horaire cherchée.

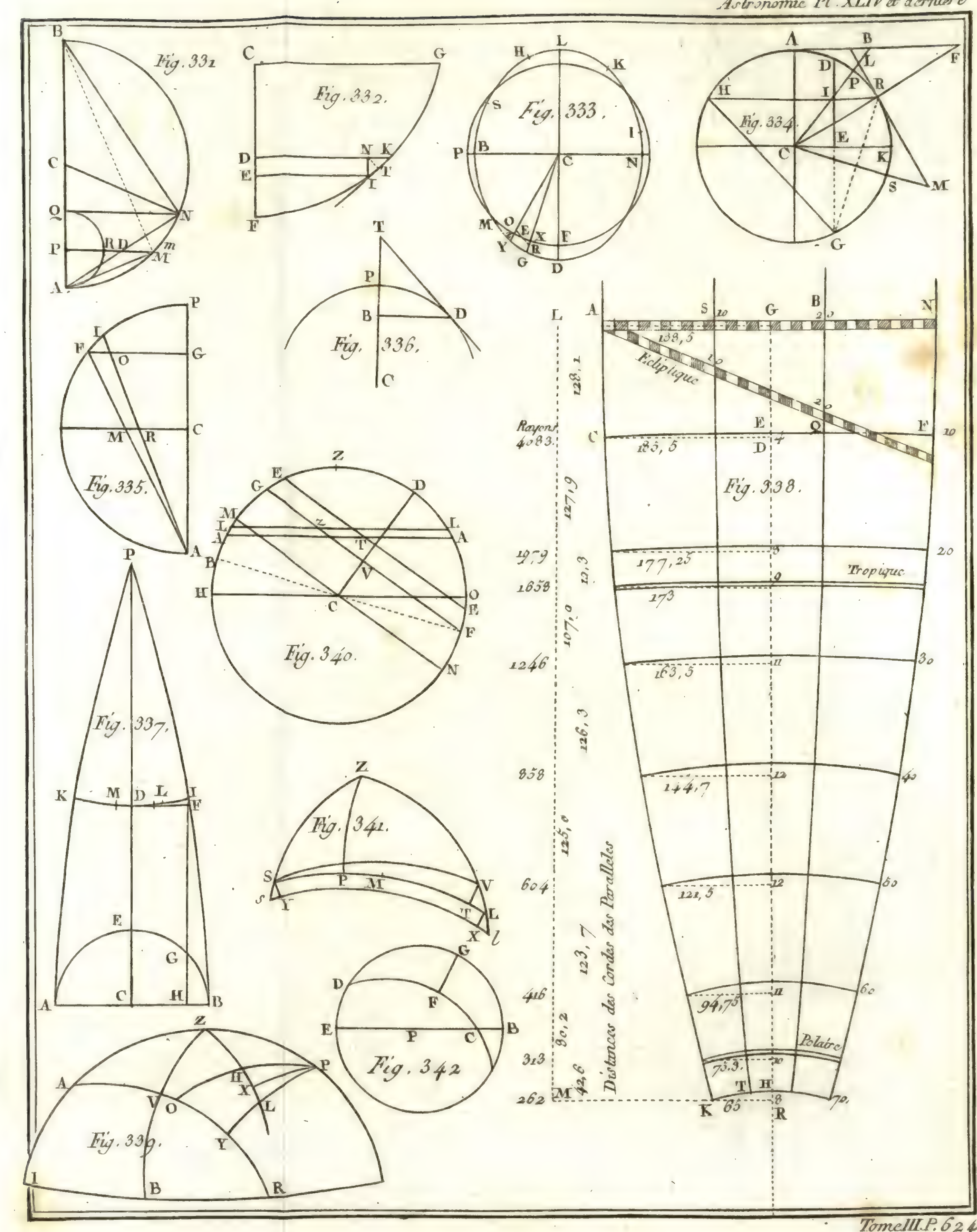
4097. Si l'on a un plan tel que AYR qui ne passe point par le zénit, on connoîtra du moins son inclinaison sur l'horizon, dont le complément est égal à l'arc perpendiculaire ZV, et sa déclinaison ou l'angle que fait l'horizontale du plan avec la méridienne horizontale; le complément de cette déclinaison est l'angle AZV, parceque le vertical ZVB passe à 90° du point R; donc IB est le complément de RC, qui est la mesure de l'angle formé au centre par la méridienne et par la section du plan donné avec l'horizon. L'on cherchera donc AZ et l'angle A. Dans le triangle APY rectangle en Y, connoissant AP et l'angle A, on trouvera AY qui est l'angle formé dans le plan par la soustylaire et la méridienne du cadran, de même que l'angle APY et l'arc PY. Ayant tiré un cercle horaire PHO, par exemple, celui d'une heure ou de 15°, l'on aura le triangle POY, où l'on connoîtra l'angle OPY et le côté PY; on trouvera (3892) OY, angle de la soustylaire avec la ligne d'une heure, dont le cercle PO et l'angle ZPO marquent la distance au méridien. Le style est toujours supposé parallele à l'axe du monde, faisant avec la soustylaire un angle égal à l'arc PY.

Si l'on veut rapporter la méridienne à l'horizontale du plan, il faut résoudre le triangle ARI rectangle en I, dans lequel on connoît IR et l'angle R, et l'on cherchera le côté AR.

4098. Pour connoître la déclinaison d'un plan, on peut tracer une méridienne horizontale vers le pied (148) et mesurer l'angle qu'elle fait avec la ligne horizontale du plan. De même sur un cadran vertical, le pied du style (ou le point auquel répond la perpendiculaire abaissée de l'extrémité du style sur le plan), étant pris pour centre, l'arc des ombres égales sur le plan, étant divisé en deux parties égales, donnera la position de la soustylaire; car quand le Soleil passe dans le plan du cercle horaire PX perpendiculaire au plan du cadran, l'ombre du style droit est la plus courte qu'il soit possible ce jour-là, et à distances égales du Soleil au cercle PX les ombres sont égales. Quand on aura la soustylaire, l'angle qu'elle formera avec la verticale sera l'arc ZX; connoissant PZ et ZX, on trouvera l'angle Z, qui est la déclinaison du plan. On trouve aussi la déclinaison d'un plan vertical par la méthode de M. de Parcieux, en traçant par le pied du style une verticale et une horizontale.

4099. Les principes que nous venons de donner suffisent pour entendre et même pour tracer toutes sortes de cadrans ; mais le détail des pratiques convenables à chaque cas et des moyens d'exécution ont fait la matiere de beaucoup de traités de gnomonique donnés par de Parcieux, dom Bedos, et remontant aux plus anciens, par Rivard, Blaise, Bion, Ozanam, la Hire, S[te] Madeleine, Clavius, Kircher, de Challes, Henrion, Voell, Oronce Finé, Munster, Schoner, etc. ; j'ai donné aussi, en 1784, dans l'Encyclopédie méthodique, la description et la démonstration de la plupart des cadrans, spécialement du cadran analemmatique ou azimutal elliptique, et du cadran cylindrique tracé sur la colonne de la nouvelle Halle. Sur la gnomonique analytique on peut voir M. du Séjour (*Recherches sur la Gnomonique* 1761, et dans son Traité analytiq., T. 1. p. 705), M. Lambert dans son ouvrage allemand intitulé *Remarques pour étendre l'usage des mathématiques pratiques*, 1772, T. 3, et M. de Castillon, Mém. de Berlin 1784.

LIVRE


Fig. 331.
Fig. 332.
Fig. 333.
Fig. 334.
Fig. 335.
Fig. 336.
Fig. 337.
Fig. 338.
Fig. 339.
Fig. 340.
Fig. 341.
Fig. 342.
Ecliptique
Tropique
Polaire
Rayons
4083.
1979
1858
1246
858
604
416
313
262
128,1
127,9
12,3
107,0
126,3
125,0
123,7
80,2
42,6
Distances des Cordes des Parallèles
138,5
185,5
177,25
173
163,5
144,7
121,5
94,75
75,3
85

LIVRE VINGT-QUATRIEME.

DU CALCUL ASTRONOMIQUE

Par le moyen des observations, soit sur terre, soit sur mer.

L'OBSERVATION a été le fondement de cette astronomie, les tables en ont été le résultat; c'est pourquoi j'ai expliqué fort au long la maniere d'observer, et de construire les tables : mais il reste à expliquer d'une façon élémentaire les diverses opérations par lesquelles on passe de l'observation à la construction des tables. Si l'on joint à cela les explications que j'ai mises au bas de chaque table, on aura tout ce qui forme proprement le *calcul astronomique*. J'ai été obligé de le placer à la fin de cet ouvrage, parcequ'il y entre des choses qui ne se rapportent à aucun des traités précédens, et des notions qui supposent la lecture de ces mêmes traités.

4100. Nos logarithmes [a] ordinaires ne sont autre chose que la progression arithmétique des nombres naturels, 0, 1, 2, 3, etc. placés à côté de la progression géométrique décuple, 1, 10, 100, 1000, etc. Ainsi, dans nos tables ordinaires de logarithmes, le nombre 1 est véritablement le logarithme de 10 et le nombre 2 le logarithme de 100. Comme leur usage est expliqué à la tête de toutes les tables de logarithmes, je ne m'étendrai pas ici sur cette matiere; mais je donnerai l'histoire de nos tables de logarithmes, qui n'est pas détaillée dans les livres ordinaires.

4101. Neper, Napier ou Napeir (451), fut l'auteur de cette belle invention, et il publia à Edimbourg en 1614 une table de logarithmes [b] : *Henri Briggs*, professeur de géométrie à Oxford, lui proposa d'en changer la forme et d'en étendre les tables : il avoit déja calculé vers 1600 les sinus naturels des centiemes de degré, de même que

[a] Ἀριθμὸς, *numerus;* Λόγος, *sermo*, *ratio;* parcequ'ils indiquent les raisons des nombres.

[b] *An account of the life, writings and inventions of John Napier*, 1788, in-4°. *Vitæ quorumdam erud. virorum*, *Th. Smith*, *commentariolus de vita et scriptis Henrici Briggii*, 1707.

les tangentes et les sécantes, en 15 chiffres, par des méthodes algébriques et par les différences proportionelles aux sinus, comme le dit Gellibrand dans sa préface ; il calcula dans une forme plus commode et avec 15 chiffres les log. des nombres depuis 1 jusques à 20000, et depuis 90000 jusques à 101000 : cette table fut imprimée à Londres (*Arithmetica logarithmica*, 1624). Briggs avoit aussi calculé les logarithmes des sinus et des tangentes pour chaque centieme de degré avec 15 chiffres : il mourut en 1632, à l'âge de 70 ans ; mais Vlacq avoit fait imprimer la table, et elle parut avec une trigonométrie achevée par Gellibrand (*Trigonometria Britannica*, Goudæ, 1633).

4102. Adrien Vlacq compléta bientôt les logarithmes des nombres calculés par Briggs, et donna les logarithmes depuis 20000 jusques à 90000, à 11 chiffres seulement (*Arithmetica logarithmica, editio secunda per Adrianum Vlacq Goudanum, Goudae* 1628). Ce travail fut fait en deux ans, de 1626 à 1628 : il y ajouta les logarithmes des sinus, tangentes et sécantes pour chaque minute. Considérant ensuite que l'usage des minutes et des secondes étoit plus familier aux astronomes que celui des centiemes de degré employés dans la table de Briggs, et que les différences des logarithmes étoient trop inégales au commencement de cette table, Vlacq se détermina vers 1630 à calculer encore les logarithmes des sinus et des tangentes de dix en dix secondes avec 11 chiffres : ce sont ceux dont les astronomes font le plus de cas ; mais ils sont rares aujourd'hui ; en voici le titre, *Trigonometria artificialis, sive magnus Canon triangulorum logarithmicus ad radium* 10000000000, *et ad dena scrupula secunda*, *ab* Adriano Vlacco *Goudano constructus* ; Goudæ, 1633 : M. Jombert, en 1783, y a reconnu plusieurs fautes.

4103. Ce travail, dont nous profitons encore tous les jours, a fait oublier celui de Benjamin Ursinus, mathématicien de l'électeur de Brandebourg, qui avoit cependant déja calculé des logarithmes semblables suivant la forme de Neper : ils avoient paru en 1625, et durent être d'un grand secours pour les calculs de Vlacq. Ce dernier profita aussi d'un grand ouvrage de Rheticus, publié par Pitiscus, où les sinus naturels avoient été calculés de dix secondes en dix secondes avec 15 chiffres (*Thesaurus mathematicus, Francofurti* 1713) [a] ; ils étoient déja avec dix chiffres dans *Opus Palatinum* (420, 441).

4104. Les logarithmes de Briggs et de Vlacq, soit pour les nombres, soit pour les sinus, ont été publiés à Londres en 1742 par *Gardiner*, avec 8 chiffres seulement, et réimprimés à Avignon en 1770 : les lo-

(a) Ce livre est extrêmement rare : j'en ai donné la notice dans le Journal des savans de septembre 1771.

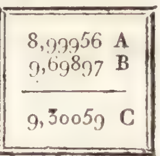
garithmes des nombres y sont disposés d'une façon très abrégée, qui avoit été imaginée par Nathaniel Roe, pasteur de Bennere, comme on le voit dans les tables de Wingate 1633 : cette méthode fut employée par Sherwin (*Mathématical tables*, in-8°. 1705). On y prend aisément les logarithmes des nombres jusques à un million. M. Jombert et M. Callet les ont fait réimprimer *in*-8°. en 1783, et c'est l'édition la plus commode et la moins chere de toutes : enfin M. Taylor a fait imprimer en Angleterre une table des logarithmes des sinus et des tangentes pour toutes les secondes.

4105. Mais il seroit bien plus à souhaiter que l'on mît les logarithmes des sinus sous la même forme que ceux des nombres, pour les cent milliemes du quart-de-cercle ; cela rendroit les calculs plus courts et plus commodes. J'ai déja commencé cette table, et elle seroit bientôt finie si j'espérois qu'on convînt de cette division du quart-de-cercle en cent mille parties dans les calculs astronomiques (4110).

Nous donnâmes en 1760, la Caille et moi, une petite édition portative (1889), qui a été réimprimée ensuite en 1768 et en 1781 : on y voit les degrés, minutes et secondes qui répondent à chaque nombre, et pour les trois premiers degrés la différence entre les logarithmes des sinus des arcs et ceux des nombres naturels ou des nombres de secondes de chaque arc ; par le moyen de ces différences on a facilement les sinus des degrés, minutes et secondes. Ainsi pour avoir le sinus de 2° 11′ 37″, on prend son logar. dans les nombres naturels, 3,897462, et l'on trouve vis-à-vis du sinus de 2° 12′, la différence 4,685469, qui ne varie presque pas d'une minute à l'autre ; la somme est 8,582931 ; c'est le logar. sinus de 2° 11′ 37″. On pourroit ajouter ces différences aux logarithmes jusques à 20 mille ; mais au-delà il faudroit prendre des parties proportionelles qui alongeroient le calcul, et il vaut mieux se servir de la méthode ordinaire.

4106. Il ne faut pas oublier que les sinus sont des fractions du rayon, et que les logarithmes des sinus sont des logarithmes de fractions ; par exemple, le logarithme de 10 étant 1, celui de 1 étant 0, celui de $\frac{1}{10}$ doit être — 1 ; mais au lieu de — 1 on écrit + 9, en observant de retrancher ensuite la dixaine que l'on a mise de trop. De même la fraction 0,0001 a pour logarithme 6. En général *la caractéristique des logarithmes des fractions est toujours le complément à 9 du nombre des zéros qui sont après la virgule dans le nombre donné.*

4107. S'il s'agit de diviser la fraction 0,0999 par la fraction 0,5, l'on a une soustraction à faire, comme on le voit ci-contre ; on suppose une dixaine à côté de la caractéristique 8, et l'on retranche 9 de 18 : en effet, dès



8,99956	A
9,69897	B
9,30059	C

que les dixaines excédentes se négligent dans l'addition, elles se suppléent par la même raison dans la soustraction, qui n'est qu'une addition renversée : si, dans l'opération précédente, on ajoute B avec C, il vient 18 pour la caractéristique de A ; voilà pourquoi nous la supposons également de 18 pour pouvoir faire la soustraction.

Au lieu de soustraire le logarithme B, il y a des astronomes qui sont dans l'usage d'ajouter le complément arithmétique, ou ce qui s'en manque pour aller à 10, c'est-à-dire 0,30103 ; cela est plus commode dans bien des cas, pourvu qu'on ait l'habitude de prendre le complément à la vue. Voyez l'exemple de l'art. 1677.

4108. S'il s'agit de prendre la racine carrée d'une fraction 0,0999, c'est-à-dire de diviser son logarith. par 2, il faut écrire, pour le logarithme de cette fraction, 18,99956, dont la moitié 9,49978 est le logarithme de sa racine 0,3161. En effet dans le logarithme 8,99956 le 8 tient la place de — 2, dont la moitié est — 1, ou, ce qui revient au même, + 9 ; donc c'est en effet 9 que je dois avoir pour la moitié ; donc c'est 18 que je dois supposer au lieu de 8 dans le logarith. 8,99956. S'il falloit prendre la racine cube d'une fraction 0,6258, dont le logarithme est 9,79643, il faudroit supposer à la caractéristique 29 au lieu de 9, et l'on auroit pour le tiers 9,93214, auquel répond le nombre 0,8554, qui est la racine cube cherchée.

4109. Toutes les analogies que l'on fait pour résoudre les triangles sphériques (3889 et suiv.) se réduisent à de semblables additions ; en voici un exemple appliqué à la forme des logarithmes de Gardiner dont j'ai parlé ci-dessus (4104). Je suppose qu'on connoisse la longitude du Soleil 30° 0′ 5″ avec l'obliquité de l'écliptique 23° 28′ 22″, et qu'on veuille trouver la déclinaison du Soleil (910) ; on fera la proportion suivante :

Le rayon ou le sinus total	182
Est au sinus de la long. du Soleil 30° 0′ 5″	9,6989700
Comme le sin. de l'obl. de l'écl. 23° 28′ 22″	9,6002151
Est au sin. de la décl. du Soleil 11° 29′ 17″ $\frac{1}{4}$	97
	9,2992130
Logar. des tables le plus approchant au-dessous	1375
Différence	755 | 104
Divisant cette différence par celle des tables, 1036, *diminuée d'un chiffre, on a* 7″ $\frac{1}{4}$.	7 $\frac{1}{4}$

Le nombre 182, qui est au-dessus du premier logarithme, est la partie proportionelle qui répond à 5″ ; le nombre 97 est la partie pro-

portionelle qui répond à 2″. Les quatre chiffres écrits sous le dernier logarithme sont les derniers chiffres du logarithme de sinus, qui, dans les tables, approche le plus de l'arc que nous voulons trouver, et qui répond à 11° 29′ 10″; la différence est 755; on la divise par 104 qui est la différence correspondante à une seconde dans les tables où il y a 1036 pour 10″, et l'on trouve au quotient 7″ $\frac{1}{4}$; on les ajoute avec les 11° 29′ 10″, et l'on a le nombre cherché 10° 29′ 17″ $\frac{1}{4}$.

J'ai observé dans cet exemple de ne point écrire la dixaine de la caractéristique, qui se trouve 19; j'ai seulement écrit 9; cela remédie à l'excédent qui est occasionné par l'introduction que l'on fait de 9 à la place de — 1, et de 8 à la place de — 2 (4209).

Je donnerai aussi un exemple des logarithmes des nombres appliqués aux mêmes tables, parceque j'ai vu qu'on y trouvoit quelquefois de l'embarras. Je suppose qu'on cherche le logarithme du nombre 3,141593 (3467); on commencera par mettre 0 pour la caractéristique, parceque dans nos tables (4104) les caractéristiques ont été omises pour abréger; mais on sait que quand il n'y a que des unités ou un seul chiffre avant la virgule, comme dans le nombre proposé où les six autres sont des décimales, le logar. commence toujours par zéro (4100). On cherchera dans les logarith. des nombres naturels, vis-à-vis de 3141; l'on aura d'abord les trois premiers chiffres 397 qui suivent la caractéristique; en suivant la même ligne, on trouvera au-dessous de 5, c'est-à-dire dans la septieme colonne, 1371; ainsi le logarithme de 3,1415 est 0,4971371. Dans la petite table à deux colonnes qui est en marge, on cherchera le sixieme chiffre 9 du nombre donné; on verra 124; c'est la partie proportionelle qu'il faut ajouter au logarithme à cause du sixieme chiffre 9. On prendra encore dans cette petite table le septieme chiffre 3, et vis-à-vis on trouvera 41, dont retranchant un chiffre, on aura 4 qui est la partie proportionelle pour le septieme chiffre; on ajoutera donc 124 et 4, c'est-à-dire 128, et l'on aura pour le logarithme entier 0,4971499.

4110. M. de la Grange propose depuis long-temps de donner à nos tables de sinus une forme différente et qui seroit plus commode; elle consisteroit à diviser le quart-de-cercle en 100000 parties dont chacune seroit de 3″,24, alors elles ressembleroient à celles des logarithmes des nombres; les petites tables de corrections qui sont en marge donneroient facilement les trentiemes de seconde: ce travail eût été préférable à celui de Taylor, qui a calculé les sinus et les tangentes pour toutes les secondes. Il faudroit qu'on changeât aussi

la forme des tables astronomiques en mettant les décimales au lieu des secondes; mais ce seroit encore une grande commodité de plus.

4111. Dans l'usage ordinaire des tables astronomiques, on se sert souvent des logarithmes *logistiques*[a] employés dans l'astronomie Caroline de Street (477), qui sont les logarithmes ordinaires retranchés de 35563, qui est celui de 3600. On y trouve l'avantage de n'avoir rien à retrancher dans toutes les regles de trois, dont le premier terme est un degré ou 60', ce qui a lieu continuellement dans l'usage des tables. La regle de trois, qui a servi à trouver le diametre de la Lune (page 77 *de nos tables*), aussi bien que toutes les parties proportionelles que nous avons supposées dans les calculs du lieu du Soleil et de la Lune, se peuvent faire à la vérité par la multiplication et la division ordinaires, en réduisant tout en secondes; mais elles sont bien plus faciles par les logar. logistiques. On les trouve à la fin de nos tables avec un exemple abrégé : je les ai prolongés au-delà de 60' à cause du mouvement diurne du Soleil qui passe souvent 60'; mais quand on ajoute un des ces logarithmes, qui au-delà de 60' commencent par 9, il faut retrancher 1 de la caractéristique ou du cinquieme chiffre à gauche. Si l'on s'en est servi dans une soustraction, il faut suppléer 1 dans la caractéristique de la somme. Par exemple, si je faisois cette proportion, 72' : 36' :: 18' : x, j'ajouterois 2218 avec 5229; au lieu de la somme 7447 je supposerois 17447, pour retrancher 9208, et j'aurois 8239, logarithme logistique de 9' 0''.

Ces logarithmes servent aussi pour toutes les opérations des nombres qui ne passent pas 4380, en prenant, au lieu des minutes et des secondes, le nombre total de secondes qui est marqué dans la seconde ligne de la table pour chaque nombre de minutes, et y ajoutant les secondes qui sont dans la premiere colonne; ainsi le logar. de 3331 est 337; mais il faut observer dans les multiplications ordinaires d'ôter le logar. de 1, ou d'ajouter son complément 4437.

En calculant le lieu du Soleil (pag. 9 des tables), on a cette proportion à faire; 100 ans sont à 52,6, comme 17,3, sont à un quatrieme terme; on ajoutera les logarithmes 8353 et 13183; on ôtera celui de

[a] Logistique est le nom qu'on donnoit à l'algebre; on l'a donné ensuite à la courbe logarithmique; il est actuellement consacré à cette petite espece de logarithmes; ce mot vient peut-être de λογίζομαι, *je calcule*. Riccioli dit que le calcul des fractions sexagésimales et des portions de signes, de jours, d'heures, etc. est une partie de la logistique (T.I, pag. 2).

1000 qui est 5563, et l'on aura celui de 9,1, qui est le quatrieme terme de la proportion.

4112. M. Bernoulli et M. Taylor ont donné des tables des parties proportionelles pour les minutes et les secondes, imprimées à Londres, et qui sont aussi très commodes; la premiere est intitulée *A sexcentenary Table*, 165 p., 1779; la seconde, *A sexagesimal Table*, 315 pages, 1780. Les parties proportionelles se prennent encore plus facilement avec cette table sexagésimale qu'avec les logarithmes logistiques; elles ont sur-tout l'avantage de donner les décimales aussi facilement que les minutes et les secondes.

Des Interpolations, ou de l'usage des secondes différences.

4113. Dans l'usage des observations et des tables astronomiques on emploie continuellement des regles de trois et des parties proportionelles, parcequ'on suppose que les nombres croissent uniformément; cependant il y a des cas où cette supposition seroit défectueuse; on est alors obligé d'avoir recours à la méthode des interpolations. Le problême général qu'il faut résoudre est celui-ci : Etant données deux suites de nombres qui se répondent l'un à l'autre suivant une certaine loi, et dont l'une s'appelle la *suite des racines* et l'autre la *suite des fonctions*, trouver un nombre intermédiaire entre deux fonctions, qui réponde à un nombre intermédiaire donné entre deux racines. On peut voir cette matiere traitée dans toute sa généralité par des formules algébriques, dans Newton, dans Cotes, dans Stirling; il y a un mémoire de Mayer (*Comment. Petropolit.*, T. II), un de M. de la Grange (Mém. de l'acad. 1772; Ephémérides de Berlin 1783). Boscovich a fait voir qu'on pouvoit par ces méthodes dresser des tables des inégalités de Saturne produites par l'attraction. Mais comme des formules très compliquées ne peuvent jamais être d'usage, et que dans l'astronomie on a toujours à considérer des cas moins généraux, j'ai traité les interpolations d'une maniere plus limitée, mais plus commode (*Mém. acad.* 1761), par le moyen des différences premieres, secondes et troisiemes, dont Briggs avoit déja fait usage (*Trig. Brit.*, p. 36).

4114. Je suppose une suite de nombres 0, 1, 3, etc. dont les différences soient inégales, mais d'une inégalité constante et réguliere, par exemple, 1, 2, 3, 4, etc., en sorte que les secondes différences ou les différences des différences soient constantes, par exemple,

égales à 1, comme dans la table ci-jointe. Si l'on ne prend les mêmes nombres que de deux en deux, par exemple, 0, 3, 10, 21, les différences seront 3, 7, 11, et leur inégalité ou leur seconde différence sera 4, c'est-à-dire quatre fois plus grande qu'auparavant, parcequ'en doublant les intervalles, l'on a pour différence premiere, d'un côté la somme de 1 et 2, de l'autre la somme de 3 et 4; en sorte que la seconde différence a augmenté à raison de la différence qu'il y a entre 2 et 3, et de celle qu'il y a entre 1 et 4 qui est trois fois plus grande. Si l'on prenoit les nombres de trois en trois, on trouveroit la seconde différence 9, etc., c'est-à-dire que les différences secondes croissent comme les carrés des intervalles des nombres; de là je vais tirer une regle générale pour remplir les intervalles d'une suite de nombres qui suivroient la même loi.

Nombres.	Différ. prem.	Second. Différ.
0		
	1	
1		1
	2	
3		1
	3	
6		1
	4	
10		1
	5	
15		1
	6	
21		1
	7	
28		1
	8	
36		

4115. Je suppose quatre nombres, comme seroient quatre longitudes calculées de 12 en 12 heures, dont les trois différences soient 78, 222, 366, en sorte que l'inégalité de leur marche, ou la différence seconde, soit constamment de 144; les nombres, 0, 78, 300, 666, ne croissent pas uniformément, puisque leurs différences 78, 222, sont inégales, mais du moins l'uniformité est telle que ces différences augmentent également : tel est le cas le plus simple des interpolations, et ce cas est presque toujours suffisant dans l'usage de l'astronomie.

Heures.	Nombres.	Différ. prem.	Secon. Différ.
0	0		
		78	
12	78		144
		222	
24	300		144
		366	
36	666		

4116. Connoissant ces nombres de 12 en 12 heures, on peut facilement les avoir de 6 en 6 heures, en les assujettissant à cette regle des secondes différences constantes; il ne s'agit que d'interpoler un nombre dans chacun des intervalles; car on sait que leur seconde difference doit être quatre fois moindre que 144, c'est-à-dire 36 (4114); il suffira donc de faire une suite de nombres, dont la seconde différence soit 36. Pour avoir la différence premiere, on prendra la moitié de la différence 78, c'est-à-dire 39, et l'on en ôtera la moitié de la seconde différence 36, c'est-à-dire 18; il restera 21 : or ayant cette premiere différence 21, il suffira de l'augmenter successivement de la seconde différence 36 pour avoir toutes les autres différences; en effet la premiere des différences jointe à la suivante doit faire 78, et ces deux différences doivent différer de 36; or quand on a la somme et la différence de deux nombres, il suffit pour

pour trouver le premier de retrancher la demi-différence de la demi-somme.

4117. Si, au lieu d'avoir un nombre à interpoler entre 0, 78, 300, on en vouloit interpoler deux, on prendroit le tiers de la différence premiere, et l'on en ôteroit une fois la seconde différence trouvée; car les trois différences que l'on cherche doivent faire 78 dans l'exemple précédent, et elles doivent différer de la valeur de la seconde différence trouvée : or quand on a la somme de trois quantités et leur différence, on trouve la plus petite quantité par la regle que je viens d'indiquer; en effet si la somme des trois quantités est a et leur différence $= b$, la progression arithmétique donne la moyenne des trois $= \frac{1}{3} a$, et comme la premiere en differe de la quantité b, elle sera $\frac{a}{3} - b$.

4118. En général, pour interpoler un nombre n de termes entre deux termes d'une suite donnée, on divisera la seconde différence de la suite donnée par le carré de $n + 1$, pour avoir la seconde différence de la nouvelle suite; on divisera la différence premiere par $n + 1$, et l'on ôtera du quotient la seconde différence de la nouvelle suite multipliée par $\frac{n}{2}$; il faudroit l'ajouter si les différences premieres alloient en décroissant. C'est ainsi qu'on trouvera facilement la premiere des différences premieres qui doivent avoir lieu dans le nouvel ordre de termes que l'on cherche; les suivantes se trouveront en ajoutant successivement la différence seconde trouvée pour la nouvelle suite.

La seule considération des secondes différences supposées égales est suffisante dans bien des calculs astronomiques, sur-tout pour construire des tables. Sharp, qui calcula en 1695 les tables d'ascension droite et de déclinaison pour chaque degré de longitude et de latitude, qu'on trouve dans l'Histoire céleste de Flamsteed, ne les calcula par la trigonométrie que de 5° en 5°, et il les étendit par la méthode des interpolations à chaque degré. Mouton, qui calcula les déclinaisons du Soleil pour chaque minute de longitude, en secondes et en tierces, ne les calcula que pour chaque degré par la trigonométrie, et chercha les autres nombres par la méthode des secondes différences (*Obser. Diamét.* 1670).

4119. Il suffit dans ce cas-là de calculer rigoureusement assez de termes pour que leurs secondes différences soient à-peu-près égales ou varient insensiblement. On trouve la *Connoissance des temps* de 1771, et dans les tables sexagésimales de Taylor, des tables fort

commodes pour abréger ces sortes d'opérations; enfin il y en a une dans les Ephémérides de Berlin pour 1776, où l'on trouve les coëfficiens pour les différences secondes, troisiemes, quatriemes et cinquiemes, à toutes les heures, et même de 10 en 10′ de temps.

4120. On se sert aussi des secondes différences pour corriger des calculs, ou limiter des observations, c'est-à-dire les ramener à une marche réguliere et uniforme : quand on trouve une seconde différence qui est trop grande ou trop petite par rapport à la précédente et à la suivante, il faut corriger le nombre qui répond à cette seconde différence du tiers seulement de l'erreur qu'on a remarquée dans la différence; car en changeant d'une partie l'un des nombres de la suite donnée, on augmente une des différences premieres et l'on diminue l'autre; ainsi l'on change de deux parties une des différences secondes, qui répond vis-à-vis du nombre qu'on a changé. Mais si l'on a augmenté de 2 cette différence seconde, la précédente et la suivante ont nécessairement diminué d'une partie; il y aura donc dans le progrès des différences secondes, trois parties de changement : cette correction est de même espece que celle de la seconde différence elle-même, si le progrès est de différente espece dans les nombres et dans les premieres différences.

4121. L'examen du cas particulier que nous venons d'expliquer (4117) nous fera trouver aisément d'une maniere générale un terme quelconque sans passer par tous les termes précédens, au moyen d'une correction de la partie proportionelle, dont la formule est très simple.

Soit d^2 la différence seconde des nombres donnés, m le nombre des intervalles qu'il s'agit de former, par exemple 2, quand on veut interpoler un terme dans l'intervalle des nombres donnés, 3 quand on veut interpoler deux termes; on aura $\frac{d^2}{m^2}$ pour la différence seconde de la nouvelle suite : soit x la premiere des différences premieres que l'on cherche, les différences suivantes seront $x + \frac{d^2}{m^2}$, $x + \frac{2d^2}{m^2}$, $x + \frac{3d^2}{m^2}$, etc.; car elles croissent de la quantité de leur seconde différence $\frac{d^2}{m^2}$: en additionnant ensemble toutes ces différences premieres, on aura la différence entre le premier terme donné et le terme suivant de la suite donnée, c'est-à-dire la différence que j'appelle d entre les deux termes dont on veut remplir l'intervalle; ainsi $mx + \frac{d^2}{m^2} \cdot (1 + 2 + 3, \text{etc.}) = d$; donc $x = \frac{d}{m} - \frac{1+2+3, \text{etc.}}{m} \cdot \frac{d^2}{m^2}$.

4122. Quand on a la premiere des différences premieres, on trouve aisément les autres en y ajoutant successivement $\frac{d^2}{m^2}$, qui est la différence seconde ; on aura donc les différences suivantes entre les termes cherchés :

$$\frac{d}{m} - \frac{1+2+3,\text{ etc.}}{m} \cdot \frac{d^2}{m^2},$$

$$\frac{d}{m} - \frac{1+2+3}{m} \times \frac{d^2}{m^2} + \frac{d^2}{m^2},$$

$$\frac{d}{m} - \frac{1+2+3}{m} \times \frac{d^2}{m^2} + \frac{2\,d^2}{m^2},$$

$$\frac{d}{m} - \frac{1+2+3}{m} \times \frac{d^2}{m^2} + \frac{3\,d^2}{m^2},$$

etc.

4123. On continueroit aisément cette suite en répétant toujours les deux premiers termes, et mettant successivement 4, 5, 6, pour le coëfficient de $\frac{d^2}{m^2}$. On voit dans cette expression la série des nombres naturels 1, 2, 3, etc. répétée dans chaque ligne, et de plus cette même série étendue du haut en bas dans la derniere colonne : il faut les sommer l'une et l'autre. Dans chaque ligne horizontale la série aura autant de termes 1, 2, 3, etc. que le nombre $m - 1$ contient d'unités ; or, suivant la propriété des nombres naturels, un nombre m de termes équivaut à $\frac{m(m+1)}{2}$, et un nombre $m - 1$ à $\frac{m(m-1)}{2}$; donc, dans chaque ligne, on aura $\frac{m-1}{2}$ à la place de $\frac{1+2+3,\text{ etc.}}{m}$.

Dans la derniere colonne verticale où l'on a $\frac{d^2}{m^2}$, multipliée aussi par la suite des nombres naturels, si l'on cherche le quatrieme terme ou la quatrieme des différences premieres, on aura trois termes à prendre ; et en général, si l'on cherche le terme p, on aura $p - 1$ de termes ; donc la somme sera $\frac{(p-1)p}{2}$, qu'il faut multiplier par $\frac{d^2}{m^2}$.

Dans la même supposition l'on aura un nombre p de différences premieres à ajouter ensemble, c'est-à-dire quatre différences, si l'on veut parvenir au quatrieme terme ; on aura donc $p \cdot \frac{d}{m}\left(\frac{p \cdot (m-1)}{2} - \frac{(p-1) \cdot p}{2}\right) \cdot \frac{d^2}{m^2} = p \cdot \frac{d}{m} - \frac{p}{2} \cdot (m-p) \cdot \frac{d^2}{m^2}$; la partie proportionelle

qui auroit lieu si la suite des nombres donnés croissoit uniformément, est $p \cdot \frac{d}{m}$.

4124. La correction $- \frac{p}{2}(m - p)\frac{d^2}{m^2}$ est donc l'équation qu'exige l'inégalité de la marche ou la considération des différences secondes. Cette correction de la partie proportionelle est soustractive quand les différences premieres vont en croissant, c'est-à-dire que les différences secondes sont positives.

On trouvera dans le mémoire que j'ai cité une formule semblable pour avoir égard aux troisiemes différences ; mais la plupart de nos calculs n'exigent que les secondes différences, excepté les lieux de la Lune calculés de jour en jour [a], les longitudes géocentriques de Mercure aux environs de ses plus grandes digressions, etc. Je me contenterai donc d'expliquer ici l'usage de la formule précédente.

4125. Exemple. Supposons qu'on ait calculé les longitudes de la Lune pour les jours 1, 2, 3, 4, à midi, et qu'on ait trouvé les nombres suivans.

Jours.	Long. de la Lune.	Différences.	Sec. Différ.
1	$1^s\ 4°\ 34'\ 3''$		
		$13°\ 6'\ 58''$	
2	1 17 41 1		$23'\ 34''$
		13 30 32	
3	2 1 11 33		25 10
		13 55 42	
4	2 15 7 15		

On demande la longitude qui doit avoir lieu le 2 à 15^h : on dira d'abord 24^h sont à $13°\ 30'\ 32''$, comme 15^h sont à $8°\ 26'\ 35''$, mouvement pour 15^h supposé uniforme. La seconde différence, qui répond à l'intervalle du 2 au 3, est $24'\ 22''$, en prenant un milieu entre celle du 2 et celle du 3 ; ainsi $\frac{d^2}{2} = 12'\ 11''$, $\frac{p}{m} = \frac{15}{24}$ et $\frac{m-p}{m} = \frac{9}{24}$; donc $\frac{p}{m^2}(m - p)\frac{d^2}{2} = \frac{15}{24} \cdot \frac{9}{24} \cdot 12'\ 11'' = 2'\ 51''$; c'est ce qu'il faut retrancher du mouvement moyen pour 15^h, ou $8°\ 26'\ 35''$; on aura $8°\ 23'\ 44''$ pour le mouvement vrai ; ajoutant ce mouvement à la longitude de la Lune pour le 2 à midi $1^s\ 17°\ 41'\ 1''$, on aura $1^s\ 26°\ 4'$

[a] Le mouvement diurne de la Lune varie depuis $11°\ 52'$ jusqu'à $15°\ 21'$. La troisieme différence, la plus forte que j'aie rencontrée, est de $11'$ (en janv. et fév. 1763) : la seizieme partie est $40''$: ainsi on ne se tromperoit que de $20''$ en prenant la différence moyenne ; mais on a égard dans le *Nautical Almanac* aux troisiemes différences.

45″, longitude pour le 2 à 15^h, qui diffère à peine de celle qu'on trouve en cherchant la longitude au moyen des tables par un calcul immédiat. On a des tables pour abréger le calcul (4119). Cette considération sert aussi à trouver le mouvement horaire (1521).

4126. Dans l'usage de certaines tables astronomiques on est obligé d'avoir recours aux secondes différences, si l'on veut obtenir toute l'exactitude dont ces tables sont susceptibles ; telles sont les tables de Mercure, qui ne sont calculées que de degré en degré, quoique pour l'équation de l'orbite et pour la distance, les différences d'un degré à l'autre soient assez inégales ; cette inégalité, ou, ce qui revient au même, la différence seconde va jusqu'à 35″ vers IV^s 16° pour l'équation de l'orbite (Table CI), et jusqu'à 54 pour le logar. de la distance dans le périhélie (Table CII, pag. 113) : il peut donc y avoir dans les parties proportionelles une erreur de 4″ pour l'équation et de sept parties sur le logarithme; car elle est quelquefois $\frac{1}{8}$ de la seconde différence. J'ai donné, table LXXVIII, p. 81, la correction qu'il faut faire à ces parties proportionelles avec un exemple. On trouvera des tables plus étendues dans les Ephémérides de Berlin de 1776 et dans la Connoissance des temps de 1771.

Réductions que les astronomes font à des observations peu distantes entre elles, pour les réduire à une même époque.

4127. Il arrive continuellement dans l'astronomie que l'on connoît à-peu-près une certaine quantité, et qu'on veut par de nouvelles observations la déterminer plus exactement; alors on se sert de la connoissance qu'on en a déja pour savoir combien il doit y avoir de variation entre différens temps d'observations, et par là on trouve l'avantage de confirmer une observation par plusieurs autres.

Je veux, par exemple, observer avec la plus grande exactitude la hauteur du Soleil au solstice d'été pour en déduire l'obliquité de l'écliptique; il n'y a pour cela qu'une seule observation directe et immédiate, c'est celle qu'on feroit à midi le jour même du solstice, en supposant que le solstice arrivât à midi.

Mais quelle que soit la hauteur solsticiale que je veux observer, je vois par les tables (4044) qu'elle doit être plus petite de 12″ quand je l'observerai un jour plutôt ou plus tard ; ainsi, ayant observé cette hauteur la veille et le lendemain du solstice et y ajoutant 12″, j'aurai deux observations aussi bonnes que celle du jour solsticial, et qui

doivent donner le même résultat si elles sont toutes les trois bien faites.

Quand même on suposeroit que l'on ne connoît pas, à une minute près, quelle sera la hauteur solsticiale, cela n'empêcheroit pas qu'on ne fût certain qu'elle sera plus petite de 12″ le lendemain et la veille que le jour même du solstice ; car une minute d'erreur sur 23°½ ne produira pas sur 12″ une erreur de la centieme partie d'une seconde, puisqu'il faut que l'erreur soit de part et d'autre de la quatorze-centieme partie du total.

4128. C'est sur ce principe que la Caille réduisoit au premier janvier 1750 toutes les observations qu'il faisoit d'une même etoile (*Astr. Fundamenta* 1757) ; et il importe toujours de confirmer ainsi le même résultat par plusieurs jours d'observations. Si les différences sont inégales, on est obligé de calculer par les tables la chose qui a été observée ; l'erreur des tables étant ainsi déterminée plusieurs jours de suite, on prend un milieu entre les erreurs pour avoir la différence moyenne entre les tables et l'observation, déduite de plusieurs résultats; et c'est celle-ci dont on fait usage. C'est ainsi qu'on peut rendre quatre ou cinq fois moindre la petite incertitude qui naît de l'imperfection de nos instrumens et de l'erreur de nos observations : au lieu d'une erreur de 10 ou 12 secondes, qui est possible sur des longitudes observées, l'on peut s'assurer de 2 ou 3 secondes. De même, quand on a pris plusieurs hauteurs en mer, on peut les réduire à un même instant (4203).

4129. Prendre un milieu entre deux résultats qui devroient être égaux et qui ne le sont pas, par exemple, entre 2″ et 4″, c'est supposer que l'un est trop grand et l'autre trop petit ; c'est ôter au plus grand ce qu'il a de trop et ajouter au plus petit ce qui lui manque. Quand on veut prendre le milieu entre trois quantités, on les ajoute ensemble et l'on prend le tiers de leur somme ; par là on obtient le résultat le plus probable, comme Simpson l'a fait voir par le calcul des probabilités (*Miscellaneous Tracts* 1757). Plusieurs géometres s'en sont occupés. *Voy.* l'Encyclopédie au mot *milieu.* Mais cela est facile à sentir par les considérations suivantes.

Supposons qu'une quantité observée trois fois, et qui devroit être toujours la même, se trouve successivement de 4″ de 5″ de 6″; je dois choisir 5″, parceque ne sachant pas où est l'erreur, il est aussi naturel que j'aie pu me tromper en plus qu'en moins : j'ai lieu de croire que les 4″ sont trop petites et les 6″ trop grandes ; et en prenant les 5″ qui tiennent le milieu, je ne fais que supposer autant d'erreur en excès que d'erreur en défaut, ce qui est la supposition naturelle dès

que je ne connois ni la cause ni la quantité de mes erreurs. En ajoutant 4, 5, 6, j'ai 15; et divisant par trois, qui est le nombre des observations, je trouve 5, qui est également le milieu; et il doit l'être effectivement, car ce nombre est le même que si j'avois fait la somme des trois quantités égales 5, 5, 5, puisqu'il y en a une qui est trop petite, mais qui est exactement compensée par une qui est trop grande; donc la somme étant la même, le tiers de la somme est aussi le même; donc le tiers de la somme de trois quantités est exactement le milieu entre la plus grande et la plus petite; c'est donc la quantité que l'on cherche, dès qu'on suppose qu'on s'est trompé autant en excès qu'en défaut, qu'il y a autant d'erreur en plus qu'en moins, ce qu'on est obligé du supposer; faute de connoître la loi et la source des erreurs, et ce qui est conforme aux loix de la probabilité.

4130. Si les trois quantités étoient égales 5, 5, 5, le tiers de leur somme seroit évidemment 5; mais la somme des trois quantités 4, 5, 6, doit être encore la même, dès que la premiere quantité 4 est plus petite autant que la derniere 6 est trop grande; ainsi le tiers de la même somme donne la même quantité 5, qui tient le milieu entre les extrêmes, entre la quantité trop petite 4 et la quantité trop grande 6. Le même raisonnement pourroit s'appliquer à un plus grand nombre de quantités, comme 4, 5, 7, 8; la somme 24 divisée par, 4 donne 6, qui est la quantité moyenne; car il y en a autant au-dessus qu'au-dessous de 6; il y a deux erreurs de 1 et deux erreurs de 2, l'une en excès, l'autre en défaut.

4131. Cependant, quand il y a des observations qui s'écartent considérablement du terme moyen, et qui par là méritent moins de confiance, il est bon de les rejeter ou de ne pas les faire entrer dans l'opération pour la même part que les autres; par exemple, s'il y a quatre résultats dont un s'écarte trois fois plus que les autres du terme moyen, il ne mérite que le tiers de la confiance des autres; et, avant de diviser la somme par 4, on peut diminuer cette somme des deux tiers de ce qu'on voit de trop dans une des quantités données par rapport à la quantité moyenne.

DES RÉSULTATS QUE L'ON DÉDUIT DE CHAQUE OBSERVATION.

4132. On a vu dans le livre XIV la maniere de faire toutes sortes d'observations : je n'ai pu alors développer les conséquences qu'on en déduit, parcequ'elles supposoient des connoissances qui n'ont

été placées que dans les livres suivans : il est temps d'expliquer cette partie essentielle de l'astronomie pratique.

Le mouvement de l'horloge à pendule est la premiere chose qu'on doit examiner par observation (960, 2506) : on se sert pour cet effet ou du Soleil ou des étoiles fixes : quand on se sert du Soleil, on cherche le temps vrai qui répond au temps de l'horloge (960), on cherche aussi le temps moyen (*Voyez l'explication des tables du Soleil*, pag. 16). On fait la même chose deux ou trois jours après ; et si l'horloge differe du temps moyen autant que le premier jour, on est assuré qu'elle est réglée sur le moyen mouvement. Je suppose que le 2 janv. le Soleil passe à la lunette méridienne (2613) 26″ plus tard que la veille; on trouve par le calcul de l'équation du temps, ou par la *Connoissance des temps*, qu'il devroit passer 28″ plus tard, puisque le temps moyen au midi vrai augmente alors de 28″ par jour : ainsi l'horloge marquoit 2″ de moins qu'elle n'auroit dû marquer, c'est-à-dire qu'elle retarde de 2″ par jour.

4133. Il est souvent plus commode de recourir aux étoiles, que d'employer le Soleil pour régler une horloge : on observe deux jours de suite l'instant du passage d'une étoile au méridien ou à une lunette fixe, ou bien sa disparition derriere un bâtiment en mettant l'œil en un point fixe : si, dans le second jour, on trouve 3′ 56″ de moins que dans le premier, on est sûr que l'horloge est réglée (954), puisque c'est l'accélération diurne des étoiles par rapport au temps moyen.

4134. Lorsqu'on connoît la marche d'une horloge, on est en état de trouver le temps vrai d'une observation (960) et les différences d'ascension droite (2505), fondemens principaux de toute notre astronomie. C'est par leur moyen qu'on parvient à déterminer la longitude et la latitude d'un astre ; toutes les observations se réduisent à cela, puisque ce sont les termes de comparaison que les astronomes ont adoptés par la convention la plus générale, et en même temps la plus naturelle (76, 94).

4135. Les premieres observations par lesquelles doit commencer un observateur isolé, sont celles de la hauteur du pole (31) et de l'obliquité de l'écliptique (70) : j'en ai expliqué la méthode. Il suffit, pour connoître exactement l'obliquité de l'écliptique, d'observer la déclinaison du Soleil (2582), lorsqu'elle est la plus grande au nord et au sud de l'équateur. La longitude du Soleil est ensuite la plus facile et la plus importante ; on détermine sa déclinaison (2582), d'où il est aisé de conclure sa longitude (853) et son ascension droite (869). On passe ensuite aux ascensions droites des étoiles (877), dont les positions doivent servir à déterminer celles de toutes les planetes.

Enfin

Enfin on compare une planete avec une étoile dont la position est connue. C'est ici l'opération la plus compliquée, sur-tout quand il s'agit de la Lune : je vais donc l'expliquer en détail pour l'usage de ceux qui n'ont pu fréquenter les grands observatoires de l'Europe, et apprendre des choses qui ne se sont guere perpétuées jusqu'ici que par tradition. Je l'appliquerai immédiatement à une observation de la Lune que je fis à Berlin (1650).

Calcul d'une Observation de la Lune dans le méridien.

4136. J'OBSERVAI le 23 février 1752 à Berlin le passage du premier bord de la Lune au méridien, dans un mural de 5 pieds (2328), à $6^h\ 54'\ 39''$ de temps vrai[a] (960, 1015), et $2'\ 8''$ plus tard le passage de l'étoile ζ du Taureau. La hauteur méridienne du bord austral de la Lune, à $6^h\ 55'\ 45''$, étoit de $57°\ 55'\ 52''$, et celle de l'étoile, quand elle passa au méridien, $58°\ 27'\ 21''$ (*Mém. acad.* 1751). Ces hauteurs sont dégagées de l'erreur du quart-de-cercle quant au dernier point de la division (2556) ; et celle de la Lune est corrigée par l'épaisseur du fil (2535) ; mais il en faut ôter $16''$ pour l'erreur de la division dans ce point-là (2561), que j'ai vérifiée depuis l'impression de ces observations : l'on aura donc la hauteur apparente du bord de la Lune $57°\ 55'\ 36''$. Nous ne ferons pas usage de la hauteur de l'étoile dans les calculs suivans, puisque nous connoissons l'erreur du quart-de-cercle pour l'appliquer à la hauteur de la Lune.

4137. L'horloge étoit réglée sur le moyen mouvement du Soleil ; ainsi les $2'\ 18''$ de temps écoulées entre le passage du bord de la Lune et celui de l'étoile font $0°\ 34'\ 35'',6$ (2506), qu'il faudra ôter de l'ascension droite apparente de l'étoile pour avoir celle du premier bord de la Lune (2507). Si la pendule étoit réglée sur les étoiles, les $2'\ 18''$ ne feroient que $34'\ 30''$, à raison de $15°$ par heure (2505).

4138. L'ascension droite moyenne de ζ du Taureau pour le commencement de 1750, suivant le catalogue des étoiles de la Caille, est de $80°\ 40'\ 40'',5$; le mouvement pour 10 ans $8'\ 56'',5$ (2728) ; ainsi le mouvement pour 2 ans est $1'\ 47'',3$, et il est de $7'',8$ depuis le commencement de 1752 jusqu'au 23 février, jour de l'observation ; donc l'ascension droite moyenne de ζ du Taureau étoit $2^s\ 20°\ 42'\ 35'',6$.

[a] On se sert plus volontiers actuellement du temps moyen, et on le trouve par la méthode expliquée dans les tables (pages 32 et 41).

4139. Le lieu du Soleil étoit alors de $11^s\ 4^\circ\frac{2}{3}$; ainsi l'aberration de l'étoile en ascension droite (2876) étoit + 6″. Le lieu moyen du nœud étoit $7^s\ 28^\circ\ 47'$; ce qui donne la nutation en ascension droite (2902) + 16″,7; donc l'ascension droite apparente de l'étoile étoit $2^s\ 20^\circ\ 42'\ 58''$,3. Otant la différence d'ascension droite que nous avons trouvée de 34′ 35″,6 (4137), nous aurons celle du bord de la Lune $2^s\ 20^\circ\ 8'\ 22''$,7. Si c'étoit au Soleil qu'on eût comparé la Lune, il faudroit prendre l'ascension droite du Soleil pour le moment du midi (2507).

4140. La hauteur du bord inférieur de la Lune[a] 57° 55′ 36″ doit être d'abord diminuée de 36″ pour la réfraction, comme on le voit dans les tables. A l'égard de la parallaxe, nous l'appliquerons ci-après. La déclinaison de la Lune diminuoit alors de 31″ par heure, comme on le voit par les Ephémérides ; ainsi la hauteur de la Lune auroit paru plus grande de 0″6, si elle eût été observée à $6^h\ 54'\ 39''$, c'est-à-dire au moment où le premier bord de la Lune passa par le méridien, et où l'ascension droite fut observée : il faut donc ajouter 0″,6 à la hauteur observée, et l'on aura 57° 55′ 0″,6 pour la hauteur du bord austral de la Lune dégagée de la réfraction et réduite au même instant que l'observation du passage. Si l'on vouloit au contraire réduire l'observation de l'ascension droite à la même heure que celle de la hauteur, on se serviroit des tables, 2e édit., *p.* 93, qui donnent le diametre en ascension droite, pour avoir le temps du passage du centre au méridien : c'est le temps que l'on choisit ordinairement pour l'observation de la hauteur ; mais je préfere de réduire la hauteur au passage du bord (4148).

4141. La parallaxe horizontale de la Lune pour Berlin étoit ce jour-là de 59′ 21″6, suivant l'observation même que j'en fis, comparée avec celle de la Caille au Cap de Bonne-Espérance (*Mém. acad.* 1752) : on pourroit également la trouver par les tables de la Lune (*pag.* 75 et suiv.), ayant égard à la différence des latitudes, entre Paris et Berlin (*pag.* 100) : cette parallaxe horizontale multipliée par le cosinus de la hauteur méridienne apparente (augmentée de 14′ 29″, *tables*, pag. 100, [b] ou par le sinus de la distance au zénit diminuée de 14′ 29″ (1654, 1693, 2691), donne la parallaxe de hauteur du bord de la Lune 31′ 19″,0 pour la latitude de Berlin dans

[a] On observe le bord supérieur, si la Lune, avant son plein, se trouve dans les signes descendans 3, 4, 5, 6, 7, 8 ; ou si, après son plein, elle est dans les signes ascendans.

[b] Je faisois alors l'aplatissement de $\frac{1}{230}$; mais je préfere actuellement $\frac{1}{300}$ (3764).

le sphéroïde aplati : il faudroit ôter les 14′ 29″ si la Lune étoit entre le pole et le zénit.

4142. La parallaxe 31′ 19″, ajoutée avec la hauteur observée 57° 54′ 59″,6, donne la hauteur vraie du bord inférieur de la Lune 58° 26′ 18″,6 ; il faut y ajouter le demi-diametre horizontal 16′ 12″, et l'on aura 58° 42′ 31″ pour la hauteur vraie du centre de la Lune vue du centre de la Terre [a]. La hauteur de l'équateur à Berlin est de 37° 28′ 30″, suivant un calcul exact des observations que je fis à Berlin cette année-là ; il faut la retrancher de la hauteur vraie de la Lune, et il reste pour la vraie déclinaison du centre de la Lune 21° 14′ 1″, à 6h 54′ 39″ de temps vrai à Berlin, ou 6h 24′ 0″ temps moyen à Paris.

4143. Le demi-diametre horizontal de la Lune 16′ 12″, divisé par le cosinus de la déclinaison vraie 21° 14′ 1″, donne le demi-diametre en ascension droite (1516) de 17′ 23″, qu'il faut ajouter à l'ascension droite du premier bord de la Lune 2s 20° 8′ 22″,7 pour avoir celle du centre de la Lune 2s 20° 25′ 46″.

4144. Connoissant l'ascension droite et la déclinaison du centre de la Lune avec l'obliquité de l'écliptique pour ce temps-là 23° 28′ 12″ (*Tables du Soleil*, pag. 2), on trouvera sa longitude (898) 2s 21° 4′ 46″ et sa latitude australe 1° 56′ 25″. C'est le dernier résultat de l'observation.

4145. Si l'on veut avoir la longitude comptée de l'équinoxe moyen, il faut y appliquer la nutation, table XI, avec un signe contraire.

4146. Si l'on vouloit se servir de la hauteur méridienne de l'étoile observée le même jour, on prendroit la différence des hauteurs vraies de la Lune et de l'étoile, et l'on appliqueroit cette différence à la déclinaison de l'étoile pour avoir celle de la Lune ; on éviteroit seulement, par ce moyen, la petite incertitude qu'il peut y avoir sur la réfraction absolue et sur la hauteur de l'équateur, pour y substituer celle de la déclinaison de l'étoile.

4147. Pour assurer à nos observations tout l'avantage qu'elles pourront avoir dans l'avenir, il seroit à souhaiter que les catalogues qu'on en donne renfermassent toujours l'observation même, les élémens du calcul et le résultat. Par exemple, en rapportant des observations de la Lune, on doit faire une table qui contienne au moins les 9 colonnes suivantes.

(a) Si l'on eût calculé la parallaxe sur la hauteur du centre, il auroit fallu employer le diametre augmenté à raison de sa hauteur, pag. 94 des tables, et l'accourcissement de la réfraction, pag. 97 ; c'est pourquoi je préfere la parallaxe du bord.

1. Le jour, l'heure, la minute et la seconde du passage d'un des bords de la Lune au méridien, en temps vrai, ou en temps moyen, ce qui est plus commode pour les calculateurs.
2. Le passage de l'étoile à laquelle on a comparé la Lune, et le passage du jour suivant, ou le mouvement de l'horloge d'un jour à l'autre.
3. L'ascension droite du centre de la Lune qui en résulte.
4. La distance au zénit du bord supérieur ou inférieur de la Lune au moment du passage du centre par le méridien.
5. La déclinaison vraie de la Lune qui en résulte, pour le temps du pas-sage du bord de la Lune au méridien.
6. La longitude du centre de la Lune pour le moment de l'observation, comptée de l'équinoxe moyen.
7. La correction à faire aux tables pour la longitude, ou l'erreur des tables. J'ai coutume d'y mettre le signe + quand il faut ajouter à la longitude des tables : il y a des astronomes qui mettent —; il faut avoir soin de s'expliquer.
8. La latitude vraie du centre de la Lune pour le moment de l'observation.
9. La correction des tables en latitude.

Par ce moyen l'on met sous les yeux de ceux qui voudront en faire usage, toutes les choses nécessaires pour vérifier le calcul, ou réduire l'observation avec d'autres élémens, lorsqu'on aura des tables plus exactes, ou qu'on aura lieu de suspecter une observation et qu'on voudra la vérifier.

4148. J'ai mieux aimé, dans l'exemple et dans les préceptes ci-dessus, chercher la déclinaison pour le temps où le bord a été observé, que de chercher l'ascension droite pour le passage du centre de la Lune; 1°. parceque j'aime mieux choisir un instant qui est donné par une observation immédiate; 2°. parceque le calcul est un peu plus court; 3°. parceque la réduction est beaucoup moindre, quelquefois nulle; 4°. parcequ'on n'a pas toujours la hauteur observée dans le moment même où le centre passoit par le méridien.

4149. Le calcul de l'observation d'une éclipse de Soleil ou d'étoile par la Lune se réduit à trouver le temps de la conjonction vraie et la latitude au temps de la conjonction (1971); il en est de même du calcul d'un passage de Vénus ou de Mercure sur le Soleil (2153).

Calculer l'Opposition d'une planete supérieure par des observations.

4150. Les oppositions des planetes supérieures et les conjonctions des planetes inférieures sont les circonstances les plus favorables pour déterminer leurs orbites et rectifier leurs élémens (1201, 1296, 2625); il est nécessaire de donner ici un exemple de ces sortes de calculs, assez détaillé pour que l'on y puisse trouver tout ce qu'il faut faire en pareille occasion. Le calcul est à-peu-près le même que pour touver le temps de la conjonction dans un passage de Vénus sur le Soleil (2047); cependant les détails sont assez différens pour mériter une explication particuliere.

4151. Je prendrai pour exemple l'opposition de Saturne que j'ai observée au mois d'octobre 1763, en comparant Saturne avec l'étoile β du Bélier. Cette étoile passa le 24, à $11^h 29' 22''$ de temps moyen, au fil de ma lunette méridienne (2387), et Saturne y passa à $12^h 1' 37''$, ou $32' 15''$ plus tard. Cet intervalle de temps, converti en degrés (2505), donne $8° 5' 4'' \frac{1}{2}$; j'y ajoute $2'' \frac{1}{2}$, parceque l'horloge retardoit de $8''$ par jour (2506). On peut aussi commencer à réduire cet intervalle de temps observé en temps moyen avant que de le convertir en degrés; on trouvera également $8° 5' 7''$ pour la différence d'ascension droite entre Saturne et β du Bélier.

4152. L'ascension droite moyenne de cette étoile en 1750, suivant le catalogue des étoiles de la Caille, étoit $25° 13' 2'',1$. Le mouvement en ascension droite (2728) étant de $8' 11'',0$ vers 1750, et de $8' 12'',2$ vers 1800 pour l'espace de 10 ans, étoit $8' 11'',2$ vers 1757, milieu de l'intervalle entre 1750 et la fin de 1763 : ainsi, à proportion, ce mouvement de précession en ascension droite, jusqu'au 24 octobre 1763, étoit $11' 18'',5$; donc l'ascension droite moyenne de l'étoile étoit $25° 24' 20'',6$. L'aberration en ascension droite (2876) étoit alors $+ 19''7$, et la nutation en ascension droite $- 6'',7$ (2902); ainsi l'ascension droite apparente de l'étoile étoit de $25° 24' 33'',6$ le 24 octobre 1763.

4153. L'étoile ayant précédé Saturne au méridien, l'ascension droite de Saturne étoit la plus grande des deux; on ajoutera donc la différence observée $8° 5' 7''$ avec l'ascension droite apparente de l'étoile, et l'on aura $33° 29' 40'',6$ pour l'ascension droite apparente de Saturne le 24 octobre 1763, à $12^h 1' 37''$ de temps moyen, ou $12^h 17' 17''$ temps vrai.

4154. Le même jour j'observai avec un quart-de-cercle de trois pieds (2311) la hauteur méridienne du centre de Saturne ; et après toutes les réductions nécessaires (2582) , je trouvai la déclinaison de Saturne 10° 35′ 20″ boréale. Si l'on n'avoit observé que la hauteur du bord de Saturne, il faudroit chercher son diametre pour le jour donné ; pour cela on calculeroit par les tables la distance actuelle de Saturne à la Terre (1146), et l'on diroit : Cette distance est à la distance moyenne du Soleil, ou l'unité, comme le demi-diametre, vu à cette distance (1393), est à celui qu'il faut employer. Si l'on veut aussi tenir compte de la parallaxe, on dira : La distance de Saturne à la Terre est à la distance moyenne du Soleil à la Terre, comme 8″,6 sont à la parallaxe horizontale de Saturne. Il faut ensuite la multiplier par le cosinus de la hauteur pour avoir la parallaxe de hauteur qu'on ajoute à la hauteur observée ; mais pour Saturne cette quantité est insensible.

4155. Connoissant l'ascension droite et la déclinaison de Saturne, on trouve sa longitude (898) 1ˢ 4° 50′ 56″ et sa latitude 2° 43′ 25″ australe, en supposant l'obliquité apparente de l'écliptique 23° 28′ 22″ (2897). *V.* les tables, page 2.

4156. On s'est contenté souvent de trouver le lieu de la planete sans le secours d'une étoile, par le temps vrai de son passage au méridien, c'est-à-dire en la comparant seulement au Soleil ; mais il faudroit, 1°. avoir le temps vrai avec une extrême exactitude, c'est-à-dire à un quart de seconde ; 2°. supposer le mouvement de l'horloge uniforme à un quart de seconde près dans un espace de 24 heures ; 3°. être assuré avec la même précision de l'erreur du mural, ou de la lunette méridienne à la hauteur du Soleil et à celle de la planete, quoique ces hauteurs soient ordinairement très différentes ; 4°. supposer encore que cette erreur est la même le jour et la nuit, à midi et à minuit ; 5°. connoître le lieu du Soleil avec la même précision que celui de l'étoile. Toutes ces suppositions sont difficiles à admettre : on en sauveroit quelques unes en prenant des hauteurs correspondantes de la planete et du Soleil ; mais si l'on vouloit se livrer à un travail aussi pénible, il vaudroit encore mieux observer les hauteurs correspondantes d'une étoile bien connue, ou même de deux ; ce qui seroit plus exact.

4157. L'esprit de la méthode que j'ai coutume d'employer consiste à déterminer le lieu de la planete par le moyen d'une étoile, et à n'employer le lieu du Soleil que pour savoir à quelle heure le lieu de la planete en différera de six signes, c'est-à-dire sera en opposition ; par ce moyen une erreur de quelques secondes sur le temps

vrai et sur le lieu du Soleil n'influe pas sensiblement sur le résultat ; car si le temps de l'opposition est sujet à une petite erreur, qui vient de celle du lieu du Soleil, la longitude de la planete n'est pas moins exacte pour ce temps-là, puisqu'elle ne dépend que de l'étoile à laquelle on a comparé la planete.

Pour faire voir combien peu le lieu du Soleil influe sur le résultat, je choisirai le cas le plus défavorable : dans l'opposition de Mars, observée le 30 décembre 1755, le Soleil se rapprochoit de Mars de 1° 25′ 5″ par jour : si l'on diminuoit de 30″ la longitude du Soleil, on auroit l'opposition 8′ 30″ plus tard ; Mars rétrogradoit d'une seconde par minute ; ainsi on auroit 10″ de moins pour la longitude de Mars au moment de l'opposition. Calculant ensuite par les tables la longitude héliocentrique, on voit qu'elle augmentoit de 10″ en 8′ ½ de temps ; donc la différence entre l'observation et les tables changeoit de 18″ ½ seulement pour 30″ de changement dans le lieu du Soleil : mais l'erreur des tables du Soleil ne passe pas 15″ ; ainsi il y a tout au plus 9″ d'incertitude pour Mars, et encore moins pour les autres planetes supérieures ; il n'y auroit que 2″ pour Saturne (*Mém. de l'acad.* 1775, p. 225).

4158. Dans l'exemple qui précede, la longitude du Soleil, calculée pour 12h 1′ 37″ de temps moyen, se trouve de 7s 1° 19′ 22″ par les tables que j'employois alors, en sorte que le lieu de Saturne déduit de l'observation étoit plus avancé de 3° 31′ 34″ que le point opposé au Soleil : il s'agit de savoir quel jour et à quelle heure ces longitudes se sont trouvées d'accord, car ce sera le moment de l'opposition. Il est donc nécessaire de connoître le mouvement diurne de Saturne et celui du Soleil : on peut très bien les calculer par les tables, car dans un intervalle de quelques jours le mouvement calculé ne differe pas du mouvement observé ; mais on peut aussi emprunter ce mouvement de l'observation, et c'est ce que j'ai fait dans cet exemple ; car ayant fait les mêmes observations quelques jours après l'opposition, je reconnus que la longitude de Saturne avoit diminué chaque jour (ou en 24 heures moyennes) de 4′ 50″, tandis que celle du Soleil, calculée par les tables, augmentoit de 59′ 59″. La somme 64′ 49″ est le mouvement relatif, ou la quantité dont Saturne se rapprochoit tous les jours de son opposition au Soleil ; on trouvera donc l'instant où il y est arrivé en faisant cette regle de trois ; 64′ 49″ sont à 24h ou 86400″, comme 3° 31′ 34″, distance observée de Saturne à son opposition, sont à 78h 20′ 20″, qui, ajoutées au temps de l'observation, 24 octobre 12h 1′ 37″, donnent, pour le temps moyen de l'opposition vraie le 27 oct., 18h 21′ 57″.

4159. En considérant séparément le mouvement de Saturne rétrograde, qui est de 4′ 50″ par jour, et le mouvement du Soleil direct de 59′ 59″, il est aisé de trouver leur longitude pour le temps de l'opposition; par exemple, $24^h\ 0'\ 0'' : 4'\ 50'' :: 78^h\ 20'\ 20'' : 15'\ 47''$, mouvement de Saturne depuis le moment de l'observation jusqu'à celui de l'opposition : ce mouvement étant ôté de sa longitude observée $1^s\ 4°\ 50'\ 56''$ (parcequ'elle diminuoit d'un jour à l'autre), donne la longitude de Saturne au moment de l'opposition $1^s\ 4°\ 35'\ 9''$. On aura de même la longitude du Soleil en faisant une semblable proportion, $24^h : 59'\ 59'' :: 78^h\ 20'\frac{1}{3} : 3°\ 15'\ 47''$, qu'on ajoutera avec la longitude du Soleil au moment de l'observation $7^s\ 1°\ 19'\ 22''$, et l'on aura $7^s\ 4°\ 35'\ 9''$ pour la longitude du Soleil au moment de l'opposition : cette longitude est en effet exactement opposée à celle de Saturne, ce qui sert de vérification aux calculs de ces deux articles.

4160. Pour faire ces calculs plus exactement, il faut appliquer la nutation aux longitudes observées (Tables du Soleil, page 29), mais en sens contraire, afin d'avoir ces longitudes comptées de l'équinoxe moyen. Il faut appliquer aussi aux longitudes observées l'aberration (2885) en sens contraire de la table, pag. 119, et ajouter 20″ à la longitude du Soleil, pour trouver l'opposition vraie et la longitude vraie comptée de l'équinoxe moyen. Mais il faut toujours, dans les catalogues d'observation, rapporter les longitudes observées sans aucune correction, parceque les astronomes qui en font usage appliquent ensuite les corrections, suivant leurs principes et leurs méthodes: j'ai été quelquefois embarrassé pour retrouver les véritables données dans les ouvrages où l'on rapportoit des observations corrigées par des hypotheses que je voulois rectifier.

4161. Il faut aussi trouver la latitude de Saturne pour le temps de l'opposition, au moyen de la latitude observée 2° 43′ 25″; et pour cela il faut connoître le mouvement diurne en latitude, ou par les tables, ou par l'observation; mais lorsque ce mouvement est très petit, il est plus exact d'y employer le calcul des tables. Je trouve que la latitude de Saturne dut augmenter de 6″ depuis le moment de l'observation jusqu'à celui de l'opposition; donc la latitude dut être 2° 43′ 31″ pour le moment de l'opposition. Ces résultats ne different pas sensiblement de ceux que j'ai insérés dans la table des oppositions (T. II, pag. 142), quoiqu'ils aient été trouvés par d'autres observations.

4162. On peut mettre encore plus d'exactitude dans le calcul, si l'on cherche le temps et le lieu de l'opposition en y employant plusieurs jours d'observations. On calcule par les tables pour chaque observation,

observation, la longitude géocentrique apparente, affectée de l'aberration et de la nutation; on la compare avec la longitude observée, et l'on a l'erreur des tables pour chaque observation. C'est en les multipliant qu'on peut parvenir à s'assurer de la position exacte de la planete : c'est par des oppositions ainsi calculées que j'ai déterminé les orbites des planetes supérieures, comme on l'a vu dans le sixieme livre de cette astronomie.

On prend donc la quantité moyenne entre toutes ces erreurs, ou ces différences de l'observation aux tables. On prend les longitudes calculées par les tables sans aberration et sans nutation ; on y applique l'erreur moyenne ; on prend aussi deux longitudes du Soleil, sans nutation, augmentées de 20″ pour les dégager de l'aberration ; après quoi l'on cherche le temps de l'opposition par les tables corrigées, comme nous avons calculé le temps d'une conjonction (2047). On y trouve l'avantage de compenser les erreurs que produit l'incertitude sur le rayon vecteur tiré des tables : comme elles sont en sens contraire, avant et après l'opposition ou la conjonction, il est utile d'avoir autant d'observations d'un côté que de l'autre pour qu'il se fasse une compensation ; cela est sur-tout nécessaire dans les conjonctions inférieures de Vénus où l'erreur change rapidement, comme j'ai eu occasion de l'appercevoir dans les calculs que j'ai donnés, *Mém.* 1785 et 1787.

Cette méthode est longue ; mais elle est aussi la plus parfaite, puisqu'elle donne le moyen d'employer, dans un même résultat, autant de jours d'observations qu'on en a, au lieu d'une ou deux (4158) ; cela diminue la petite incertitude de chaque observation. Si l'on peut craindre 10″ d'erreur quand on n'emploie qu'une seule observation, il est probable qu'on aura une précision de 2 à 3″ en employant dans le calcul quatre ou six jours d'observations, sur-tout si la planete a été comparée à différentes étoiles.

4163. Il est bon d'observer ici que l'erreur des tables sur le lieu géocentrique calculé n'est pas la même que l'erreur sur le lieu héliocentrique, quoique ces deux longitudes soient égales au moment de l'opposition. Par exemple, dans l'opposition de Mars le 14 avril 1762, l'erreur de mes anciennes tables étoit + 2′ 28″; mais pour 2′ 28″ d'augmentation dans la longitude géocentrique, la parallaxe annuelle soustractive diminuoit de 5′ 35″, et la longitude héliocentrique augmentoit de 3′ 7″ ; ainsi, au moment même de l'opposition vraie observée, il y avoit 3′ 7″ à ôter de la longitude héliocentrique calculée par les tables, et 4′ 2″ à ajouter pour la parallaxe du grand orbe, afin d'avoir la longitude géocentrique observée ; en sorte

que la longitude héliocentrique des tables étoit trop petite de 55″ seulement, au lieu de 2′ 28″ dont la longitude géocentrique étoit trop petite : ainsi l'on doit calculer une opposition par les longitudes géocentriques des tables corrigées par l'erreur moyenne que donnent les observations de plusieurs jours, et l'on ne doit pas se servir des longitudes héliocentriques (*Mém. de l'acad.* 1775, pag. 228), à moins qu'on ne réduise au Soleil les erreurs des tables trouvées par observation: cette réduction peut se faire avec assez de précision, puisqu'on connoît fort bien les distances des planetes, et que l'erreur géocentrique est à l'erreur héliocentrique en opposition, comme la distance de la planete au Soleil est à sa distance à la Terre.

4164. Ptolemée employoit dans ses calculs les oppositions des planetes par rapport au lieu moyen du Soleil, et non par rapport à son lieu vrai. Copernic et Tycho faisoient de même. Képler fut le premier qui fit voir qu'on devoit nécessairement employer le lieu vrai, c'est-à-dire le corps même du Soleil, et y comparer les planetes (*Mysterium cosmogr.*, *cap.* 15; *de stella Martis*, *cap.* 1).

4165. Les observations faites hors des oppositions ont été très utiles pour déterminer les distances des planetes au Soleil (1215) : aujourd'hui l'on suppose généralement que ces distances sont connues avec toute l'exactitude possible par la regle de Képler (1224), dont la vérité est constatée ; c'est ce qui fait qu'on n'observe presque plus les planetes, si ce n'est dans leurs oppositions : on y trouve l'avantage de ne point employer dans ces calculs la théorie du Soleil. Il en faut excepter Mercure, dont les plus grandes digressions sont essentielles pour fixer sa théorie (1267, 1285). Au reste, en observant encore les planetes supérieures dans les quadratures, on pourra vérifier mieux les distances, sur lesquelles il y a encore quelque petite incertitude (*Mém. acad.* 1786).

La méthode que l'on vient d'expliquer pour le calcul des oppositions est la même pour les conjonctions de Vénus au Soleil, qui tiennent lieu d'oppositions, pour la théorie de cette planete (Tom. II, pag. 134). Mais pour celles-ci, il est sur-tout nécessaire d'avoir des observations avant et après la conjonction, car l'erreur change sensiblement (*Mém. acad.* 1786 et 1788).

Après avoir parlé de toutes les observations qui se font sur terre pour le progrès de l'astronomie, je vais parler des observations qui se font en mer, pour trouver les longitudes par le moyen de la Lune ; objet intéressant qui mérite bien de terminer cet ouvrage.

USAGE DES MOUVEMENS DE LA LUNE pour trouver les Longitudes en Mer.

4166. Il est de la derniere importance pour le bien du commerce maritime, et pour le salut des hommes qui s'y consacrent, de pouvoir trouver en pleine mer le degré de longitude où l'on est (54). Ce problême se réduit à savoir quelle heure il est sur le vaisseau, et quelle heure il est au lieu du départ (par exemple, à Paris). Il n'est pas difficile de trouver l'heure qu'il est sur un vaisseau en observant la hauteur du Soleil ou d'une étoile (1033, 4206); la difficulté se réduit donc à trouver en tout temps et en tout lieu l'heure qu'il est à Paris.

Philippe III, qui monta sur le trône d'Espagne en 1598, fut le premier qui, convaincu de l'importance des longitudes, proposa un prix en faveur de celui qui en feroit la découverte. Les états de Hollande imiterent bientôt son exemple (Morin, *Longit. sci.*, pag. 1). Le parlement d'Angleterre assigna en 1714 une récompense de vingt mille livres sterling, ou environ 500 mille livres de France, pour celui qui trouveroit la longitude à un demi-degré près (*Connoissance des mouv. célestes* 1765); et le duc d'Orleans, régent de France, en promit une de cent mille livres par une lettre du 15 mars 1716 (*Hist. de l'acad.* 1722, pag. 102). Ces encouragemens, joints à l'émulation naturelle des savans, ont produit de temps à autres des efforts utiles pour la découverte des longitudes.

4167. Pour trouver l'heure qu'il est à Paris, le navigateur n'auroit besoin que d'une montre assez bien réglée pour ne pas varier de plus de 2 minutes dans le cours de deux mois de navigation. Gemma Frisius, Métius, et d'autres savans de Hollande, crurent, au commencement du dernier siecle, qu'on en viendroit à bout, et l'on fit plusieurs essais, mais inutilement (Riccioli I, 493). Sully, horloger de Paris, travailla à une horloge marine en 1726; enfin Harrison, qui s'occupoit en Angleterre de cette même recherche depuis 1726, fit l'épreuve en 1762 d'une nouvelle montre marine, garde-temps, *time-keeper*, ou chronometre, qui remplit l'objet qu'on s'en étoit proposé : j'en ai rendu compte fort au long dans la *Connoissance des mouvemens célestes* pour 1765 et 1767. M. Berthoud, qui avoit donné ses idées sur cette matiere dans ses *Essais sur l'horlogerie* en 1763, a aussi exécuté d'excellentes montres, dont la vérification a été faite en mer par ordre du ministere, et dont le succès a été complet.

M. le Roy l'aîné en a fait d'autres, dont la description et les épreuves se trouvent dans le voyage de M. Cassini le fils en Amérique, fait en 1768 et publié en 1770. M. le Roy remporta le prix de l'académie en 1769; le voyage de l'Isis, fait en 1768 et 1769 sous le ministere de M. le duc de Prâlin, par M. de Fleurieu et M. Pingré, publié en 1773, le voyage de la Flore en 1771 et en 1772, sous le ministere de M. de Boynes, par MM. de Verdun, de Borda et Pingré, publié en 1778, ont constaté l'exactitude des horloges marines de M. Berthoud et de M. le Roy. MM. Arnold, Kendal, Mudge, Emery, en ont fait en Angleterre; et l'on peut compter actuellement sur l'horlogerie pour trouver les longitudes en mer[a].

4168. Mais pour savoir en pleine mer l'heure qu'il est à Paris, l'on n'a pas besoin essentiellement de ces horloges marines; on peut la trouver par le moyen de l'astronomie, en observant les éclipses (4173), les satellites de Jupiter, comme Galilée le proposa en 1631 (Riccioli I, 493; II, 609), et sur-tout la situation de la Lune: cette méthode est la plus importante, parcequ'elle peut s'appliquer à des intervalles de temps où l'on ne pourroit plus compter sur la marche des horloges, et qu'elle est nécessaire pour vérifier la régularité des horloges. Supposons que, par des tables bien calculées et bien sûres, l'on sache qu'à $2^h\ 4'$ temps vrai à Paris, la longitude de la Lune sera de $0^s\ 10°$, et qu'étant en pleine mer, j'aie trouvé par mon observation que la Lune a précisément $0^s\ 10°$, je serai sûr qu'il est $2^h\ 4'$ à Paris, aussi bien que si une excellente montre réglée à Paris me l'avoit indiqué.

4169. Dès le commencement du seizieme siecle on parla d'observer les longitudes par le moyen de la Lune; tels furent Oronce Finé, *de invenienda longitudine;* Gemma Frisius, *de Radio astronomico*, qui lui reproche de s'en être attribué l'idée, comme si elle eût été nouvelle; Apian, qui publia sa Cosmographie ainsi que Gemma Frisius en 1530; Vern., *in L. I. Geogr. Ptolem.;* Santbeck, *de Observ. phænomenorum* 1561 (Riccioli II, 609; Morin, *Scient. Long.*, pag. 115). Gemma Frisius, médecin et mathématicien d'Anvers, en parla sur-tout dans son ouvrage *de Principiis Astronomiae et Cosmographiae*, *deque usu globi ab eodem editi*, p. 58-60, édition de Cologne 1578. Il explique la maniere de trouver le lieu de la

[a] Voyez les Principes de la montre marine de M. Harrison, imprimés à Londres et à Paris en 1767; le Voyage de M. Cassini, où est la description des montres de M. le Roy; et le Traité des horloges marines de M. Berthoud, 1773, 2 vol. in-4°, avec le supplément 1787, où l'on voit les travaux immenses de cet habile horloger pour le succès de la méthode des longitudes.

Lune pour un moment quelconque, en observant sa distance à une étoile, et de calculer par les tables le moment où la Lune a dû être à ce point-là pour le lieu duquel on compte les longitudes; ce qui donne la longitude du lieu où l'on a fait l'observation.

Képler parla aussi beaucoup de cet avantage de la Lune (*Tab. Rudolph.*, pag. 37 et 42); et après lui Longomontanus (*Astron. Dan.* pag. 318, édit. de 1640).

4170. Morin, professeur royal de mathématiques et médecin de Paris, corrigea la méthode indiquée par Képler; il la rendit plus générale et la proposa au cardinal de Richelieu; celui-ci ordonna, le 6 février 1634, que la méthode de Morin seroit examinée, et il nomma des commissaires mathématiciens, Pascal, Herigone, Mydorge, Boulenger et Beaugrand : ils s'assemblerent à l'Arsenal le 30 mars; et après avoir entendu les démonstrations de Morin, ils convirent de la bonté et de l'utilité de sa méthode (*Long. Scientia*, pag. 79); mais le 10e avril ils prononcerent que l'idée n'étoit pas assez neuve, ni les tables assez parfaites pour qu'on pût dire que Morin avoit trouvé les longitudes (*ibid.*, p. 115). Hérigone le réfuta dans son Cours de mathématiques, à la fin de l'Histiodromie; et l'imperfection des tables a continué jusqu'à ces derniers temps d'être un obstacle à l'utilité de cette méthode.

4171. Halley, aussi habile navigateur que célebre astronome, avoit jugé, par sa propre expérience, que toutes les méthodes proposées pour trouver la longitude en mer étoient impraticables, excepté celle où l'on emploie les mouvemens de la Lune; en conséquence, il avoit fait tous ses efforts pour surmonter les difficultés qui s'opposoient à l'usage de cette méthode : il avoit proposé d'observer les appulses ou les conjonctions de la Lune aux étoiles (*Astr. Carol.* 1710, *append.*, pag. 67); mais les tables ne représentoient pas avec une exactitude suffisante les mouvemens observés : il songea à les corriger par le moyen de la période de 18 ans (1501); il publia même plusieurs observations de la Lune qu'il avoit faites; il espéroit trouver parmi celles qui se faisoient sans cesse à Greenwich et à Paris, lorsqu'on les publieroit, une suite d'observations suffisantes pour prédire en tout temps le lieu de la Lune; il assuroit même déja que toutes les fois qu'il avoit pu appercevoir une étoile près de la Lune, il avoit déterminé sa longitude et corrigé les erreurs inévitables dans l'estime pendant un long voyage. Dans la théorie physique de la Lune dressée par Newton, et dont Halley venoit d'avoir connoissance, les défauts des tables étoient tellement corrigés, « qu'on es-

« pere, dit-il, que l'erreur du lieu calculé passera rarement 4′; ce « qui sera peut-être suffisant pour l'usage de la navigation. »

4172. Halley s'en tenoit aux appulses et aux occultations d'étoiles, parcequ'on n'avoit alors aucun instrument propre à comparer la Lune aux étoiles qui en étoient éloignées : depuis ce temps-là, le quartier de réflexion, exécuté en 1731 par Hadley (2457, 4175), a donné un moyen facile de mesurer les distances sur mer à une minute près, aussi bien que les hauteurs de la Lune ; ce qui fournit plusieurs méthodes pour déterminer le lieu de la Lune en mer.

4173. Les éclipses de Lune, les éclipses de Soleil, les conjonctions de la Lune aux étoiles et leurs éclipses, seroient la maniere la plus naturelle de trouver la longitude; c'est celle qui fut employée le plus anciennement : mais elles sont trop rares pour pouvoir suffire aux besoins de la navigation. Pour les éclipses de Lune (2471), on cherche ordinairement par le commencement et la fin, ou par l'immersion et l'émersion, le temps du milieu de l'éclipse; on compare ce temps observé avec celui que donne le calcul pour le méridien des tables; et la différence des temps convertie en degrés donne la différence de longitude cherchée.

Les éclipses du premier satellite de Jupiter pourroient s'employer au même objet; mais il est fort difficile de les observer en mer, à moins qu'on ne soit dans une chaise marine suspendue, comme celle que M. Irwin fit exécuter en Angleterre vers 1760, et dont l'idée se trouve en entier dans le *Cosmolabe de Jacques Besson*, imprimé à Paris en 1567.

Pour les éclipses de Soleil ou d'étoiles on cherche le temps vrai de la conjonction vraie par le moyen de l'observation : ce temps vrai, trouvé pour le lieu où l'on observe, differe de celui qui est donné par le calcul pour le méridien des tables, ou de celui qu'on y a observé, et la différence est celle des deux méridiens (1971 et *suiv.*).

4174. La méthode des distances de la Lune au Soleil ou à une étoile est d'un usage beaucoup plus général. Elle a été suivie par Halley, et ensuite par la Caille qui l'a perfectionnée et simplifiée (*Ephém. de* 1755 à 1764); M. le Monnier lui-même paroît l'avoir adoptée (*Instit. astron.*, pag. 320; *Observations*, L. I, Paris 1751, in-folio). M. Maskelyne, actuellement astronome royal d'Angleterre, envoyé à l'isle de Sainte-Hélene en 1761, ayant éprouvé et vérifié l'exactitude de cette méthode, la recommanda aux astronomes et aux marins de la maniere la plus pressante dans son livre intitulé *British mariner's Guide*, *London* 1763, *in*-4°, où il donna des préceptes nouveaux et des méthodes faciles pour en faire le calcul :

enfin on calcule en Angleterre depuis 1767 un almanach nautique, tel que la Caille l'avoit proposé, et qui est uniquement fondé sur cette méthode des distances.

4175. Les instrumens avec lesquels on peut observer ces distances en mer sont des instrumens à réflexion, que Newton proposa vers 1700 (*Philos. Trans.* 1742, n°. 165; Wales, *Observations*, préf., p. xxxij). Hook avoit eu une idée pareille en 1681, comme on le voit dans ses œuvres posthumes imprimées en 1705, dans l'Histoire de la société royale de Birch (IV, 102), dans Stone, Appendix à la traduction angloise du traité des instrumens de Bion.

Ces instrumens, appellés quelquefois octans, sextans, ou *quartiers de réflexion*, sont décrits dans le Recueil des machines de l'académie, T. VI, dans les Transactions Philosophiques de 1732 (imprimées en françois à Paris, n°s 420, 425). Il faut voir aussi les mémoires rédigés à l'observatoire de Marseille par le P. Pézenas; l'Optique de Smith; le Guide du navigateur, par M. Pierre Lévêque (Nantes 1778, *in*-8°.); le Nautical Almanac de 1788; les Transactions de 1781, Mémoire de M. Atwood; la Description des octans par M. Magellan (Paris 1775, in-4°.); et la Collection des différens traités de physique, par le même (Londres 1780, *in*-4°.).

M. de Charnieres avoit proposé d'employer sur mer un héliometre (2439), qui eût plusieurs degrés d'amplitude, et qu'il appella mégametre: il en fit exécuter qui réussirent assez bien, et l'on en trouve la description dans son livre, *Théorie et pratique des Longitudes*, Paris 1772.

Magellan, dans son dernier ouvrage en 1780, traita sur-tout de l'usage du cercle entier pour observer en mer suivant la méthode proposée par Romer et Mayer (2333). Celui-ci avoit donné en 1752 à l'académie de Gottingen la description d'un instrument où il montroit le grand avantage de multiplier les observations sur les différens points de la circonférence: il l'expliqua plus au long dans son mémoire sur les longitudes, envoyé à Londres en 1755. M. le chevalier de Borda l'a encore perfectioné, *Description et usage du cercle de réflexion*, Paris 1787, 120 pages *in*-4°.

Avec un cercle d'un pied de diametre on peut pousser la précision à 2″ quand le cercle est fixé sur terre, comme on l'a éprouvé en 1788 dans la mesure des triangles entre la France et l'Angleterre. En 1790, MM. Borda, Cassini et Méchain ont observé le solstice avec un cercle de 5 pouces de diametre, et ils ont jugé qu'on pouvoit s'assurer de 1″.

Il y a sur ce cercle deux regles, dont une porte le niveau et l'au-

tre la lunette ; l'une tourne sur une face du cercle , l'autre sur la face opposée , autour du centre du cercle, et le cercle peut tourner autour d'un axe horizontal.

Supposons qu'on ait mis la lunette sur le commencement de la division , et qu'elle soit dirigée au Soleil, le niveau étant bien placé , le Soleil supposé à 24° du zénit; on retourne aussitôt le cercle ; on place le niveau , l'on fait faire 48° à la lunette pour la diriger de nouveau vers le Soleil, et l'on a le double de la distance au zénit; on revient à la premiere situation de l'instrument, et, en faisant mouvoir le cercle, on dirige la lunette au Soleil; on le retourne, et on fait faire encore 48° à la lunette pour atteindre le Soleil; la lunette se trouve alors à 96°, et l'on a le quadruple de la distance au zénit. En continuant de même , au bout de huit retournemens , on aura fait le cercle entier et 24° de plus : l'erreur qu'on pourra commetre , jointe à celle de la division, sera 16 fois moindre sur la distance cherchée de 24°, et les erreurs de divisions se compenseront. M. le Noir est occupé à faire un cercle de trois pieds dans le même genre.

Pour vérifier si les miroirs d'un instrument à réflexion sont bien paralleles, on mesure le diametre du Soleil en avant et en arriere du premier point de la division : en répétant l'observation plusieurs fois, l'on peut s'assurer de la vérification, à 20'' près, sur un quartier de réflexion de 18 à 20 pouces, où il y ait une division de Vernier (2343). Il est important de s'assurer aussi que les deux surfaces du grand miroir sont bien paralleles, en mesurant des hauteurs méridiennes dans des lieux où la latitude est bien connue, et des distances d'étoiles dont on connoît d'ailleurs la valeur exacte (785). *Voy.* M. Lévêque, *Guide du navigateur;* M. de Borda, *Description du cercle de réflexion*).

4176. Je supposerai qu'on ait observé la distance du bord de la Lune à une étoile ou au bord du Soleil; cette distance, accourcie par les réfractions et modifiée encore par la parallaxe de la Lune, doit être corrigée ou dégagée de cette double inégalité, pour qu'on ait la distance vraie ; ce sont ces deux corrections qui en font la principale difficulté, comme je le dirai bientôt.

Cette méthode des distances a l'avantage de ne dépendre essentiellement que d'une seule observation de distance ; elle n'exige pas que l'on connoisse la hauteur de la Lune avec précision ; elle dépend très peu de la déclinaison de la Lune et de la hauteur du pole ; elle ne suppose pas qu'on ait un horizon *clair-fin*, c'est-à-dire bien dégagé de vapeurs ; elle n'entraîne pas des calculs aussi longs que ceux de l'ascension droite de la Lune ; enfin la réduction de la distance

tance apparente en distance vraie, à raison de la réfraction et de la parallaxe, se peut faire avec des tables déja calculées (4204), même avec la regle et le compas, par une opération graphique (4198). Tous ces avantages prouvent que cette méthode, lorsqu'on peut l'employer, est beaucoup préférable à celle des hauteurs de la Lune : je parlerai cependant de celle-ci (4211), parcequ'il y a des cas où l'on peut observer la hauteur de la Lune et où l'on ne pourroit pas mesurer sa distance à une étoile.

4177. Pour calculer la distance de la Lune à une étoile, on cherche par les tables de la Lune sa longitude pour le temps donné ; on prend dans un catalogue celle de l'étoile ; on cherche également les latitudes, ce qui donne les distances au pole, et l'on forme un triangle au pole de l'écliptique, à l'étoile et à la Lune, que l'on résout par ces deux analogies (3915) : Le rayon est au cosinus de la différence des longitudes, comme la tangente de la plus petite des deux distances au pole boréal de l'écliptique est à la tangente du segment. On retranche ce segment de la plus grande des deux distances au pole boréal de l'écliptique, pourvu que la différence des longitudes ne passe pas 90°, et l'on a le second segment ; après quoi l'on fait cette seconde proportion : Le cosinus du premier segment est au cosinus du second, comme le cosinus de la plus petite distance au pole est au cosinus de la distance entre la Lune et l'étoile.

Si, au lieu d'une étoile, il s'agit du Soleil, auquel on veuille comparer la Lune, les deux proportions précédentes se réduisent à la suivante : *Le rayon est au cosinus de la différence des deux longitudes, comme le cosinus de la latitude de la Lune est au cosinus de la distance* (3886).

4178. Dans l'observation l'on ne mesure que la distance du bord de la Lune au bord du Soleil qui en est le plus proche ; ainsi il faut ajouter à la distance observée la somme des demi-diametres du Soleil et de la Lune, pour avoir une distance que l'on puisse comparer à celle qui est calculée. S'il s'agit d'une étoile, comme on est obligé de prendre le bord éclairé de la Lune, on ôte le demi-diametre de la Lune de la distance calculée, lorsque la Lune est croissante et plus avancée que l'étoile ; au contraire on ajoute le demi-diametre horizontal à la distance calculée, lorsque, la Lune n'étant pas encore pleine, l'étoile a une plus grande longitude, ou que la Lune, ayant passé l'opposition, est plus avancée que l'étoile.

4179. On peut aussi trouver la distance de la Lune à une étoile par la méthode de M. Maskelyne (*Philos. Trans.* 1764). On calcule d'abord la distance à-peu-près, par une proportion analogue à celle

qui a servi pour les distances au Soleil (4177), en disant : Le rayon est au cosinus de la différence des longitudes de la Lune et de l'étoile, comme le cosinus de leur différence en latitude est au cosinus de leur distance. Ensuite on corrige la distance de la maniere suivante. Au logarithme de l'arc égal au rayon 5,3144251, ajoutez ceux des sinus des deux latitudes de la Lune et de l'étoile, et du sinus verse de la différence de longitude, et le complément du logar. sinus de la distance déja trouvée à peu-près ; la somme sera le logar. d'un nombre de secondes, qu'il faut ôter de cette distance trouvée par la premiere analogie.

Démonstration. Soit N (fig. 324) le pole de l'écliptique, O et M les deux astres : on a dans le triangle OMN, $\cos. OM = \cos. N \cdot \sin. MN \cdot \sin. ON + \cos. ON \cdot \cos. MN$ (3947) $= \cos. N \cdot \sin. MN \cdot \sin. ON + \cos. N \cdot \cos. MN \cdot \cos. ON - \cos. N \cdot \cos. MN \cdot \cos. ON + \cos. ON \cdot \cos. MN = \cos. N \cdot (\sin. MN \cdot \sin. ON + \cos. MN \cdot \cos. ON) + \cos. MN \cdot \cos. ON \times (1 - \cos. N) = \cos. N \cdot \cos. (MN - ON) + 2 \sin^2. \frac{1}{2} N \cdot \cos. MN \cdot \cos. ON$ (3812 et 3819). Soit $\cos. N \cdot \cos. (MN - ON) = \cos. D$, qui est la distance trouvée par la premiere analogie, nous aurons $\cos. OM - \cos. D = 2 \sin^2. \frac{1}{2} N \cdot \cos. MN \cdot \cos. ON = 2 \sin^2. \frac{1}{2}(D + OM) \cdot \sin. \frac{1}{2}(D - OM$ (3839) ; donc $\sin. \frac{1}{2}(D - OM) = \frac{\sin^2. \frac{1}{2} N \cdot \cos. MN \cdot \cos. ON}{\sin. \frac{1}{2}(D + OM)}$. Mais puisque les latitudes sont petites, $\sin. \frac{1}{2}(D - OM)$ sera fort petit, et l'on pourra sans erreur prendre l'arc pour le sinus ; alors on aura $D - OM = \frac{2 \sin^2. \frac{1}{2} N \cdot \cos. MN \cdot \cos. ON}{\sin. \frac{1}{2}(D + OM)}$; c'est ce qu'il faut retrancher de l'arc D pour avoir OM, en supposant NM et NO de même espece, sinon la correction seroit additive. La valeur $2 \sin^2. \frac{1}{2} N$ est la même chose que le sinus verse de N (3819), qu'emploie M. Maskelyne dans la regle précédente.

Au lieu de $\sin. \frac{1}{2}(D + OM)$ on peut mettre seulement $\sin. D$; mais comme D est plus grand que OM, le dénominateur sera trop grand, la correction trop petite, et la différence trouvée trop grande. Cette formule donneroit 13″ d'erreur en supposant les deux latitudes de 5 et 10°, et l'angle de 20°, si l'on ne mettoit au dénominateur que D, en négligeant la correction OM ; ainsi, quand on aspire à une précision de quelques secondes, il faut faire une seconde opération pour trouver exactement la valeur de D — OM, qui, dans cet exemple, est de 8′ 57″.

4180. Lorsque, pour calculer les distances, on a des cosinus qui

varient beaucoup et qu'on parvient à un cosinus qui varie peu, les regles précédentes ne sont pas assez exactes ; on peut recourir alors à la formule de Murdoch (3917), dont voici la démonstration.

Dans un triangle PZS ou ACB, l'on a d'abord $2 \sin. \frac{1}{2} A^2 = \frac{\cos.(AB - AC) - \cos. BC}{\sin. AB \cdot \sin. AC}$ (3976), ou $2 \sin. AB \cdot \sin. AC \cdot \sin. \frac{1}{2} A^2 = \cos.(AB - AC) - \cos. BC$; mais $\text{cosin.}(AB - AC) = 1 - 2 \sin. \frac{1}{2}(AB - AC)^2$ (3819), et, par la même raison, $\cos. BC = 1 - 2 \sin. \frac{1}{2} BC^2$. Substituant ces valeurs, l'on aura $2 \sin. AB \cdot \sin. AC \cdot \sin. \frac{1}{2} A^2 = 1 - 2 \sin. \frac{1}{2}(AB - AC)^2 - 1 + 2 \sin. \frac{1}{2} BC^2$; donc $\sin. \frac{1}{2} BC^2 = \sin. AB \cdot \sin. AC \cdot \sin. \frac{1}{2} A^2 + \sin. \frac{1}{2}(AB - AC)^2$. Mettant le signe $\backsim$ qui exprime en général la différence de AB et BC, et changeant la forme de l'expression, on a $\sin. \frac{1}{2}(AB \backsim AC) \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{\sin. AC \cdot \sin. AB \cdot \sin. \frac{1}{2} A^2}{\sin. \frac{1}{2}(AB \backsim AC)^2}\right)}$: cette valeur peut se calculer par les seuls logarithmes, en la divisant en deux équations (3808) ; l'on fera $\frac{\sin. \frac{1}{2} A}{\sin. \frac{1}{2}(AB \backsim AC)} \cdot \sqrt{\sin. AC \cdot \sin. AB} = \text{tang.}\, a$, et l'on aura $\sin. \frac{1}{2} BC = \frac{\sin. \frac{1}{2}(AB \backsim AC)}{\cos. a}$ (M. Cagnoli, *Trigon.*, p. 609).

4181. Exemple. Je suppose que les distances des deux astres au pole de l'écliptique soient AB de 80° et AC de 30°, la différence des longitudes ou l'angle A = 110°, on aura $\frac{1}{2}(AB - AC) = 25°$, et le reste du calcul comme on le voit ci-dessous, le côté BC se trouve de 91° 1′ 59″.

Sin. AC 30° . . .	9,6989700		9,7595252
Sin. AB 80° . . .	9,9933515	Sin. ½(AB — AC), ôt.	9 6259483
	9,6923215	Tang. *a* 53° 40′ 32″,	0,1335769
Moitié	9,8461607	Otez cos. *a*	9,7725835
Aj. sin. ½A, 55° .	9,9133645	Sin. ½BC	9,8533648
	9,7595252	45° 30′ 59″4, et BC = 91° 1′ 59″	

4182. Au lieu de la formule de Murdoch, M. de Lambre substitue celle-ci : $\sin^2. \frac{1}{2} BC = \sin^2. \frac{1}{2}(AB + AC) - \cos^2. \frac{1}{2} A \cdot \sin. AB \cdot \sin. AC$, dont voici la démonstration, l'usage et l'exemple : $\cos. BC = \cos. A \cdot \sin. AB \cdot \sin. AC + \cos. AB \cdot \cos. AC$ (3949), ou $1 - 2 \sin^2. \frac{1}{2} BC = 2 \cos^2. \frac{1}{2} A \cdot \sin. AB \cdot \sin. AC - \sin. AB \cdot \sin. AC + \cos. AB \cdot$

cos. AC (3819) $=$ 2 cos². $\frac{1}{2}$ A · sin. AB · sin. AC $+$ cos. (AB $+$ AC) $=$ 2 cos². $\frac{1}{2}$ A · sin. AB · sin. AC $+$ 1 $-$ 2 sin². $\frac{1}{2}$ (AB $+$ AC) ; donc sin². $\frac{1}{2}$ BC $=$ sin². $\frac{1}{2}$ (AB $+$ AC) $-$ cosin². $\frac{1}{2}$ A · sin. AB · sin. AC : on fait $\frac{1}{2}$ (AB $+$ AC $= m$, et cos². $\frac{1}{2}$ A · sin. AB · sin. AC $=$ sin². n, et l'on a sin². $\frac{1}{2}$ BC $=$ sin². m $-$ sin². n $=$ sin. $(m + n)$ · sin. $(m - n)$ (3839).

Sin. AC. . .	9,6989700	Sin. n.	9,6047520
Sin. AB. . .	9,9933515	n = 23° 44′ 1″,5. . .	
Somme . . .	19,6923215	m = 55°.	
Moitié. . . .	9,8461607	$m + n$, 78° 44′ 1″,5	9,9915494
Cos. $\frac{1}{2}$ A. . .	9,7585913	$m - n$, 31° 15′ 58″,5	9,7151805
	9,6047520		19,7067299
		Sin. $\frac{1}{2}$ BC, 45° 30′ 59″ 4	9,8533649

4183. Quand on connoît par les tables la distance vraie, il faut l'avoir aussi par observation, c'est-à-dire qu'il faut la conclure de la distance apparente observée, en ajoutant à la distance observée l'accourcissement de réfraction, plus ou moins l'effet de la parallaxe. On peut négliger en mer l'effet de la réfraction, quand les deux astres ont plus de 60° de hauteur ; mais s'ils sont moins élevés et qu'ils ne soient pas à-peu-près dans le même vertical, il faut employer les méthodes suivantes. Elles auroient lieu de même pour les observations des distances qui sont dans les ouvrages de Tycho, d'Hevelius et de Flamsteed, et qui sont toutes affectées d'une double réfraction. Pour trouver cet accourcissement causé par les réfractions, aussi bien que l'effet de la parallaxe dans les observations de distances (914), je suppose qu'on ait observé les hauteurs apparentes des deux astres ; si c'est le bord, on en conclut la hauteur du centre. Si l'on n'a pas observé les hauteurs, il faudra calculer par les tables la hauteur et l'azimut des deux astres, tels que s et l (FIG. 341), pour l'heure de l'observation, et leur distance vraie sl par le moyen des deux distances au zénit Zs, Zl, et de la différence d'azimut sZl. On augmentera chaque hauteur vraie de la réfraction qui lui convient, moins la parallaxe ; avec ces deux hauteurs, ou leurs complémens ZS, ZL, et la même différence d'azimut Z, on calculera la distance apparente SL ; sa différence par rapport à la distance sl est l'accourcissement cherché.

En mer on observe ordinairement les hauteurs apparentes des deux astres dont on a mesuré la distance; ainsi l'on connoît les trois côtés du triangle ZSL, on calcule l'angle Z, on ajoute aux côtés ZS et ZL la réfraction, et l'on en ôte la parallaxe; on a les distances vraies Z*s*, Z*l*, au zénit, l'angle Z étant le même, d'où l'on conclut la distance vraie *ls* (3915, 4180).

4184. Ces méthodes sont rigoureuses, mais longues; il y a plusieurs moyens de les abréger : voici une approximation que la Caille employoit, à cause de la facilité d'y appliquer l'opération graphique. Après avoir cherché les réfractions qui conviennent à la hauteur de la Lune et à celle de l'étoile, on calcule l'angle à la Lune et à l'étoile, et l'on multiplie chaque réfraction par le cosinus de l'angle qui lui répond. Supposons, par exemple, que A soit le zénit (FIG. 328), B la Lune, C le lieu vrai de l'étoile, K son lieu apparent dans le vertical AKC; ayant pris BE = BC, ou tiré CE perpendiculaire sur BE, le petit arc EK sera la quantité dont la réfraction de l'étoile, c'est-à-dire CK, rapproche l'étoile C de la Lune B; or EK = CK · sin. ECK = CK · cos. KCB; donc cette correction est égale à la réfraction de l'étoile en hauteur, multipliée par le cosinus de l'angle à l'étoile. Il en est de même de la Lune, qui exige aussi une correction dans la distance, égale à la différence de la réfraction à la parallaxe, multipliée par le cosinus de l'angle à la Lune.

4185. EXEMPLE. Je suppose que le 26 mai 1754, étant par la latitude sud 35° 28′, on ait observé, à 8^h 45′ 20″ de temps vrai, la distance de Régulus au bord éclairé de la Lune 24° 56′; la hauteur de la Lune, réduite à ce même instant, en y ajoutant ce dont elle a dû augmenter ou diminuer dans l'intervalle des deux observations (4203), et diminuée de l'abaissement de l'horizon (2666), étoit à-peu-près de 5° 53′, et celle de l'étoile 24° 55′. Dans le triangle ABC l'on connoît AB = 84° 7′, AC = 65° 5′, et BC = 24° 56′; on trouve (3938) l'angle à la Lune B = 38° 28′, et l'angle à l'étoile C = 136° 58′; d'où l'on conclut que la correction de la réfraction sera 1′ 32″ pour l'étoile (soustractive, parceque l'angle à l'étoile est obtus), et 7′ 3″ pour la Lune (additive, parceque l'angle à la Lune est aigu); ce qui donne la distance corrigée de 25° 1′ 31″ (*Ephém.* 1755-64, pag. xliij, etc.).

La parallaxe horizontale de la Lune étoit alors de 58′ 2″: si on la multiplie par le cosinus de la hauteur apparente et par celui de l'angle à la Lune, on trouvera 45′ 11″, effet de la parallaxe, qu'il faut ôter de la distance observée, parceque l'angle à la Lune B est aigu; et l'on

aura enfin 24° 16′ 20″ pour la vraie distance de la Lune à l'étoile, qui répond à la distance observée 24° 56′.

4186. Ayant calculé pour le même jour cette distance de la Lune à l'étoile (4177), on trouve qu'elle étoit 7^h 0′ sous le méridien de Paris, de 24° 30′ 37″, et qu'à 8^h elle étoit de 23° 56′ 39″; donc la distance trouvée 24° 16′ 20″ avoit lieu à 7^h 25′ 14″ pour Paris: mais elle a été vue de la même quantité, et il étoit 8^h 45′ 20″ au lieu de l'observation; donc ce lieu est de 1^h 20′ 6″ à l'orient de Paris.

4187. Cette maniere de trouver l'effet de la réfraction et de la parallaxe est dans plusieurs auteurs, tels que la Caille, Bezout, etc. : elle est suffisante pour les grandes distances; mais elle pourroit différer quelquefois d'une minute de la méthode rigoureuse, si la distance étoit petite, comme de 15°.

4188. Voici donc des méthodes qui ont l'avantage d'être rigoureuses et faciles; la premiere n'exige que les logarithmes ordinaires; on en verra bientôt une qui est encore plus simple. La premiere se trouve déja dans un grand nombre de livres : je vais en donner la démonstration (M. de Borda, *Voyage de la Flore*, Tom. I; *Description du cercle de réflexion*, pag. 77).

Dans le triangle ZSL (FIG. 341) on a cette valeur (3944), $\cos. Z = \frac{\cos. LS - \cos. ZL \cdot \cos. SZ}{\sin. ZL \cdot \sin. SZ}$; et employant les dénominations ci-jointes,

D La dist. appar. du Soleil à la Lune,
x La distance vraie,
a La hauteur apparente du Soleil,
b La hauteur apparente de la Lune,
A La hauteur vraie du Soleil,
B La hauteur vraie de la Lune.

$\text{cosin. } Z = \frac{\cos. D - \sin. a \cdot \sin. b}{\cos. a \cdot \cos. b}$, et dans le triangle des lieux vrais, $\cos. Z = \frac{\cos. x - \sin. A \cdot \sin. B}{\cos. A \cdot \cos. B}$. Donc $\text{cosin. } x = \frac{\cos. D - \sin. a \cdot \sin. b}{\cos. a \cdot \cos. b} + \cos. A \cdot \cos. B + \sin. A \cdot \sin. B$.

Mais $\sin. a \sin. b = \cos. a \cos. b - \cos. a \cos. b + \sin. a \sin. b =$ (3810) $\cos. a \cdot \cos. b - \cos. (a + b)$; donc $\text{cosin. } x = \frac{\cos. D + \cos. (a+b)}{\cos. a \cdot \cos. b} \times \cos. A \cdot \cos. B + \sin. A \cdot \sin. B - \cos. A \cdot \text{cosin. } B$; et mettant encore pour $\sin. A \cdot \sin. B$ sa valeur $\cos. A \cdot \cos. B - \cos. (A + B)$, $\cos. x = \frac{\cos. D + \cos. (a+b)}{\cos. a \cdot \cos. b} \cdot \cos. A \cdot \cos. B - \text{cosin. } (A + B)$. Nous allons y substituer trois valeurs plus commodes pour le calcul, afin de n'avoir à la fin que l'unité avec des produits, et non pas des sommes de sinus et de cosinus, ce qui est bien plus long.

1°. $\text{Cos. } x = 1 - 2 \sin. \tfrac{1}{2} x^2$ (3818).

2°. $\text{Cos. D} + \cos.(a+b) = 2\,\text{cosin.}\,\frac{a+b+D}{2}\cdot\cos.\frac{a+b-D}{2}$ (3838).

3°. $\text{Cos.}(A+B) = -1 + 2\cos.\left(\frac{A+B}{2}\right)^2$ (3821). Substituant ces trois valeurs de $\cos. x$, cos. D et $\cos.(A+B)$ dans l'équation $\text{cosin.}\,x = \text{cosin. D}$, . . etc., on aura $1 - 2(\sin.\frac{1}{2}x)^2$ égal à

$$\frac{2\cos.\frac{a+b+D}{2}\cdot\cos.\frac{a+b-D}{2}\cdot\cos. A\cdot\cos. B}{\cos. a\cdot\cos. b} + 1 - 2\cos.\left(\frac{A+B}{2}\right)^2;$$

effaçant les unités, les 2, et changeant tous les signes, on aura enfin

$$\sin.\tfrac{1}{2}x^2 = \cos.\left(\frac{A+B}{2}\right)^2 - \frac{\cos.\frac{a+b+D}{2}.\cos.\frac{a+b-D}{2}\cdot\cos. A\cdot\cos. B}{\cos. a\cdot\cos. b};$$

ou, multipliant en haut et en bas par $\cos.\left(\frac{A+B}{2}\right)^2$, $\sin.\frac{1}{2}x^2 = \cos.$

$$\left(\frac{A+B}{2}\right)^2 - \frac{\cos.\frac{a+b+D}{2}\cdot\cos.\frac{a+b-D}{2}\cdot\cos. A\cdot\cos. B\cdot\cos.\left(\frac{A+B}{2}\right)^2}{\cos. a\cdot\cos. b\cdot\cos.\left(\frac{A+B}{2}\right)^2}.$$

Le second membre est égal à $\text{cosin.}\left(\frac{A+B}{2}\right)^2$ multiplié par $1 -$

$$\frac{\cos.\frac{a+b+D}{2}\cdot\cos.\frac{a+b-D}{2}\cdot\cos. A\cdot\cos. B}{\cos. a\cdot\cos. b\cdot\cos.\left(\frac{A+B}{2}\right)^2}.$$

Donc $\sin.\frac{1}{2}x = \cos.\left(\frac{A+B}{2}\right)$ multiplié par la racine de 1 moins la fraction entiere.

Ainsi la racine de la fraction seule est le sinus de l'ARC, dont le radical entier sera supposé le cosinus, puisque $\cos. = \sqrt{(1 - \sin^2.)}$; donc quand on aura évalué la fraction, on considérera sa racine comme le sinus d'un arc, on en prendra le cosinus, et l'on aura $\sin.\frac{1}{2}x = \cos.\left(\frac{A+B}{2}\right)$ par le cosinus du premier arc trouvé, et doublant la valeur du dernier arc, l'on aura la vraie distance cherchée entre le Soleil et la Lune.

4189. Pour employer cette méthode, on corrigera premièrement les hauteurs apparentes des deux astres de l'effet des parallaxes et des réfractions en hauteurs, pour avoir leurs hauteurs vraies : la correction de la parallaxe n'est autre chose que la parallaxe horizontale, multipliée par le cosinus de la hauteur apparente du centre de la Lune. La correction de la réfraction se trouve dans la table des réfractions.

On écrira les unes au-dessous des autres, la distance observée, la hauteur apparente d'un des deux astres, la hauteur apparente du second astre, la somme et la demi-somme de ces trois quantités, la différence de cette demi-somme à la distance observée, la distance vraie, la hauteur vraie d'un des deux astres, la hauteur vraie ou corrigée du second astre, la somme et la demi-somme de ces hauteurs vaies.

4190. EXEMPLE. Supposons la distance apparente du centre du Soleil au centre de la Lune 102° 30′, la hauteur apparente du centre de la Lune 27° 30′, la parallaxe horizontale 57′ 3″, la hauteur vraie ou corrigée par la réfraction et par la parallaxe de hauteur = 28° 18′ 47″, la hauteur apparente du centre du Soleil 15° 25′, la réfraction moins la parallaxe 3′ 16″, la hauteur vraie ou corrigée 15° 21′ 43″; on disposera le calcul comme il suit.

Distance apparente du Soleil à la Lune,	102°	30′	0″	D
Hauteur apparente de la Lune, ...	27	30	0	b
Hauteur apparente du Soleil, ...	15	25	0	a
Somme, ...	145	25	0	
Demi-somme, ...	72	42	30	$\frac{a+b+D}{2}$
Otez de la distance, reste, ...	29	47	30	$\frac{a+b-D}{2}$
Hauteur vraie de la Lune, ...	28	18	47	B
Hauteur vraie du Soleil, ...	15	21	43	A
Somme des hauteurs vraies, . . .	43	40	30	
Demi-somme, ...	21	50	15	$\frac{A+B}{2}$

Complém. arith.	cos.	27°	30′	0″	0,0520711	b
Complém. arith.	cos.	15	25	0	0,0159148	a
	cos.	72	42	30	9,4731014	$\frac{a+b+D}{2}$
	cos.	29	47	30	9,9384385	$\frac{a+b-D}{2}$
	cos.	28	18	47	9,9446649	B
	cos.	15	21	43	9,9841994	A
Somme, ...					39,4083901	
Demi-somme, ...					19,7041950	

Demi-somme

Demi-somme, ...					19,7041950	
Otez	cos.	21	50	15	9,9676615	$\frac{A+B}{2}$
Différ. ou sin.		33	2	11	9,7365335	sin. de l'arc.
	cos.	33	2	11	9,9234121	cos. de l'arc.
Ajoutez	cos.	21	50	15.		cos. $\frac{A+B}{2}$
Somme ou sin.		51	5	$35\frac{1}{2}$	9,8910736	$\frac{1}{2}x$
Double ou dist. vraie,		102	11	11		

Ainsi l'on écrit à côté des hauteurs apparentes les complémens arithmétiques des cosinus de ces hauteurs, et à côté de la premiere demi-somme, du reste qui la suit, et des hauteurs vraies, les logarithmes de leurs cosinus : on prend la somme, et après cela la demi-somme de ces six logarithmes ; de cette demi-somme on retranche le cosinus de la demi-somme des hauteurs vraies, et l'on a le sinus d'un angle que l'on cherche dans les tables de logarithmes : on prend enfin le logarithme cosinus de cet angle, qu'on ajoute au logarith. cosinus de la demi-somme des hauteurs vraies, et l'on a le sinus de la moitié de la distance corrigée que l'on cherche ; elle est dans cet exemple de 102° 11′ 11″.

On trouve 3″ de plus par la méthode de Dunthorn (art. 4192), qui donne le même exemple à la fin du *Nautical Almanac* 1772 ; l'exemple précédent est aussi dans la *Connoissance des temps* de 1775 ; il y en a un autre dans celles de 1778 et 1780.

4191. M. Fuss, dans les Mémoires de Pétersbourg 1779, pag. 310, a examiné cette méthode et la pluplart des autres qui étoient connues, et il y a ajouté ses réflexions, qui peuvent simplifier le procédé ; enfin M. de Lambre a trouvé une formule qui est encore plus expéditive pour le calcul, quoiqu'il y ait deux cosinus naturels.

$$\cos. x = \frac{2 \cos. \frac{1}{2}(a+b+D) \cdot \cos.(a+b \sim D) \cdot \cos. A \cdot \cos. B}{\cos. a \cdot \cos. b} - \cos.(A+A).$$

Pour la démontrer mettons la formule précédente (4188) sous cette forme :

$$\sin. \tfrac{1}{2}x = \sqrt{\left(\cos^2. \tfrac{1}{2} \cdot \overline{A+B} - \frac{\cos. \frac{1}{2}(a+b+D) \cos. \frac{1}{2}(a+b \sim D) \cdot \cos. A \cdot \cos. B}{\cos. a \cdot \cos. b}\right)},$$

ou $\sin^2. \frac{1}{2}x = \cos^2. \frac{1}{2}(A+B) - m$; on aura $\frac{1-\cos. x}{2} = \frac{1+\cos.(A+B)}{2} - \frac{2m}{2}$ (3819, 3820), et $\cos. x = 2m - \cos.(A+B)$, dans laquelle il ne faut que rétablir la valeur de m (M. Cagnoli, pag. 472).

M. Romme a donné une formule de même espece dans la *Connoissance des temps* de 1789 : M. de Lambre, qui est toujours de la plus grande fécondité, a même trouvé 18 formules pareilles ; mais la derniere est la plus simple de toutes : en voici le calcul, en employant les nombres de l'exemple précédent.

cos. $\frac{1}{2}(a+b+D)$	12°	42′	30″	9,4731014
cos. $\frac{1}{2}(a+b \backsim D)$	29	47	30	9,9384385
cos. A	15	21	43	9,9841994
cos. B	29	18	47	9,9446649
Compl. cos. a	15	25	0	0,0159148
Compl. cos. b	27	30	0	0,0520711
Log. 2				0,3010300
0,512177	somme			9,7094201
— 0,723268 cos. (A + B)	43°	40′	30″	
— 0,211091 cos. x. . . .	102	11	11,	distance vraie.

4192. On a cherché plusieurs méthodes d'approximation, pour abréger le calcul de ces corrections. M. Maskelyne en a donné une, pages 40 et 42 du livre que j'ai cité (4174) ; et il en a rendu l'usage plus aisé par le moyen de trois tables, qui sont dans le *Nautical Almanac* de 1772 : j'en ai donné les démonstrations dans ma seconde édition, de même que d'une méthode de Lyons, mort en 1775 (*Naut. Alm.* 1767). Je me contenterai ici de démontrer la méthode de Dunthorn, mort vers 1775, qui est la plus simple de toutes.

Soit Z le zénit (FIG. 341), L le lieu apparent de la Lune, S celui de l'étoile, l et s les lieux vrais; les arcs Ll et Ss étant la différence de la réfraction à la parallaxe pour la Lune et pour le Soleil, ou la réfraction seule pour l'étoile, les triangles ZLS, Zls, donnent ces proportions (3967); sin. ZL · sin. ZS : 1 :: sin. verse LS — sin. ver. (ZL — ZS) : sin. verse Z, et sin. Zl · sin. Zs : 1 :: sin. verse ls — sin. ver. (Zl — Zs) : sin. v. Z; donc sin. ZL · sin. ZS : sin. Zl · sin. Zs :: sin. ver. LS — sin. verse (ZL — ZS) : sin. verse ls — sin. verse (Zl — Zs) :: cos. (ZL — ZS) — cosin. LS : cosin. (Zl — Zs) — cos. ls ; donc log. (cos. $\overline{\text{ZL} - \text{ZS}}$ — cos. LS) + logar. sin. Zl + logar. sin. Zs — logar. sin. ZL — log. sin. ZS = log. (cos. $\overline{\text{Z}l - \text{Z}s}$ — cos. ls). On a mis dans une table les quatre logarithmes, sin. ZL, + sin. ZS, — sin. Zl, — sin. Zs, qui sont les distances au zénit, ap-

parentes et vraies ; on retranche cette somme du logar. de (cosin. $\overline{ZL - ZS}$ — cos. LS) ; ce qui donne le logarithme, et par conséquent la valeur de (cos. $\overline{Zl - Zs}$ — cos. ls) ; l'on fait cette quantité elle-même $=$ N, et l'on a enfin cos. $ls =$ cosin. $\overline{Zl - Zs}$ — N ; c'est la distance vraie que l'on cherche.

Si la distance excede 90, il faut avoir égard au changement de signes ; au lieu de — cos. LS, on écrit +; au lieu de cos. $\overline{Zl - Zs}$ — N, on met N — cos. $\overline{Zl - Zs}$ (*Nautical Almanac* 1767, pag. 67; 1772, pag. 38).

4193. Pour que cette méthode de Dunthorn soit la plus courte, il faut qu'on ait la table des *différences logarithmiques*, insérée dans le *Nautical Almanac* de 1767, dans la *Connoissance des temps* de 1779, p. 222, et, avec plus d'étendue, dans les *Tables requisite*, etc. de 1781.

Du cosinus naturel de la différence des hauteurs apparentes observées, on ôte le cosin. naturel de la distance apparente (on l'ajoute si elle passe 90°) ; on prend le logarithme du reste ; on en ôte la différence logarithmique, prise dans la table, et l'on a le logarithme du nombre N : il faut ôter ce nombre du cosinus naturel de la différence des hauteurs vraies (on ôte celui-ci quand la distance passe 90°) ; et l'on a le cosinus naturel de la distance vraie : dans l'exemple (4190) on a les quantités suivantes :

Différence des haut. appar. 12° 15′ cosinus naturel,	0,977844
Cosinus de la distance apparente, 102° 30′, ...	0,216440
Ajoutez, parceque la distance surpasse 90°, ...	1,194284
Logarithme, ...	0,07710,8
Otez la différence logarithmique des tables, . . .	314,4
	0,07396,4
Nombre correspondant N, ...	1,18567,0
Cos. de la différ. des haut. vraies, 12° 57′ 4″ ; *ôtez*	0,97456,2
Cosin. de la distance vraie cherchée, 102° 11′ 14″,	0,2110,8

En calculant plus rigoureusement la différence logarithmique, on la trouveroit 3150, et la distance vraie 102° 11′ 10″ ; elle ne differe que d'une seconde du résultat que donne la méthode rigoureuse, 102° 11′ 11″

4194. La table des différences logarithmiques doit contenir dans

cet exemple le logarithme du cosinus de la hauteur apparente de la Lune 27° 30′ 0″, moins le logar. cos. de la hauteur vraie 28° 18′ 47″, plus celui de la hauteur apparente du Soleil, 15° 25′ 0″, moins celui de sa hauteur vraie, 15° 21′ 43″; ce qui feroit exactement 3149,85, au lieu de 3144 que donne la table (*Tables requisite*, p. 22).

4195. Dans la table dont je me suis servi, l'on n'a pas employé la hauteur du Soleil ou de l'étoile, on s'est contenté de diminuer de 12,0 la différence logarithmique, ce qui suffit pour corriger la réfraction. Mais pour le cas où l'étoile seroit très basse, M. Dunthorn a donné une petite table de correction qui n'est pas dans la Connoissance des temps de 1779, et que je vais placer ici pour y suppléer.

Haut. du Sol. ou de l'étoile.	Corrections de la différence logarith.		Hauteur du Soleil ou de l'étoile.	Corrections de la différence logarith.	
	Etoiles.	Soleil.		Etoiles.	Soleil.
3°	2,7	2,8	12	0,3	0,7
4	1,8	1,9	14	0,2	0,7
5	1,3	1,4	15	0,1	0,7
6	0,9	1,1	25	0,1	0,8
7	0,7	0,9	26	0,0	0,9
8	0,6	0,8	32	0,0	1,0
9	0,5	0,7	50	0,0	1,5
10	0,4	0,7	70	0,0	1,8

C'est ce qu'il faut ajouter à la différence logarithmique, prise dans la table de Dunthorn, pour tenir lieu de la différence des logar. cos. de la hauteur vraie, et de la hauteur apparente du Soleil ou de l'étoile quand la réfraction est trop grande ou trop inégale. Mais au-dessus de cette hauteur de 25°, la réfraction est comme le cosinus de la hauteur, le changement de la réfraction est comme celui du cosinus de la hauteur, et la différence des logar. cos. de la hauteur vraie et de la hauteur appar. est constamment de 12,0 ou 0,000120; en sorte que la table des différences logarithmiques ne change que par la parallaxe et la réfraction de la Lune.

4196. Pour tenir compte de la parallaxe du Soleil dans les distances, il faut ajouter aux différences logarithmiques la quantité contenue dans la troisieme colonne de la table précédente; par exemple, 1,8 pour 70° et au-dessus.

Pour former les nombres de cette double table, il ne s'agit que

d'avoir exactement la différence des logar. de sin. ZS et sin. Z*s*, en prenant la réfraction de l'étoile ou du Soleil et la parallaxe du Soleil, et de retrancher cette différence de 0,000120, qu'on a employé par-tout dans la table des différences logarithmiques. Ainsi, pour 8° de hauteur, on retranchera du sinus de 82°, d'abord celui de 82° 6′ 30″, ensuite celui de 82° 6′ 21″ pour le Soleil; on aura 114 et 112, en se bornant à 7 chiffres : ce qui retranché de 120 donne 6 pour l'étoile et 8 pour le Soleil, comme dans la table précédente. Ainsi, quoique cette méthode ne soit pas aussi rigoureuse que la précédente (4190), elle a toute l'exactitude nécessaire, et elle est plus courte.

4197. M. Maskelyne a perfectionné la méthode de Dunthorn, en évitant les sin. naturels et la distinction des différens cas (*Tab. req.* p. 32-36 de l'explicat.) : voici la démonstration de son procédé. La formule de Dunthorn est $\cos. ls = \cos.(Zl - Zs) - [\cos.(ZL - ZS) - \cos. LS] \cdot \frac{\sin. Zl \cdot \sin. Zs}{\sin. ZL \cdot \sin. ZS}$, que nous exprimerons plus en abrégé par $\cos. H - (\text{cosin. } h - \text{cosin. } LS) \cdot C = \cos. H - P$, on aura $\cos^2. \frac{1}{2} ls = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos. ls$ (3820) $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos. H - \frac{1}{2} P = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos. H - \sin^2. \frac{1}{2} M$, en prenant $\frac{1}{2} P$ pour le carré du sinus d'un arc appellé $\frac{1}{2} M$: mais $\frac{1}{2} - \sin^2. \frac{1}{2} M = \frac{1}{2} \text{cosin. } M$ (3818), et substituant cette valeur, on a $\cos^2. \frac{1}{2} ls = \frac{1}{2} \cos. M + \frac{1}{2} \cos. H = \cos. (\frac{1}{2} M + \frac{1}{2} H) \cdot \cos. (\frac{1}{2} M - \frac{1}{2} H)$ (3838) ; expression facile à calculer quand on connoîtra M. Pour la trouver, on considérera que $\sin^2. \frac{1}{2} M = \frac{1}{2} P = \frac{1}{2} (\text{cosin. } h - \text{cosin. } LS) \cdot C = \sin. (\frac{1}{2} LS + \frac{1}{2} h) \cdot \sin. (\frac{1}{2} LS - \frac{1}{2} h) \cdot C$ (3839) ; cette expression est également facile : d'où résulte la regle suivante : Faites la demi-somme et la demi-différence de la distance observée LS et de la différence *h* des hauteurs apparentes, la somme de leurs logar., en y ajoutant le logar. C, c'est-à-dire en ôtant la différence logar., ou ajoutant son complément, et prenant la moitié, sera le logar. sin. d'un arc $\frac{1}{2}$M. Faites la somme et la différence de cet arc, et de la demi-différence $\frac{H}{2}$ des hauteurs vraies, ajoutez ces logarith. ; prenez la moitié, et vous aurez le log. cos. de la moitié de la distance vraie *ls*. Voici l'exemple (4193) calculé par cette méthode.

Différence des hauteurs appar. . .	12°	5′	0″
Distance apparente	102	30	0
Demi-somme	57	17	30

Demi-somme		57 17 30
Demi-différence		45 12 30
Sinus 57° 17′ 30″		99250191
Sinus 45 12 30		98510584
Compl. de la differ. logarithmique		99968490
Somme		19,7729265
½ M, demi-somme, sin.	50° 20′ 58″ .	9,8864632
$\frac{H}{2}$, demi-différ. haut. vr.	6 28 32. .	
Cos. somme	56 49 30. .	97381446
Cos. différence . . .	43 52 26. .	98578552
		19,5959998
Moitié . . . . cos.	51 5 35. .	9,2979999
Distance vraie . . .	102 11 10. .	

4198. Ces corrections de réfraction et de parallaxe se pourroient faire avec une précision suffisante, même par des opérations graphiques, c'est-à-dire avec la regle et le compas (4053), puisqu'il ne s'agit que d'avoir l'angle à l'étoile et l'angle à la Lune (4184), dans un triangle dont on connoît les trois côtés; car la parallaxe de hauteur multipliée par le cosinus de l'angle à la Lune, donne la parallaxe de distance; il en est de même de la réfraction de l'étoile. C'est ce que la Caille a exécuté fort adroitement par le moyen de son *Chassis de réduction*. On a un cercle HEO (FIG. 340) d'environ un pied de diametre, divisé en degrés, dont le diametre HO représente l'horizon; l'on prend les arcs HA, OA, égaux à la hauteur de l'étoile; la ligne AA est l'almicantarat de l'étoile (4051); on prend les arcs HL, OL, égaux à la hauteur de la Lune, et la ligne LL est l'almicantarat de la Lune. On prend, sur la gauche, HM au-dessus de l'horizon, et à droite l'arc ON au-dessous de l'horizon, égaux à la distance de la Lune à l'étoile; au-dessus des points M et N des arcs MG et NF égaux à la hauteur de l'étoile, et des arcs ME, NE égaux à la hauteur de la Lune; par le centre C l'on tire le rayon CD perpendiculaire sur les lignes GF, EE; enfin l'on prend avec le compas la portion ST de la ligne EE, comprise entre la perpendiculaire CSD et le point de rencontre de la premiere ligne AA avec la derniere ligne EE; cette portion est la parallaxe de distance, en supposant que CD soit la parallaxe horizontale, soustractive quand le point T est au-dessus du point S. Ce même intervalle ST est la premiere partie de la réfraction de distance, en supposant que SE représente la réfraction de la Lune à sa hauteur actuelle; cette correction est contraire à celle de la parallaxe.

On prend sur la ligne GF, qui appartient à l'étoile, l'intervalle Vz entre la perpendiculaire CVD et le point de rencontre de l'almicantarat LL de la Lune et de la ligne zVF, qui appartient à l'étoile : cette portion Vz est la seconde partie de la réfraction de distance, en supposant que VG soit la réfraction de l'étoile en hauteur; elle est additive quand le point z est au-dessus du point V.

Comme la parallaxe horizontale est sujette à varier, et que, non seulement la réfraction en hauteur change beaucoup, mais encore les lignes SE, VG, qui les représentent dans notre figure, la Caille a joint à son chassis de réduction des échelles de réfraction et de parallaxe qui répondent aux différentes valeurs de chacun de ces deux élémens : on en trouvera les figures et les dimensions dans mon *Exposition du calcul astronom.* et dans le *Traité de Navigation de Bouguer*, édition *in*-8°. par la Caille, dont je prépare une troisieme édition en 1791 avec des notes. Mais j'ajouterai ici une explication pour faire sentir les fondemens de ces opérations.

4199. La parallaxe de la Lune en hauteur est comme le cosinus de la hauteur apparente; ainsi le rayon CD représentant la parallaxe horizontale, la ligne SE, qui est le cosinus de la hauteur ME de la Lune, exprime la parallaxe de hauteur; la partie ST pour le rayon SE est le cosinus de l'angle opposé au côté dont le complément est représenté par HA (4052) : elle est donc égale à la parallaxe de hauteur multipliée par le cosinus de l'angle à la Lune, c'est-à-dire à la parallaxe de distance.

Si donc la parallaxe horizontale ne changeoit point, le rayon CD seroit constamment l'échelle de la parallaxe; mais si la parallaxe augmente, il faudra diminuer l'échelle dans la même proportion (1845); c'est ce que l'on a observé dans l'échelle de parallaxe.

4200. A l'égard de la réfraction l'échelle doit varier, et même fort inégalement, pour deux raisons; la premiere est la hauteur, puisque la réfraction à 48° est 30 fois plus petite qu'à l'horizon; la seconde vient de ce que la ligne SE, qui est ici le cosinus de la hauteur de la Lune et qui suit le rapport des parallaxes, ne suit pas le rapport des réfractions : ainsi, pour que la partie ST soit la réfraction de hauteur multipliée par le cosinus de l'angle à la Lune, il faut que SE soit la réfraction de hauteur, que le rayon général CD soit la réfraction de hauteur divisée par le cosinus de la hauteur, et par conséquent que l'échelle des réfractions pour 50 soit 7 fois plus grande que l'échelle pour 5°, parceque la réfraction de 5° (10′ 10″ suivant la Caille) augmentée en raison inverse du cosinus de la hauteur, c'est-à-dire 10′ 12″, est 7 fois plus grande que la

réfraction de 50° (55″ 8) augmentée de même, c'est-à-dire, 1′ 27″. On n'emploie que l'échelle d'une minute de réfraction, parceque la réfraction à 50°, ainsi augmentée, est 43 fois plus petite que la parallaxe de 62′ : il auroit donc fallu rendre l'échelle de réfraction d'une grandeur incommode (*Exposition du calcul astronom.* art. 241).

4201. On trouve aussi l'heure qu'il est par la hauteur du Soleil ou d'une étoile, en y employant le chassis de réduction de la Caille, et sans le secours de la trigonométrie (1033). Pour cela on prend OB (FIG. 330) égal à la hauteur du pole, BG égal à la distance de l'étoile au pole, OK égal à la hauteur de l'étoile; on tire les lignes CB, CG, GD, KN, FE, et la ligne CE est le cosinus de l'angle horaire (4052). Si l'on prend le double de ce cosinus avec un compas, et que l'on porte cette ouverture de compas sur la circonférence du cercle, on a la différence entre 6^h et l'angle horaire, ou leur somme, si le point E est au-dessous du centre C. L'angle horaire de l'étoile étant ajouté à la différence des ascensions droites du Soleil et de l'étoile pour cet instant, (si l'étoile a passé le méridien), donnera le temps vrai (1034). Dans le chassis de réduction, on porte cette ouverure 2 fois sur la circonférence du cercle, au-dessous du point O, si le point E est au-dessus du centre, et l'on rencontre le point qui marque l'angle horaire en temps, parcequ'on y a mis les heures de 60 en 60′, en allant de O vers A pour que les mêmes divisions servissent à trouver les degrés et les minutes de temps. Voyez la figure et l'exemple dans l'*Expos. du calc. astr.* art. 239 et 242, et dans le *Traité de Navigat. de Boug. et la Caille*, art. 542, 562 et 589; enfin le chassis de réduction peut servir à trouver l'azimut (4053).

4202. Pour l'intelligence entiere de ce chassis de réduction, il me reste à dire un mot du cadre qui l'environne, et dont je n'ai point assez démontré les fondemens dans le livre que je viens de citer. Le bord supérieur est divisé en $77'\frac{1}{2}$; c'est le plus grand mouvement que la Lune ait en deux heures; la ligne inférieure est divisée en 120′, qui font les deux heures; les lignes verticales à droite et à gauche sont divisées en 2° 35′; c'est le plus grand mouvement de la Lune en 4 heures de temps : au moyen de ces 4 divisions l'on fait aisément avec le compas la regle de trois nécessaire pour trouver dans l'Almanach nautique à quelle heure la Lune auroit dû avoir la distance qu'on a déduite de l'observation. Par exemple, pour faire cette proportion $2° 9' : 4^h :: 57\frac{1}{2} : 1^h 47'$, on tire une ligne horizontale par le point de 2° 9′, on y marque une longueur de $57'\frac{1}{2}$, et par ce point on tire une ligne de l'angle supérieur du chassis; elle vient marquer sur

sur la ligne inférieure $1^h 47'$. En effet, si le mouvement de la Lune étoit de $2° 35'$, la ligne inférieure marqueroit l'heure cherchée en y portant simplement le mouvement de $57'\frac{1}{2}$: mais, au lieu de $2° 35'$, on n'a que $2° 9'$; il faut donc que le dernier terme soit plus grand dans le rapport de $2° 35$ à $2° 9'$; c'est ce qu'on fait par le moyen des deux triangles semblables que je viens d'indiquer.

4203. Quand on observe la hauteur de la Lune et celle de l'étoile un peu avant ou après l'observation de la distance, on est obligé de réduire les hauteurs à ce même moment ; pour cela il suffit d'avoir la quantité dont la hauteur change en une minute de temps, et cette quantité est égale à $15'$ multipliées par le cosinus de la hauteur du pole et le cosinus de l'amplitude de l'astre (4018); on en trouve une table fort détaillée dans la Connoissance des temps de 1765 et de 1772, pour tous les degrés d'amplitude et de hauteur du pole : on y voit, par exemple, qu'à $49°$ de latitude, un astre, qui est à $40°$ du vrai point d'orient et d'occident, s'éleve ou s'abaisse de $7' 32''$ en une minute. La Caille a joint à son chassis de réduction une échelle, où l'on peut prendre avec un compas cette même quantité avec une precision suffisante ; cette échelle est un triangle rectangle isoscele, dont chaque côté a $15'$, et exprimant le sinus total, est divisé dans le même rapport que les sinus de divers degrés de latitude et d'azimut (*Exposition du calcul astron.* art. 240 ; *Traité de navigation*. art 542). Pour une étoile il faudroit employer $15' 2'' 5$, et pour la Lune environ $14' 29'' 5$ par minute, mais on peut négliger la différence qu'il y a entre la Lune et le Soleil.

M. Margett a publié aussi à Londres, en 1790, des figures pour trouver graphiquement la correction des réfractions et des parallaxes, et l'usage en est avantageux.

4204. *Les grandes tables* calculées en Angleterre sont un moyen simple et commode d'avoir ces corrections de réfraction et de parallaxe ; elles y sont détaillées pour chaque degré de distance et pour chaque degré de hauteur de la Lune et de l'étoile. Ces tables calculées en entier [a] par MM. Lyons, Parkinson le jeune et Williams, ont été imprimées à Cambridge en 1772, en un gros volume de 1200 pages *in-folio*, sous ce titre : *Tables for correcting the apparent distance of the moon and a star from the effects of refraction and parallax, published by order of the commissioners of longitude :* j'en ai donné l'explication traduite en françois dans la *Connoissance des temps* de 1775. Ces tables sont si détaillées et si simples pour l'usage,

[a] Elles avoient été commencées en 1769 par Witchell, mais son entreprise n'eut pas de suite.

qu'un pilote, sans savoir l'astronomie ni le calcul, peut en une demi-heure de temps trouver la longitude en mer à un demi-degré près. Il suffit de connoître sept à huit étoiles dans le ciel, de pouvoir mesurer une distance avec le quartier de réflexion, et de savoir l'addition et la soustraction. Mais il faut avoir le *Nautical Almanac* ou la *Connoissance des temps* pour l'année où l'on se trouve.

4205. Sur la comparaison des méthodes précédentes, je vais rapporter ce que M. Carouge a éprouvé après s'en être occupé long-temps avec intelligence et avec soin, et avoir appliqué chaque méthode à beaucoup d'exemples.

Les grandes tables angloises donnent le plus souvent la distance vraie à une ou deux secondes près: M. Carouge ne les a jamais trouvées en erreur de plus de 7″, et rarement même de 5″; le moins habile calculateur peut en apprendre l'usage en deux heures; et en huit minutes de temps on trouve la distance vraie avec toute l'exactitude nécessaire. Il faut avoir soin de consulter l'errata qui est considérable.

La formule de M. de Borda (4190) n'exige que 17 à 18′; elle est rigoureuse à un dixieme de seconde; elle ne suppose de la part du calculateur aucune attention aux différens cas de la trigonométrie. Celle de M. de Lambre est encore un peu plus courte.

La méthode trigonométrique (4183) n'est guere plus longue; mais elle exige des attentions et une connoissance de la trigonométrie, qui font qu'elle est moins à la portée du commun des navigateurs.

La méthode de Dunthorn (4193) n'exige que 12 minutes de temps; ainsi, après celle des grandes tables, c'est la plus courte; son application est aisée, elle est suffisamment exacte; mais pour l'employer il faut avoir une table des sinus naturels et une des différences logarithmiques.

La méthode des angles au Soleil et à la Lune (4184) n'est pas plus courte que les autres; elle est beaucoup moins exacte si les distances ne sont pas fort grandes, mais elle a une grande facilité par l'opération graphique, quand on se contente d'une précision de 30″.

4206. Il ne manquoit plus, pour l'entiere facilité des calculs de la navigation, que d'avoir des tables horaires pour trouver l'heure en mer par la hauteur du Soleil ou de l'étoile, et éviter la résolution du triangle PZS, dans lequel on connoît les trois côtés. J'avois engagé, il y a plus de vingt ans, M. Pierre Levêque, habile professeur d'hydrographie et de mathématiques à Nantes, à calculer ces tables horaires, comme il avoit calculé celles du Nonagésime pour tous les pays

de la Terre (1685). En attendant ces tables, qui devoient être d'une grande étendue, il en avoit fait qui abrégeoient déja beaucoup le calcul (1037). M. Cassini calcula avec M. Wallot 18 pages de tables horaires ; on les trouvera dans son voyage publié en 1770 : mais il falloit en avoir pour tous les degrés de latitude, à chaque déclinaison et à chaque hauteur, au moins jusqu'à 30°. J'espérois bien procurer ce nouveau secours aux navigateurs, et je l'avois déja annoncé dans ma seconde édition en 1771 : enfin madame le François, ma niece, a calculé toutes ces tables en 1790 avec un courage au-dessus de son âge et de son sexe, et j'espere les publier bientôt.

Pour simplifier ces calculs, j'ai une table des moitiés des logarithmes de sinus, de demi-degré en demi-degré, une des demi-sommes des complémens des logar. cos. déclin. et cos. latit., qui n'a que 24 nombres pour chaque latitude, et une pour convertir en temps les moitiés des angles trouvés par la formule : alors il n'y a qu'une seule addition de trois logarithmes pour employer la formule 3976 ; on n'a même que deux logarithmes à ajouter en calculant pour les différens degrés de latitude : par exemple, les deux différences (1018) pour 2° de latitude, 4° de hauteur et 22° de déclinaison boréale, sont 33 et 53 ; et ce sont les mêmes à 4° de latitude quand on commence à 24° de déclinaison : ainsi on n'a que les mêmes sommes des deux premiers logarithmes à transcrire, à l'exception d'une seule.

On auroit pu aussi exécuter ces calculs par la formule 3944 : cosin. angle $= \frac{\text{sin. hauteur}}{\text{cos. déclin.} \times \text{cos. latit.}} \pm$ tang. déclin. $\times$ tang. latit. : le signe $+$ est pour les déclinaisons opposées au pole élevé. On auroit fait, pour chaque degré de latitude et de déclinaison, une table des complémens des logarithmes du dénominateur, et du nombre naturel qui forme le second terme ; et comme on n'a besoin que des dixiemes de minute, on auroit trouvé facilement l'angle cherché dans les tables des sinus naturels, de minute en minute, qui sont entre les mains de tout le monde; car celles qui sont de dix en dix secondes sont si rares, que je ne les connois chez aucun autre astronome que moi.

Dans chacune de ces tables, pour trouver l'heure, les nombres qui sont pour 0° de déclinaison se calculent par cette formule encore plus simple : cos. P $= \frac{\text{cos. ZS}}{\text{sin. PZ}}$.

Pour trouver l'heure et en même temps la latitude par deux hauteurs, voyez l'article 3992.

4207. La difficulté de voir l'horizon pendant la nuit fait qu'on ne

peut observer la hauteur d'une étoile qu'à 2 ou 3 minutes près, et même celle de la Lune, dont les reflets empêchent souvent qu'on puisse bien distinguer l'horizon. On préfere donc les hauteurs du Soleil, qui peuvent se prendre à une minute près pour observer le temps vrai, que l'on a par conséquent à 15″ près : avec quatre octans faits en Angleterre, dont M. de Verdun et ses officiers se servoient en 1770 pendant six mois, on ne trouvoit presque jamais plus d'une minute de différence entre les hauteurs méridiennes, quoiqu'il n'y eût qu'un seul octant à lunette, les trois autres étant à pinnules.

4208. Les distances de la Lune au Soleil sont préférables à celles de la Lune aux étoiles, parceque la scintillation des étoiles, et d'autres fois la difficulté de les bien voir, font des obstacles à l'exactitude des distances de la Lune aux étoiles. D'ailleurs les montres à secondes, quoique bonnes, sont à peine suffisantes pour conserver l'heure qu'on a déterminée pendant le jour par des hauteurs du Soleil; et les hauteurs d'étoiles sont plus difficiles à prendre que celles du Soleil.

L'on choisit, tant qu'on peut, des distances qui soient entre 40° et 90°: on peut aller jusqu'à 120° avec les instrumens ordinaires; mais il est alors plus difficile de les tenir dans le plan des deux astres. Au contraire, si la distance est trop petite, les réductions sont trop fortes, et ne sont pas assez exactes, du moins par certaines méthodes (4187).

Il faut, autant qu'il est possible, que l'astre le moins élevé ait au moins 10° de hauteur, à cause de l'inconstance des réfractions.

4209. Les observations sont plus exactes, 1°. lorsque la Lune est périgée, 2°. lorsque la Lune descend et que le Soleil monte, comme aux environs du dernier quartier, 3°. quand les deux astres sont à-peu-près dans le même vertical, de maniere que le changement de la parallaxe contribue à rendre le changement de distance plus prompt, ce qui rend le résultat plus exact.

4210. Comme l'on sait à-peu-près de combien est la distance de la Lune à l'étoile que l'on veut mesurer, par le calcul de l'Almanach nautique, on fixe l'alhidade sur le degré, on place l'instrument à-peu-près dans le plan des deux astres, et en le faisant balancer légèrement, il est aisé de les trouver l'un et l'autre dans la lunette.

Il est difficile de faire de bonnes observations quand on a un gros temps, soit avec le vent arriere qui augmente le roulis, soit *au plus près*, le tangage étant ordinairement fort; mais lorsqu'on a vent largue et que le vaisseau est moins agité, on peut trouver la longitude au moins à un degré près, dans l'espace de trois quarts d'heure au

plus, en supposant qu'on ait un Almanach nautique, avec les tables auxiliaires.

4211. La hauteur de la Lune peut servir aussi à trouver les longitudes, et cela de différentes manieres. Leadbetter proposa une méthode pour trouver le lieu de la Lune par une seule hauteur observée, en supposant la latitude de la Lune et l'inclinaison de son orbite connues par les tables. M. le Monnier en a donné une, dans laquelle il suppose qu'on connoisse la déclinaison de la Lune.

M. Pingré, dans son *Etat du ciel* (année 1757, pag. 186), s'est servi aussi de la hauteur de la Lune pour trouver l'angle horaire de la Lune, c'est-à-dire sa distance au méridien, en supposant la déclinaison connue par les tables. Voici son procédé, qui est aussi simple qu'il puisse être, en employant les angles horaires, et qui peut servir, même à terre, pour trouver la longitude, lorsqu'on ne peut pas comparer la Lune à une étoile. Ayant observé en pleine mer la hauteur du bord de la Lune, on y fait les quatre corrections qui dépendent de la hauteur de l'œil au-dessus de la mer, de la réfraction, de la parallaxe, et du demi-diametre de la Lune, et l'on a la hauteur vraie de la Lune. On sait toujours, à une demi-heure près, la longitude du lieu où l'on observe ; par conséquent on peut savoir l'heure qu'il est à Paris au moment où l'on a observé, et l'on peut calculer par les tables ou l'almanach la déclinaison de la Lune, et par conséquent sa distance au pole. L'on connoît aussi la latitude du lieu où l'on observe (car elle est sur-tout nécessaire dans cette méthode-ci) : l'on a donc la distance du pole au zénit ; ainsi, résolvant le triangle PZS, comme dans l'art. 1018, on trouvera l'angle horaire pour le lieu de l'observation.

4212. Connoissant ainsi l'angle horaire de la Lune par le moyen de la hauteur observée, on cherche à quelle heure cet angle horaire devoit avoir lieu au méridien de Paris : la différence entre l'heure de Paris et l'heure où l'on a observé est la différence des méridiens. Si cette différence trouvée est à-peu-près la même que celle qu'on a d'abord supposée pour calculer la déclinaison, la supposition est justifiée, il n'y a rien à changer au calcul précédent.

Si la différence trouvée n'est pas à-peu-près celle qu'on a employée, la déclinaison n'est pas juste ; alors on fait une autre supposition pour la longitude du lieu ; on cherche de même dans cette nouvelle supposition l'heure de Paris et la déclinaison de la Lune par les tables pour cette heure-là ; avec cette nouvelle déclinaison on résout une seconde fois le triangle PZS, et l'on trouve l'angle horaire. On cherche à quelle heure de Paris ce même angle horaire y

devoit avoir lieu, et la différence entre cette heure de Paris et l'heure de l'observation sera la différence des méridiens. Si cette différence est la même que celle qu'on a adoptée dans la seconde supposition, celle-ci sera vérifiée; mais s'il y a encore une erreur ou une différence dans le résultat, on écrira cette erreur au-dessous de celle de la premiere supposition, on en prendra la somme ou la différence, selon qu'elles seront de même dénomination ou de dénominations différentes, et l'on fera cette proportion : La somme des erreurs est à la plus plus petite erreur, comme celle-ci est à la quantité dont il faut corriger la différence des méridiens trouvée dans la supposition qui a donné la plus petite erreur.

4213. Exemple. On a observé en pleine mer la hauteur apparente du bord de la Lune, à 6^h de temps vrai; l'on en a conclu la hauteur vraie du centre de la Lune de $9° 55' 28''$, la latitude géographique du lieu de l'observation étant $50° 35' 27''$ australe. Supposons, conformément à l'estime du vaisseau, que l'on étoit d'environ 2^h à l'ouest de Paris, en sorte qu'il étoit 18^h à Paris; calculant, pour ce moment, la déclinaison de la Lune, on trouve $3° 50' 29''$ boréale, ainsi l'on a la distance de la Lune au zénit $= 80° 4' 32''$, sa distance au pole $= 93° 50' 29''$, et la distance du pole au zénit $= 30° 24' 33''$, d'où l'on conclut l'angle horaire de $69° 16' 46''$ (1018, 3937). Les tables que j'ai fait calculer (4206) seroient très utiles dans ce cas-là.

On trouve aussi par les tables que le même angle horaire pour Paris, de $69° 16' 46''$, avoit lieu à $18^h 28' 23''$. De là il suit que la différence des méridiens entre Paris et le lieu de l'observation devroit être de $2^h 28' 23''$: mais nous l'avons supposée $2^h 0'$; donc l'erreur de cette premiere supposition est de $28' 23''$.

4214. Il faut donc passer à une autre hypothese : on suppose que la différence des méridiens soit de $2^h 28' 23''$; on trouve la déclinaison de la Lune $3° 56' 10''$, et l'angle horaire $69° 9' 14''$: cet angle horaire a lieu à Paris à $18^h 43' 21''$; donc la différence des méridiens seroit de $2^h 43' 21''$, au lieu de $2^h 28' 23''$ qu'on avoit supposées; la seconde erreur est donc de $14' 58''$.

Ces erreurs sont toutes les deux en plus; elles ont diminué à mesure qu'on a augmenté la supposition de la différence des méridiens : cela prouve qu'il faut l'augmenter encore. On fera donc cette proportion : La différence des deux erreurs, $13' 25''$, est à la plus petite erreur $14' 58''$, comme la différence des deux suppositions $28' 23''$ est à $31' 40''$; c'est la quantité qu'il faut ajouter à la seconde supposition $2^h 28' 23''$ pour avoir la véritable différence des méridiens,

3^h 0′ 3″. Pour sentir la raison de cette proportion ; on jettera les yeux sur la disposition suivante de ces calculs.

Premiere supposition.	*Seconde supposition.*	*Différence*
Longitude, 2^h 0′ 0″	Longitude, 2^h 28′ 23″	28′ 23″
Erreur, 28 23	Erreur, 14 58	13 25

On voit dans cette petite table que l'erreur a diminué de 13′ 25″ pour 28′ 23″ d'augmentation dans la supposition de la longitude ou de la différence des méridiens ; d'où l'on conclura que l'erreur doit diminuer de 14′ 58″, ou se réduire à rien, pour 31′ 40″ d'augmentation dans la différence des méridiens supposée ; donc il faut y ajouter encore ces 31′ 40″, et l'on aura cette différence des méridiens que l'on cherchoit, de 3^h 0′ 3″.

4215. Ce fut pour faciliter l'usage de cette méthode en mer, que M. Pingré calcula pour les années 1754, 55, 56, 57, une excellente éphéméride, qui avoit pour titre *Etat du ciel.* Jamais on n'avoit mis tant d'exactitude et de temps à calculer une éphéméride : on y trouvoit pour midi et pour minuit de chaque jour le lieu de la Lune, sa latitude, son angle horaire, sa déclinaison, sa distance au Soleil, le mouvement horaire en longitude, le changement horaire de l'angle au pole, etc., tout cela calculé en secondes avec la derniere précision, en sorte que les calculs de la longitude, dont je viens de donner l'explication d'après M. Pingré, devenoient très faciles.

Il eut la constance de continuer seul ce travail pendant quatre ans: le peu d'usage qu'on en faisoit alors parmi les marins le détermina à suspendre un travail aussi pénible jusqu'au temps où il pourroit devenir plus utile ; mais M. Pingré eut l'avantage de donner l'exemple pour l'avenir, et de faire voir qu'un habile astronome pouvoit fournir lui seul à la navigation tous les calculs dont les navigateurs ont besoin. Lorsque je fus chargé de la *Connoissance des temps*, je donnai, dans le volume de 1761 et dans les suivans, les lieux de la Lune calculés avec la même précision, pour midi et pour minuit, qui sont le fondement de tous les autres calculs.

4216. La forme actuelle de l'*Almanach nautique* est celle que la

Caille indiqua dans les *Mémoires de* 1759, dans ses *Ephémérides* de 1765 à 1774, et dans son *Traité de navigation* (1760, pag. 218; 1769, page 245). Elle a été adoptée dans le *Nautical Almanac* calculé en Angleterre pour 1767, etc. Cette méthode consiste à donner pour chaque jour, de trois en trois heures, la distance de la Lune au Soleil, ou bien à une ou deux étoiles, en degrés, minutes et secondes, et la parallaxe horizontale de la Lune pour midi et pour minuit.

L'on pourroit y joindre encore le logarithme de la variation de distance pour 3^h, moins le logarithme de 3^h, afin d'avoir plus aisément la partie proportionelle de la derniere opération (4186).

4217. On a maintenant, dans le *Nautical Almanac* de Londres et dans la *Connoissance des temps* de Paris, quatre pages pour les distances, à chaque mois: deux sont pour les distances de la Lune à des étoiles orientales, et deux pour les étoiles occidentales. Pour suivre la forme des tables de corrections (4204), il faudroit, au lieu de la parallaxe horizontale de la Lune, y mettre le logarithme logistique de l'excès de cette parallaxe sur la plus petite parallaxe employée dans la table de correction; par ce moyen l'on pourroit avoir, par une simple addition, la seconde partie de la correction de la parallaxe; car dans ces tables il y a une colonne où se trouve le logar. logistique de 60′ multipliées par le cosinus de la hauteur apparente de la Lune et par le cosinus de l'angle à la Lune; en sorte qu'en y ajoutant celui de la seconde partie de la parallaxe, on a le logarith. logistique de la correction qu'elle exige pour la distance (4111 et 4185).

4218. Les raisons de préférence pour cette méthode des distances avoient été exposées fort au long par la Caille (*Mém. acad.* 1759). Voici les suppositions qu'il faisoit alors: 1°. L'on ne peut trouver sur mer l'angle horaire de la Lune par le moyen de sa hauteur, sans supposer connues la hauteur du pole et la déclinaison de la Lune: cependant on ne connoît la hauteur du pole qu'à quatre ou cinq minutes près; car, en supposant qu'on ait observé la hauteur du Soleil à midi, et par conséquent la hauteur du pole, à deux minutes près, il faut y appliquer des réductions pour le temps qui s'est écoulé depuis midi, et pour le chemin que le vaisseau a fait. L'incertitude de ces réductions, jointe à celle de l'observation principale, peut nous exposer à 4′ ou 5′ d'erreur dans la latitude.

2°. Il est difficile, pendant la nuit, d'observer bien exactement en mer la hauteur de la Lune, sur-tout quand elle est entre 20° et 60° de hauteur,

hauteur, à cause du reflet de la lumiere qui vient de la surface de l'eau, qui empêche de distinguer le terme de l'horizon, on ne l'a qu'à 4′ près.

3°. Il peut y avoir 2′ d'erreur dans la déclinaison de la Lune, soit qu'on la tire de l'observation, soit qu'on la prenne dans les tables; et cette erreur influe dans la longitude que l'on cherche.

4°. La Caille a calculé ce qui pouvoit résulter de ces erreurs dans différentes positions de la Lune et du vaisseau; en supposant encore 2′ d'erreur dans l'ascension droite de la Lune, calculée par les tables, et 30″ sur le temps vrai, il trouve l'erreur entre 3° 36′ et 19° 3′, c'est-à-dire entre 62 et 190 lieues marines (de 20 au degré).

4219. Dans la méthode où nous employons seulement la distance de la Lune à une étoile, l'incertitude est beaucoup moindre. La Caille supposoit 4′ d'erreur sur la distance observée : l'erreur qui en résulte sur la longitude est toujours à celle de la longitude que l'on cherche, comme le mouvement diurne de la Lune est à 360°, c'est-à-dire de 1° 49′, si le mouvement diurne est de 13° 10′ $\frac{1}{2}$. Cette méthode n'exige une extrême exactitude que dans la seule distance observée; car pour les hauteurs de la Lune et de l'étoile, sept à huit minutes d'erreur dans chacune produiront à peine un quart de degré sur la longitude. Enfin, supposant deux minutes d'erreur dans le calcul du lieu de la Lune, il en résultera 54′ sur la longitude. La somme de ces trois erreurs ne va pas à 3°, en les supposant toutes du même sens. Cette incertitude sera beaucoup diminuée, si l'on peut faire deux observations différentes le même jour. Mais on ne se trompe jamais d'une minute dans les tables ni dans l'observation, quand on a un bon sextant dont le limbe soit de cuivre, et auquel on applique une lunette acromatique : ainsi il ne faut pas conclure de ces calculs de la Caille que jamais l'erreur puisse être aussi considérable : je ne les ai rapportés que pour faire voir l'avantage de la méthode des distances.

4220. La Caille et M. Maskelyne ont éprouvé long-temps sur mer cette méthode des distances de la Lune au Soleil et aux étoiles; ils l'ont trouvée la plus exacte; ils l'ont adoptée de préférence. M. de Charmieres et M. de Verdun, officiers des vaisseaux du roi, qui se sont exercés à ces observations dans des voyages de long cours, l'ont employée et l'on regardée comme la meilleure. M. d'Agelet, qui a fait avec M. de Rosnevet le voyage des Terres australes en 1773, et le voyage autour du monde avec M. de la Perouse,

a fait un usage continuel de la méthode des distances : il n'a jamais trouvé plus d'un demi-degré d'erreur dans tous les atterrages où il pouvoit vérifier sa longitude. L'expérience prouve assez qu'on ne sauroit se dispenser de ces observations, pour peu qu'on ait de zele et de connoissance dans la navigation. Il ne nous reste donc qu'à inviter les navigateurs à en étudier les calculs, à en acquérir l'habitude, et à rendre cette pratique aussi générale qu'elle est utile pour la navigation.

Fin du troisieme et dernier volume.

TABLE DES MATIERES

CONTENUES DANS CET OUVRAGE,

Des auteurs qui y sont cités, et des termes d'astronomie qui s'y rencontrent;

A laquelle on a même ajouté l'explication de plusieurs termes qui ne sont pas employés dans le cours de ce Livre.

N. B. *Les nombres cités indiquent les articles et non les pages.*

A

Auteurs *cités dans cet ouvrage comme astronomes, mathématiciens ou géographes.*

G

H

J

K

L

M

N

O

P

NOMS des personnes citées dans cet ouvrage comme philosophes, historiens, poëtes, amateurs, artistes, etc.

D

F

G

N

O

de

S

T

Verticale,

Fin de la Table des Matieres.

ADDITIONS ET CORRECTIONS.

L'impression de cet ouvrage ayant commencé dès le 23 février 1788, il s'est fait beaucoup d'observations et de calculs, dont les résultats méritoient un supplément ; nous y joindrons les fautes que nous avons eu le temps d'appercevoir dans les feuilles imprimées. La suite paroîtra dans la connoissance des temps.

TOME I.

PRÉF. p. viij, ligne 17, après Saturne, *ajoutez* Herschel et la Table pour calculer le mouvement des Cometes.

P. xxxij, dans la note, au lieu de 5 pieds, *lisez* 3 pieds 8 pouc.

P. xl, ligne derniere, au lieu de Borz, *lisez* Porz.

P. xlj, ligne 20, *ajoutez :* qu'ayant été visiter, au mois d'août 1791, cet observatoire de Manheim, j'ai vu par moi même qu'il étoit aussi remarquable par sa solidité, sa situation et la bonté des instrumens, que par le zele des astronomes qui l'habitent. Ils ont déja fait une multitude d'observations, sur-tout pour les étoiles situées du côté du midi ; et il n'y a pas dans l'Europe d'observatoire plus utile à l'astronomie que celui-là. Les murs ont 7 pieds d'épaisseur au raiz-de-chaussée. Il y a 22 pieds de diametre dans œuvre, et des balcons qui ont 2 pieds 9 pouces de saillie. Le secteur, qui a 9 pieds, est au troisieme étage, sur une voûte très solides : la lunette méridienne a 6 pieds ; elle est placée au premier étage, sur des blocs de pierre qui ont 13 pieds de hauteur et 16 pouces sur 19, dans un avant-corps bâti en 1791, sur des fondemens très solides. Quant à l'observatoire de Schwetzingen, ce n'étoit qu'une petite tour de la façade du château, qui ne pouvoit entrer en comparaison avec le bel observatoire de Manheim ; aussi l'on n'a pas continué d'en faire usage.

P. lj, ligne 19, *ajoutez :* En Asie, M. de Beauchamp a établi un observatoire à Bagdad, où nous avons déja un grand nombre d'observations. Il est revenu en 1791, mais il espere retourner à Bagdad.

P. 31, dans le titre de l'art. 87, *lisez déclinaisons.*

P. 47, art. 139, ligne 2, *ajoutez :* à cause de l'esprit rude dans ἕτερος, on devroit écrire Hétérosciens, comme hétéro gene.

P. 49, art. 143, ligne 14, *lisez* ἄντοιχος et περίοιχος.

P. 80, ligne 25, au lieu de Pisaram, *lisez* Sisaram.

P. 81, en note, *lisez* ἀστρονομία.

P. 112, ligne 18, au lieu de Peryclus *lisez* Pergaeus.

P. 145, en note, *lisez* ἐφήμερος.

P. 148, ligne.... au lieu d'isocelle, *lisez* isoscelle.

P. 151, art. 424, à la fin : M. Pfaff, habile professeur, de Helmstadt dans le duché de Brunswick, m'a fait observer que Mæstlinus, son compatriote, mourut en 1631, et non en 1590 : c'est une faute de Weidler, qui a été copiée par tous les historiens de l'astronomie. *Epist. Schickardi ad Berneggerum*, p. 173.

P. 152, ligne 24, Possevin, *lisez* Poissevin.

P. 156, en note, *lisez* προγύμνασμα.

P. 161, ligne 23, au lieu de 1678, *lisez* 1673.

P. 172, article 504, au lieu de Hook, *lisez* Hooke; c'est la maniere dont il est le plus souvent écrit.

P. 178, en note, *lisez* προλέγω.

P. 187, art. 552, ligne 8, au lieu de *figurae*, lisez *figuras.*

P. 189, art. 557, ligne 7, lisez ἀμόρφωτοι.

Ibid. art. 558, *ajoutez :* j'en ai 8000 vers le nord, dans les 45 premiers degrés; ce qui est à raison de 55 mille pour tout le ciel, très visibles avec une lunette acromatique de 8 pieds. On en distingueroit mille fois plus avec le télescope de M. Herschel.

P. 205, art. 598, ligne 2, *lisez* ὕειν.

Ibid. ligne 7, au lieu de U, *lisez* Y.

P. 213, art. 623, ligne 1, au lieu de femme enchantée, *lisez* enchaînée.

P. 215, en note, lisez τρίγωνον.

P. 228, art. 662, ligne 5, *ajoutez :* Riccioli écrit Alphard; il est de même dans les Tables de Berlin.

P. 233, ligne 10, au lieu de Humes, *lisez* Hume.

P. 234, art. 700, à la fin, *ajoutez :* Le P. Hell, dans ses Ephémérides de 1790, en a fait trois : *Psalterium Georgianum*, entre le Taureau et l'Eridan; *Tubus Herschelii major*, entre le Lynx et les Gémeaux; *Tubus Herschelii minor*, entre le Taureau et Orion.

P. 239, ligne 25, au lieu de 397 étoiles, *lisez* 398. Il y en a 399 dans la seconde édition de mon astronomie, parceque j'y avois ajouté iota du Taureau, qui n'étoit pas dans le catalogue de la Caille, mais qu'il m'avoit donnée.

Ibid. art 714, à la fin, *ajoutez :* Cette imperfection du catalogue britannique a déterminé les astronomes à faire de nouvelles observations. J'ai entrepris les étoiles boréales avec M. le François, mon parent et mon éleve, qui est un très bon astronome : nous en avons déja 8000, au mois de juin 1791, seulement entre le pole et

45°, là où Flamsteed n'en avoit pas 1000. C'étoit la partie la plus négligée de tout le ciel; voyez les mémoires de 1789.

P. 275, art. 842, à la fin, *ajoutez :* il en a donné mille autres en 1789.

Ibid. art. 843, à la fin, *ajoutez :* cependant, au mois de février 1791, M. Herschel à lu un mémoire, dans lequel il établit comme probable que quelques nébuleuses ne sont pas des amas d'étoiles, mais des places lumineuses dans l'espace céleste, sans qu'on puisse assigner cette lumiere à aucun corps perceptible qui soit terminé.

P. 286, en note, *ajoutez :* le mot *aux*, *augis* vient des Arabes; il est employé dans Riccioli, *T. I*, *p.* 144.

P. 324, ligne 11, *ajoutez :* la Table de la Caille étoit peu exacte : je l'ai recalculée en entier, en employant le lieu de l'apogée pour 1800.

P. 325, ligne 7, après δx, *ajoutez :* au pole qui est élevé.

Ibid. ligne 34, art. 943, ligne 2, au lieu de page 41, *lisez* p. 40.

P. 340, ligne 8, au lieu de 4039, *lisez* 4036.

P. 471, à la fin, *ajoutez :* M. Carouge a calculé la rétrogradation de Herschel par les nouvelles Tables de M. de Lambre. Il a trouvé les nombres suivans, qui donnent 151 jours 12^h et 149^j 18^h pour les durées de la rétrogradation.

8^s	$14°$	30^m	8^s	$13°$	36^m
8	17	37	8	16	27
4	28	19	4	28	37
	1	53		1	37
3	15	5	3	13	47
8	13	24	8	12	24
	4	13		4	3

TOME II.

P. 32, art. 1251, *ajoutez :* cette méthode de M. de Lambre sera détaillée dans les Mémoires de Turin, Tome V.

P. 77, *ajoutez :* par les conjonctions de 1787 et 1788, qui ont été encore mieux observées, je trouve $11'\frac{1}{2}$ de plus, ou $10^s\ 8°\ 30'$.

P. 144, à la fin, *ajoutez :* ce doute a été levé par les recherches de M. de Lambre, dans la piece qui a remporté le prix de l'académie en 1790; et ses tables ont été encore vérifiées par les observations des années suivantes, 1789, 1791.

P. 180, *ajoutez :* les tables IX et X ont été tranposées dans les tables, pour qu'il n'y eût pas de blanc dans les pages.

P. 192, art. 1496, la réduction qui est dans les tables 6′ 47″ 7 n'est pas d'accord avec l'inclinaison moyenne ; il faudroit 6′ 56″, 7 : on l'a tirée des observations, et ce parti ne me paroît pas cohérent.

P. 201, art. 1511, à la fin, *ôtez* les mémoires de l'académie de Padoue: le manuscrit que j'avois envoyé a été perdu.

P. 246, ligne 13, au lieu de 25 bissextiles, *lisez* 75.

P. 293, ligne 12, au lieu de la Lune, *lisez* la Terre.

P. 327, ligne 21, *ajoutez :* en 1799 il n'y aura aucune éclipse de Lune; et, des deux éclipses de Soleil, aucune ne sera visible en Europe.

P. 344, ligne 11, art. 1768, à la fin, *après ces mots*, son étendue est égale au diametre du soleil, effacez les deux lignes suivantes et substituez ceci : Puisque l'angle E G F est égal à l'angle A G O, aussi voit-on souvent, un quart d'heure avant le commencement et après la fin de l'éclipse, une diminution de lumiere sur la Lune, qui est sensible à la vue simple lorsque la Lune ne reçoit qu'un cinquieme environ de la lumiere totale du Soleil.

P. 388, ligne 25, cette courbure de 3′ est une erreur de calcul de Képler (*Astron. Pars opt.* p. 392), on le verra *Mém. ac.* 1790.

P. 544, à la fin de l'art. 2239, *ajoutez :* plus bas la formule de Mayer devenoit plus compliquée : M. de Luc l'a analysée dans le Journal des Savans février 1791.

P. 546, ligne 16, au lieu de 0,887, *lisez* 0,869.

P. 552, art. 2253, à la fin, *ajoutez :* M. Roy a trouvé depuis $\frac{1}{3}$ jusqu'à $\frac{1}{24}$ (*Phil. Trans.* 1790, p. 246.)

P. 592, à la fin de l'art. 2333, *ajoutez :* un cercle entier de 18 pouces seulement, sur lequel il y a deux alidades pour multiplier les observations, peut donner la précision d'une ou deux secondes, comme on s'en est assuré à l'Observatoire royal en 1790.

P. 631, art. 2416, *ajoutez :* Lemaire l'avoit proposé en 1728, *Recueil des machines approuvées*, T. VI, p. 61.

P. 648, ligne 3, *ajoutez :* cet ouvrage a paru en 1790, *A Treatise on Practical Astronomy :* mais je n'y ai pas trouvé tous les détails que j'aurois desirés, sur-tout pour le cercle entier de Ramsden.

P. 694, ligne 4, après *je démontrerai, ajoutez :* (4046.)

P. 712, art. 2601, à la fin, *ajoutez :* si l'on ne peut avoir d'objet dans l'horizon, l'on observe une étoile fort basse, d'abord au 1er fil, ensuite au 3me l'axe étant retourné, en réduisant chaque fil au milieu ; ou bien deux jours consécutifs, si l'on n'a qu'un fil dans la lunette.

P. 714, art. 2603, à la fin, *ajoutez :* on peut, avec une étoile vers le zénit, se dispenser de niveau et de fil à-plomb, en observant le passage au 1er fil, l'axe étant dans un sens, et ensuite au dernier fil, dans l'autre position, en réduisant toujours au milieu les passages observés à chaque fil; car, si l'on trouve le même résultat, c'est une preuve que la lunette est bien verticale et l'axe bien horizontal.

TOME III.

P. 5, à la fin de l'art. 2736 *ajoutez :* M. de Lambre a donné des tables de précession dans la Connoissance des temps de 1792.

P. 6, art. 2643, à la fin, *ajoutez :* l'académie a décidé, le 19 mars 1791, de prendre pour mesure primitive la dix-millionieme partie du quart du méridien, qui est d'environ 36p. 11l. 44, et pour cet effet de mesurer avec un nouveau soin l'étendue des $9°\frac{3}{5}$ qu'il y a depuis Dunkerque jusqu'à Barcelone; et l'assemblée nationale l'a décrété le 26 mars. On travaille aux instrumens nécessaires pour cette grande entreprise.

P. 9, art. 2648, ligne 7, au lieu de $\frac{1}{143}$, *lisez* $\frac{1}{14,3}$.

Ibid. ligne 14, au lieu de deux lignes, *lisez* onze lignes.

P. 13, art. 2651, ligne 3 et suiv., au lieu de planches 29, 30, 31 et 32, *lisez* 31, 32, 33 et 34, parceque, dans cette 3me édition, le nombre des planches a été augmenté de 2 pour l'équatorial.

P. 29, art. 2688, au lieu de $m = 0{,}003323$, *lisez* 0,003328;
au lieu de $3\,m$ N $= 5665$, *lisez* 56,65;
au lieu de $\frac{15}{2}\,m^2$ M $= 47$, *lisez* 4,7.

P. 43, art. 2712, ligne 30, au lieu de art. 2638, *lisez :* 2648.

P. 74, art. 2781 : M. Maskelyne a donné, en 1790, une détermination plus exacte des mouvemens propres en ascension droite de plusieurs étoiles : voici les plus considérables : ils sont pour un siecle, quoique déduits des observations de Bradley, qui n'ont guere que 35 ans d'ancienneté, J'ai omis les étoiles dont les mouvemens sont au-dessous de 20″ par siecle.

La Chevre, . .	+	28″
Sirius. , ...	—	48
Procyon, . . .	—	84
α de l'Hydre,	—	22
Pollux, ...	—	75
Régulus, . . .	—	33
β du Lion, . .	—	63
β de la Vierge,	+	72
Arcturus, . .	—	92
Couronne, . .	+	27
α de l'Aigle, .	+	41
α du Verseau,	—	25
Lyre, ...	+	25
α de l'Hydre,	—	22

J'ai reconnu que Procyon a un mouvement en déclinaison de 95″ par siecle vers le nord, et la Chevre 65″ vers le midi; celui de Sirius me paroît 129″ vers le midi; et celui d'Arcturus 200″ vers le midi. (*Mém. de l'Ac.* 1790.)

P. 94, ligne 8, au lieu de parcouru l'angle, *lisez* parcouru la diagonale.

Ibid. art. 2838, M. de Lambre trouve $20'' \frac{1}{4}$ par les observations du 1[er] satellite.

P. 168, à la fin de l'art. 2998, *ajoutez :* ces tables sont dans la Connoissance des temps de 1792.

P. 188, ligne 28, *ajoutez :* j'ai détaillé le procédé pour le diametre du 4[me] satellite, *Mém.* 1788, p. 209; et en 1791 j'ai trouvé $9' 32''$.

P. 203, au commencement : M. Herschel a publié, à la fin de 1790, un mémoire où il donne la distance du sixieme $36''$ 7889, et celle du 7[me] 28, 6689, et leur période $1^j\ 8^h\ 53'\ 8''$ 9, et $22^h\ 37'\ 22''$ 9. Ce mémoire contient aussi des observations et des tables des sept satellites de Saturne : les époques des cinq premiers different un peu des miennes ; mais c'est que M. Herschel n'a pas employé comme moi des observations faites dans des points très différens de chaque orbite.

P. 205, dans la table il faut changer la révolution périodique du 4[me], que j'ai trouvée, par de nouveaux calculs, $15^j\ 22^h\ 41'\ 16''$, 022 ; sa révolution synodique, $15^j\ 23^h\ 15'\ 23''$ 153, et le mouvement $474987140''$. Mes tables corrigées sont dans la Connoissance des temps de 1792.

P. 207, les longitudes ne sont pas celles du 1[er] janvier, mais celles du 2. Cette méprise a été occasionnée par une faute qui est dans les tables de Cassini p. 218, à la fin, où il dit qu'il faut ajouter un jour après février, *tandis qu'il faut l'ôter dans les deux* premiers mois. Voici celles du 1[er] janvier :

4^s	17°	$11'$
5	26	13
3	5	44
4	17	26
6	15	50

Indépendamment de cette correction, M. Herschel trouve 8° à ôter de la longitude que je donne au 4[me] : mais ses propres observations s'accordent moins bien avec ses tables qu'avec les miennes, qui sont dans la Connoissance des temps de 1792.

Ibid. pour le 4[me] satellite j'ai trouvé, par les nouveaux calculs, le mouvement $10^s\ 20^\circ\ 39'\ 37''$.

Ibid. à la fin, *ajoutez :* M. Herschel a trouvé $3'\ 8''$ 918. (*Phil. Trans.* 1790.)

Ibid. dans la table, *ajoutez :* les époques pour 1788, suivant M. Herschel. (*Transactions philosophiques* de 1790.)

I	4^s	10°	$41'$	V	6	16	49
II	5	23	6	VI	10	5	47
III	3	3	20	VII	2	2	32
IV	4	12	16				

Le mouvement diurne du 6[me] est $262^\circ \frac{73}{100}$, et celui du 7[me] $381^\circ \frac{26}{100}$.

P. 210, art. 3076, ligne 5, la révolution du second, *ajoutez :* périodique.

P. 259, art. 3181, à la fin, *ajoutez :* Miss Herschel en a découvert une 4me le 17 avril 1790, et une cinquieme le 15 décembre 1791 ; c'est la 90e comete qui soit connue. M. Méchain les a observées à Paris, et a calculé les élémens de la premiere des deux : Nœud $1^s 3^\circ 11' 2''$, inclin. $63^\circ 52' 27''$, périhélie $9^s 3^\circ 43' 27'' 6$, 21 mai, à $5^h 56' \frac{1}{4}$. t. m. dis. périh. 0, 79796, mouvement rétrograde.

P. 261, art. 3184, à la fin, *ajoutez :* nous n'avons point en effet revu cette comete, quoiqu'on en ait vu trois autres en 1790.

P. 291, art. 3248 et 3249, M. de Lambre observe qu'il y a une maniere bien plus simple de trouver l'arc qui répond à la ligne S M sur le globe du Soleil, ou l'angle A C B, fig. 270. L'observation donne l'angle T. Dans le triangle CTB on a $T + C = CBD$, dont le sinus est $\frac{\sin.T.CT}{CB}$, ou sin. T divisé par $\frac{CB}{CT}$, qui est le sinus du demi-diametre apparent du Soleil : ainsi le sinus de $CBD = \frac{\sin.T}{\sin.\text{demi-diam.}}$; et si l'on en ôte l'angle T, on aura l'angle C ou l'arc A B du disque solaire, qui répond à la valeur observée de SM fig. 268.

P. 318, ligne 5, *ajoutez :* M. de Lambre se propose de donner une méthode analytique exacte, qui admet un nombre indéfini d'observations, et qui est préférable à celle que j'ai expliquée.

P. 322, ligne 4, même remarque.

P. 320, dans la 6me colonne de la table, au lieu de distance A*M*, *lisez* distance *P M;* car *A M* se rapporteroit à la figure 275.

P. 322, art. 3316, ligne 6, le nœud ascendant étoit à $3^s 19^\circ$; mais N est le nœud descendant qui paroît sur l'hémisphere inférieur de la Lune.

P. 326, art. 3325, ligne 3, *ajoutez :* c'est le nœud descendant de l'équateur lunaire qui concourt avec le nœud ascendant de l'orbite.

P. 328, il devroit y avoir 6 signes de plus sur le nœud ascendant de l'équateur lunaire et sur la distance de Manilius à ce nœud, mais le résultat est le même.

P. 339, art. 3353, ligne 8, *ajoutez :* M. Herschel trouve l'anneau de $17'' 227$ de rayon. (*Phil. Trans.* 1790.)

P. 351, ligne 10, M. Herschel a vu cinq points lumineux en forme de protubérances, qui débordent même son épaisseur à l'extrémité extérieure. Ils lui ont fait juger cette rotation de l'anneau $10^h 32' 15'' 4$ (*Phil. Trans.* 1790.) A cette distance un satellite tourneroit en $15^h \frac{1}{4}$.

P. 378, art. 3466. M. de Lambre démontre d'une maniere bien simple que le segment n'est autre chose que la moitié de la différence entre l'arc et le sinus. Si l'on appelle x l'arc AEP (Fig. 266) et qu'on abaisse la perpendiculaire CI sur la corde AP, le triangle CAP = sin. $\frac{1}{2}x$ cos. $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$ sin. x (3817); le secteur CAP = $\frac{1}{2}x$, en prenant le rayon pour unité : donc le segment AEPA = $\frac{1}{2}(x - \text{sin.}x)$: ainsi pour un arc de 64° ou 230400″, qui, en décimales du rayon, vaut 1,11701, si l'on ôte le sinus 0, 89879, l'on aura la différence 0,21822, dont la moitié étant divisée par la surface du cercle 3,14159, donne 0,03473 pour le segment en parties de la surface du cercle entier.

P. 429, ligne 22, au lieu de Jupiter, *lisez* Saturne.

P. 466, ligne 9, *ajoutez :* M. de la Place trouve, en 1790, que cette équation lunaire devroit être de 8″, parcequ'il augmente la masse de la Lune d'après ses calculs des observations des marées.

P. 504, art. 3734, ligne 5, au lieu de 3775, *lisez* 3975.

P. 507, art. 3742, *ajoutez :* M. de la Place, en 1790, trouve que la nutation devroit être de 10″, à raison de la force de la Lune triple de celle du Soleil.

P. 524, ligne 37, *ajoutez :* M. de la Place, en 1790, prenant un milieu entre les marées du matin et du soir de la nouvelle et de la pleine lune et des jours suivans à Brest, d'abord dans l'équinoxe, ensuite dans les solstices, a trouvé environ 2 pieds de plus pour les équinoxes que pour les solstices, comme on le verra dans les Mémoires de l'académie.

P. 525 à la fin, *ajoutez :* M. de la Place, en 1790, trouve la force de la Lune triple de celle du Soleil.

P. 564, au lieu de 3973, *lisez* 3913.

P. 658, ligne 20, au lieu de 2 sin². $\frac{1}{2}$ (D + OM), *lisez* 2 sin. $\frac{1}{2}$ (D + OM).

P. 660, ligne 4, après $\frac{1}{2}$ (AB + AC, fermez la parenthese.

P. 259. Au moment où ceci s'imprime je reçois les Elémens de la quatre-vingt-dixieme comete, annoncée à la page précédente 736. Nœud 6^s 10° 46′ 15″, inclinaison 39° 46′ 55″, périhélie 1^s 6° 29′ 42″, distance périhélie 1,2930235, passage au périhélie le 13 janvier 1792, à 3^h 44′ 13″, temps moyen à Paris : elle est rétrograde. C'est la dix-septieme comete que M. Méchain ait observée, et la seizieme qu'il ait calculée depuis celle de 1774 inclusivement. Il en a découvert, à lui seul, huit dont aucune ne paroissoit alors à la vue simple.



La Lande

Astronomie

III